

ĐỀ CHÍNH THỨC

Lưu ý : Thí sinh làm mỗi câu trên một tờ giấy riêng và ghi rõ số thứ tự câu ở trang 1 của mỗi tờ giấy thi.
Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Câu 1 (4,0 điểm). Cho hai đa thức $P(x) = x^4 - 2x - 1$ và $Q(x) = x^6 + x^4 - 4x^3 - x^2 - 1$.

- Chứng minh đa thức $P(x)$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.
- Gọi hai nghiệm thực phân biệt của $P(x)$ là u và v . Chứng minh uv là một nghiệm của $Q(x)$.

Câu 2 (3,0 điểm). Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 1; x_{n+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + x_n^2} - x_n}{1 + \sqrt{1 + x_n^2} + x_n}$ với mọi n nguyên dương. Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Câu 3 (4,0 điểm). Cho số nguyên dương m ($m \geq 2$). Gọi p là ước nguyên tố của $2^{2^m} + 1$. Giả sử $p = k \cdot 2^n + 1$ với k là số nguyên dương lẻ và n là số nguyên dương.

- Chứng minh $n \geq m + 1$.
- Chứng minh $k^{2^{n-1}} - 1$ chia hết cho p .

Câu 4 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) và có H là trực tâm. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC cắt đoạn thẳng AM tại K ; tiếp tuyến của (O) tại A cắt đường thẳng BC ở điểm S .

- Chứng minh $MK \cdot MA = MB^2$ và $SA = SK$.
- Đường thẳng SK cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q . Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác TPQ tiếp xúc với đường tròn (O) .

Câu 5 (4,0 điểm). Ban chấp hành Đoàn trường THPT X gồm có n thành viên. Trong năm học, Đoàn trường tổ chức m chương trình, mỗi chương trình có đúng k thành viên trong ban chấp hành tham gia. Mỗi thành viên trong ban chấp hành tham gia ít nhất một chương trình.

- Cho $m = 8; k = 3$. Biết rằng với hai chương trình bất kỳ luôn có đúng một thành viên trong ban chấp hành tham gia cả hai chương trình đó. Chứng minh $n = 17$.
- Cho $n = 25; k = 10$. Biết rằng với hai chương trình bất kỳ luôn có không quá 3 thành viên trong ban chấp hành cùng tham gia. Chứng minh $m \leq 6$.

-----**HẾT**-----

Cán bộ coi thi **KHÔNG** giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh: SBD:

Trường: Tỉnh/TP: