

Câu 1 (5,5 điểm).

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $A = (x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4) - 144$

2. Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$.

Câu 2 (3,0 điểm).

1. Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên a thỏa mãn $(2017^{2017} + 1)$ chia hết $a^3 + 11a$

2. Cho đa thức $F(x) = x^3 + ax + b$ (với $a, b \in \mathbb{R}$). Biết đa thức $F(x)$ chia cho $x - 2$ thì dư 12, $F(x)$ chia cho $x + 1$ thì dư -6. Tính giá trị của biểu thức: $B = (6a + 3b - 11)(26 - 5a + 5b)$.

Câu 3 (4,0 điểm).

1. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{6}{x^2 + 2} + \frac{7}{x^2 + 3} + \frac{12}{x^2 + 8} - \frac{3x^2 + 16}{x^2 + 10} = 1$.

b) $2x(8x - 1)^2(4x - 1) = 9$.

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $y^2 + 2xy - 5x - 6 = 0$

Câu 4 (6,0 điểm).

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), kẻ đường cao AH và đường trung tuyến AM ($H, M \in BC$). Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC .

1. Chứng minh rằng:

a) $DE^2 = BH \cdot HC$.

b) $AH^2 = AD \cdot DB + AE \cdot EC$

c) DE vuông góc với AM .

2. Giả sử diện tích tam giác ABC bằng 2 lần diện tích tứ giác $ADHE$. Chứng minh tam giác ABC vuông cân.

Câu 5 (1,5 điểm).

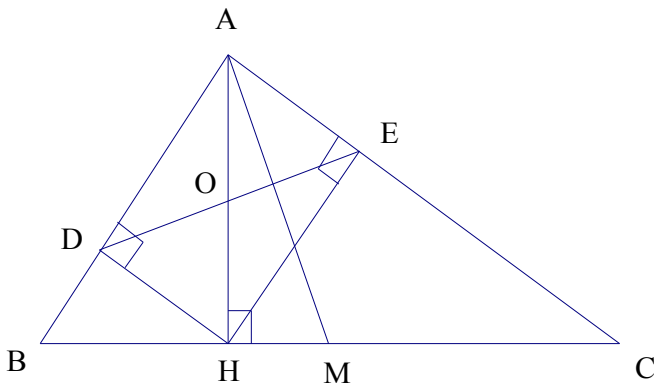
Cho hai số dương x, y có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{y^2}\right) + xy$$

-----Hết-----

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (4,5điểm)	1. (1,5 điểm)	
	1. $A = (x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4) - 144$	
	$= [(x - 1)(x + 2)] \cdot [(x - 3)(x + 4)] - 144$	
	$= (x^2 + x - 2)(x^2 + x - 12) - 144$	0,25
	$= (x^2 + x - 7 + 5)(x^2 + x - 7 - 5) - 144$	0,25
	$= (x^2 + x - 7)^2 - 25 - 144 = (x^2 + x - 7)^2 - 169$	0,25
	$= (x^2 + x - 7 - 13)(x^2 + x - 7 + 13)$	0,25
	$= (x^2 + x - 20)(x^2 + x + 6)$	0,25
	$= (x^2 - 4x + 5x - 20)(x^2 + x + 6) = (x - 4)(x + 5)(x^2 + x + 6)$	0,25
	2. (4,0 điểm)	
	a) (1,0 điểm)	
	ĐKXĐ : $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$	0,25
	Không có ĐK $x \neq -1$ trừ 0,25 đ	
	$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \left(\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right)$	0,25
	$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x^2 - 1 + x + 2 - x^2}{x(x-1)}$	0,25
	$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1}$	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	$P = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{2}$ với $x \in \text{ĐKXĐ}$	0,25
	$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(x + 1) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} (TM) \\ x = -1 (L) \end{cases}$	
	Vậy $x = \frac{1}{2}$ thì $P = \frac{-1}{2}$	0,5
	(Nếu không loại $x = -1$ trừ 0,25 điểm)	
	c) (1,0 điểm)	
	$P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{(x^2 - 1) + 1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1) + 1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$	0,25
	Với $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + 1 \in \mathbb{Z}$. Để P nguyên thì $\frac{1}{x-1}$ nguyên $\Rightarrow x - 1$ là ước của 1. $\Rightarrow x - 1 \in \{-1; 1\}$	0,25
	*) $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$ (TMĐK)	
	*) $x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$ (Loại do) ĐKXĐ	0,25
		0,25

	Vậy $x = 2$ thì P nhận giá trị nguyên.	
	c) (1,0 điểm)	
	$P = \frac{x^2}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1} = x-1 + \frac{1}{x-1} + 2$	0,25
	Vì $x > 1$ nên $x-1 > 0$ và $\frac{1}{x-1} > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương $x-1$ và $\frac{1}{x-1}$ ta có $x-1 + \frac{1}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}} = 2$	0,25
	Đẳng thức xảy ra khi $x-1 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1$ $\Leftrightarrow x-1 = 1$ (vì $x-1 > 0$) $\Leftrightarrow x = 2$ (TMĐK)	0,25
	Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4 khi $x = 2$	0,25
Câu 2 (3 điểm)	1. (1,5 điểm)	
	Giả sử tồn tại số nguyên a thỏa mãn $(2017^{2017} + 1)$ chia hết $a^3 + 11a$	0,25
	$A = a^3 + 11a = (a^3 - a) + 12a = a(a-1)(a+1) + 12a$	0,25
	ta có $(a-1); a; (a+1)$ là 3 số nguyên liên tiếp nên tồn tại một số là bội của 3 suy ra $(a-1)a(a+1) : 3$	0,25
	Vì $12a$ chia hết cho 3 nên $A : 3$ (1)	0,25
	Mặt khác $2017^{2017} + 1 = (2016 + 1)^{2017} + 1$ chia cho 3 dư 2 (2)	0,25
	Từ (1) và (2) dẫn đến điều giả sử trên là sai, tức là không có số nguyên nào thỏa mãn điều kiện bài toán đã cho.	0,25
	2. (1,5 điểm)	
	Gọi thương của phép chia $F(x)$ cho $x-2$ và $x+1$ lần lượt là $P(x)$ và $Q(x)$. Suy ra $x^3 + ax + b = (x-2)P(x) + 12$ (1) $x^3 + ax + b = (x+1)Q(x) - 6$ (2)	0,5
	Thay $x = 2$ vào (1) ta có $8 + 2a + b = 12 \Leftrightarrow 2a + b = 4 \Leftrightarrow 6a + 3b = 12$	0,25
	Thay $x = -1$ vào (2) ta có $-1 - a + b = -6 \Leftrightarrow -a + b = -5 \Leftrightarrow -5a + 5b = 25$	0,25
	$\Rightarrow B = (6a + 3b - 11)(26 - 5a + 5b) = 1.1 = 1$	0,5
Câu 3 (4,0 điểm)	1a) (1,5 điểm)	
	PT $\Leftrightarrow \left(\frac{6}{x^2+2} - 1\right) + \left(\frac{7}{x^2+3} - 1\right) + \left(\frac{12}{x^2+8} - 1\right) + \left(2 - \frac{3x^2+16}{x^2+10}\right) = 0$	0,25
	$\frac{4-x^2}{x^2+2} + \frac{4-x^2}{x^2+3} + \frac{4-x^2}{x^2+8} + \frac{4-x^2}{x^2+10} = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (4-x^2)\left(\frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+3} + \frac{1}{x^2+8} + \frac{1}{x^2+10}\right) = 0$ (1)	0,25
	Vì $\frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+3} + \frac{1}{x^2+8} + \frac{1}{x^2+10} > 0$ với mọi giá trị của x .	0,25
	Nên (1) $\Leftrightarrow 4-x^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$	0,25
	Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-2; 2\}$.	0,25
	1b) (1,5 điểm)	

$2x(8x - 1)^2(4x - 1) = 9 \Leftrightarrow (64x^2 - 16x + 1)(8x^2 - 2x) = 9$ $\Leftrightarrow (64x^2 - 16x + 1)(64x^2 - 16x) = 72$	0,25
Đặt $64x^2 - 16x = t$ ta có (*) $\Leftrightarrow t(t+1) - 72 = 0 \Leftrightarrow t = -9$ hoặc $t = 8$.	0,25
Với $t = -9$ ta có $64x^2 - 16x = -9 \Leftrightarrow 64x^2 - 16x + 9 = 0 \Leftrightarrow (8x - 1)^2 + 8 = 0$ (vô nghiệm vì $(8x - 1)^2 + 8 > 0$)	0,25
Với $t = 8$ ta có $64x^2 - 16x = 8 \Leftrightarrow 64x^2 - 16x - 8 = 0 \Leftrightarrow (8x - 1)^2 - 9 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 1 = 3 \\ 8x - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$ Vậy tập nghiệm phương trình là $S = \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right\}$	0,25
1c) (1,0 điểm)	
Ta có: $y^2 + 2xy - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 5x + 6$ (*) $\Leftrightarrow (x + y)^2 = (x + 2)(x + 3)$	
VT của (*) là số chính phương; VP của (*) là tích của 2 số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases}$	0,25
*) Với $x = -2 \Rightarrow y = 2$	0,25
*) Với $x = -3 \Rightarrow y = 3$	0,25
Vậy có 2 cặp số nguyên $(x; y) = (-2; 2)$ hoặc $(x; y) = (-3; 3)$	0,25
	
1.	
a) (1,75 điểm). Chứng minh: $DE^2 = BH.HC$.	
Xét $\triangle AHB$ và $\triangle CHA$	
Có $\angle AHB = \angle AHC = 90^\circ$, $\angle B = \angle CAH$ (vì cùng phụ với $\angle BAH$)	0,5
$\Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle CHA$ (g-g) $\Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{HB}{HA} \Rightarrow AH^2 = BH.CH$	0,5
Lại có $AH \perp BC, HE \perp AC, HD \perp AB$ nên $\angle D = \angle H = \angle E = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật $\Rightarrow DE = AH$	0,5
$\Rightarrow DE^2 = DH.CH$	0,25
b. (1,5 điểm). Chứng minh: $AH^2 = AD.DB + AE.EC$	

	Chứng minh $\triangle HDB \sim \triangle ADH \Rightarrow HD^2 = AD.DB$	0,5
	Chứng minh $\triangle AHE \sim \triangle ACH \Rightarrow HE^2 = AE.EB$	0,5
	Mà tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật nên $DH = AE$. Do đó $HD^2 + HE^2 = AE^2 + HE^2 = AH^2 = AD.DB + AE.EC$ (Định lý Pytago áp dụng vào tam giác vuông AEH).	0,5
	c) (1,5 điểm). Chứng minh: $DE \perp AM$.	
	Gọi O là giao điểm của AH và DE , Tứ giác $ADHE$ là hình chữ nhật nên $OA = OE \Rightarrow \triangle OAE$ cân tại $O \Rightarrow \angle HAE = \angle AED$	0,5
	$\triangle ABC$ vuông tại A , có M là trung điểm của BC nên $MA = MB = MC \Rightarrow \triangle MAC$ cân tại $M \Rightarrow \angle MAC = \angle MCA$	0,5
	$\Rightarrow \angle AED + \angle MAC = \angle HAE + \angle MCA = 90^\circ \Rightarrow DE \perp AM$	0,5
	2. (1,0 điểm)	
	Theo giả thiết $S_{ABC} = 2S_{ADHE} = 4S_{ADE}$ hay $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}$ (1)	0,25
	Ta có $\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{AE.AD}{AB.AC} = \frac{(AE.AC).(AD.AB)}{(AB.AC)^2} = \frac{AH^4}{(AB.AC)^2}$ $= \frac{AH^4}{(AH.BC)^2} = \frac{AH^2}{BC^2} \leq \frac{AM^2}{BC^2} = \frac{1}{4}$ (2)	0,5
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AH^2}{BC^2} = \frac{AM^2}{BC^2} \Leftrightarrow AH = AM \Leftrightarrow H \equiv M$ nên $\triangle ABC$ vuông cân tại A .	0,25
Câu 5 (1,5 điểm)	1. (1,5 điểm)	
	$Q = (1 - \frac{1}{x^2})(1 - \frac{1}{y^2}) + xy$ $= 1 - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 y^2} + xy = 1 - \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} + \frac{1}{x^2 y^2} + xy$	0,25
	$= 1 - \frac{(x+y)^2 - 2xy}{x^2 y^2} + \frac{1}{x^2 y^2} + xy = 1 - \frac{1 - 2xy}{x^2 y^2} + \frac{1}{x^2 y^2} + xy = 1 + xy + \frac{2}{xy}$	0,25
	Áp dụng BĐT AM-GM ta có $x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow 1 \geq 4xy \Rightarrow \frac{1}{xy} \geq 4$ (*)	0,25
	$Q = 1 + xy + \frac{2}{xy} = 1 + (xy + \frac{1}{16xy}) + \frac{31}{16xy}$	0,25
	Áp dụng BĐT AM-GM và kết hợp (*) ta có: $Q \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{31}{16} \cdot 4 = \frac{37}{4}$	0,25
	Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$. Vậy $Min Q = \frac{37}{4}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$	0,25

Lưu ý khi chấm bài:

- Trên đây chỉ là sơ lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì cho điểm các phần theo thang điểm tương ứng.
- Với bài 4, nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không chấm.