Cùng Khám Phá

LÊ THỊ HOÀI CHÂU (Tổng Chủ biên)
PHẠM THỊ THU THUỶ (Chủ biên)
TRẦN TRÍ DŨNG, LÊ ĐẠI DƯƠNG

Toán 9

Bản mẫu

Tập 1

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC HUẾ

DTP Education Solutions

LÊ THỊ HOÀI CHÂU (Tổng Chủ biên)
PHẠM THỊ THU THUỶ (Chủ biên)
TRẦN TRÍ DŨNG, LÊ ĐẠI DƯƠNG

Toán 9

Tập 1

Bản mẫu

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC HUẾ

DTP Education Solutions

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh, quý thầy, cô giáo và phụ huynh thân mến!

Sách giáo khoa ***Toán 9 – Cùng khám phá*** được biên soạn nhằm đáp ứng những yêu cầu đổi mới về dạy và học Toán, đảm bảo kế thừa những yếu tố tích cực của các bộ sách giáo khoa Việt Nam thời kì trước đây, đồng thời khai thác có chọn lọc kinh nghiệm quốc tế về phát triển sách giáo khoa hiện đại.

Sách giáo khoa ***Toán 9 – Cùng khám phá*** đưa vào một hệ thống đa dạng các hoạt động trên lớp, các ví dụ, hình ảnh, các bài tập minh hoạ, qua đó giúp học sinh khám phá kiến thức, hiểu và có thể vận dụng được chúng vào việc giải quyết một số vấn đề của Toán học hay thực tiễn. Bằng việc chọn lựa một cách tiếp cận hợp lí các nội dung Toán học, sách giáo khoa ***Toán 9 – Cùng khám phá*** hướng đến mục tiêu tạo điều kiện thuận lợi cho học sinh tự học, cho giáo viên tổ chức các hoạt động dạy học, đánh giá, cho phụ huynh theo dõi, kiểm tra, từ đó từng bước hình thành ở học sinh phương pháp học tập tích cực.

Bên cạnh đó, nội dung trong sách được biên soạn với độ mở thích hợp, tích hợp nhiều kiến thức thực tiễn, chú trọng sự liên môn, góp phần phát triển năng lực toàn diện cho học sinh. Ngoài ra, nguồn tài liệu số của sách được biên soạn và luôn có sẵn trên nền tảng Eduhome.

Mong muốn lớn nhất của nhóm tác giả là bộ sách sẽ góp phần vào việc giúp học sinh liên kết các khái niệm toán học với nhau, phát triển năng lực tư duy toán học, năng lực giải quyết vấn đề, năng lực giao tiếp bằng ngôn ngữ toán học, kết nối được Toán học với các môn học khác và với thế giới thực. Hi vọng với bộ sách này, học sinh sẽ cảm thấy hứng thú, tích cực, chủ động hơn khi học Toán và sẽ có những trải nghiệm thú vị khi vận dụng Toán học vào cuộc sống.

Chúc các em khám phá được nhiều điều thú vị của thế giới Toán học, nhận ra được sự có mặt của nó khắp nơi trong cuộc sống quanh ta.

Em hãy giữ gìn sách cẩn thận để sử dụng được lâu dài nhé!

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

1. Mở đầu chương	Giới thiệu chương thông qua việc thiết lập sự liên hệ giữa chủ đề của chương với thực tiễn. Mục tiêu học tập cũng được nêu rõ trong mục này.
2. Các bài học: Mỗi bài học thường được thiết kế với các phần:	
	Khởi động Thường là một câu hỏi hay một tình huống tạo động cơ học tập, từ đó nhận ra ứng dụng của kiến thức sẽ học trong bài.
HOẠT ĐỘNG	**Hoạt động** Thông qua trải nghiệm, khám phá, học sinh tham gia vào việc xây dựng kiến thức mới, nhận ra ứng dụng của nó trong những ngữ cảnh cụ thể.
	Kiến thức trọng tâm Kiến thức/nội dung được đặt trong khung màu với biểu tượng bóng đèn, trình bày những nội dung chủ chốt của bài học.
VÍ DỤ	**Ví dụ** Là những minh hoạ cho kiến thức mới và ứng dụng của nó, đồng thời luyện cho học sinh cách lập luận, diễn đạt rõ ràng, chính xác một ý tưởng bằng ngôn ngữ toán học.
LUYỆN TẬP **VẬN DỤNG**	**Luyện tập – Vận dụng** Tạo cơ hội cho học sinh sử dụng kiến thức vừa học vào việc giải quyết những vấn đề cụ thể của toán học hoặc của thực tiễn.
BÀI TẬP	**Bài tập** Gồm một hệ thống bài tập từ đơn giản – áp dụng trực tiếp các khái niệm toán học vừa được học, đến những bài đòi hỏi việc vận dụng kiến thức toán học ở mức độ cao hơn về tư duy lập luận, kĩ năng. Nhiều vấn đề thực tiễn được đưa vào, giúp học sinh nhận ra ý nghĩa của kiến thức vừa học.
3. Ôn tập chương	Qua hệ thống bài tập ôn tập, học sinh có thể kiểm tra lại hiểu biết của mình về các khái niệm và ý tưởng quan trọng được nghiên cứu trong chương, kết nối chúng với nhau trong việc giải quyết những vấn đề đa dạng.

Bên cạnh đó, trong các bài học còn có thêm một số đề mục bổ trợ sau đây:

Ghi chú/Lưu ý	Em có biết (nhằm đọc thêm)
Ghi chú/Lưu ý: Nhấn mạnh hoặc mở rộng kiến thức, chú thích những thông tin quan trọng liên quan đến các kiến thức cốt lõi.	**?? EM CÓ BIẾT** Giới thiệu một số yếu tố thú vị về ứng dụng của toán học hay lịch sử toán học.

Mục lục

Phần ĐẠI SỐ

Chương 1 PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Bài 1 Phương trình quy về phương trình bậc nhất một ẩn 2
Bài 2 Phương trình và hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn 8
Bài 3 Giải bài toán bằng cách lập hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn 19
Ôn tập chương 1 24
Hoạt động thực hành và trải nghiệm 27

Chương 2 BẤT ĐẲNG THỨC. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Bài 1 Bất đẳng thức 29
Bài 2 Bất phương trình bậc nhất một ẩn 37
Ôn tập chương 2 47

Chương 3 CĂN THỨC

Bài 1 Căn bậc hai của một số thực không âm 51
Bài 2 Căn thức bậc hai 59
Bài 3 Căn bậc ba. Căn thức bậc ba 66
Ôn tập chương 3 71

Phần HÌNH HỌC PHẲNG

Chương 4 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Bài 1 Các tỉ số lượng giác của góc nhọn 75
Bài 2 Một số hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông 83
Ôn tập chương 4 88
Hoạt động thực hành và trải nghiệm 91

Chương 5 ĐƯỜNG TRÒN

Bài 1 Đường tròn 98
Bài 2 Vị trí tương đối của hai đường tròn 103
Bài 3 Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn 107
Bài 4 Tiếp tuyến của đường tròn 111
Bài 5 Góc ở tâm, cung và hình quạt tròn 115
Bài 6 Góc nội tiếp 123
Ôn tập chương 5 127
Hoạt động thực hành và trải nghiệm 130

Bảng tra cứu thuật ngữ 135

Bảng giải thích thuật ngữ 136

Phần ĐẠI SỐ

Chương 1 Phương trình quy về phương trình bậc nhất một ẩn. Phương trình và hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương trình quy về phương trình bậc nhất một ẩn và hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có nhiều ứng dụng trong thực tiễn. Chẳng hạn, trong quang học, người ta dùng phương trình quy về phương trình bậc nhất một ẩn để tính khoảng cách từ vật đến ống kính máy ảnh khi biết khoảng cách từ ống kính máy ảnh đến phim và tiêu cự của ống kính (nguồn: https://www.schoolphysics.co.uk/age16-19/Optics/Refraction/text/Lens_formula/index.html). Ngoài ra, các nhà kinh tế học sử dụng hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn để tìm điểm cân bằng giữa cung và cầu của hàng hoá (nguồn: https://www.wallstreetmojo.com/equilibrium-quantity/).

Cùng tìm hiểu

- Cách giải phương trình tích có dạng $(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) = 0$;
- Cách giải phương trình chứa ẩn ở mẫu quy về phương trình bậc nhất một ẩn;
- Khái niệm phương trình bậc nhất hai ẩn, hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn, nghiệm của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn;
- Cách giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn;
- Cách vận dụng hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn để giải quyết một số vấn đề thực tiễn.

Bài 1 PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Từ khoá: phương trình chứa ẩn ở mẫu, điều kiện xác định của phương trình.

Hình bên mô tả một pháo sáng được phóng từ một bè cứu sinh trên biển. Độ cao h (m) của pháo sáng so với mặt nước biển được tính bởi công thức $h = 30{,}48t - 4{,}8768t^2$, trong đó t (s) là thời gian sau khi pháo sáng được bắn (nguồn: *https://www.gauthmath.com/solution/1744672974223365*). Sau bao lâu pháo sáng rơi xuống biển?

1 PHƯƠNG TRÌNH TÍCH CÓ DẠNG $(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) = 0$

HOẠT ĐỘNG 1

Cho hai số thực a và b.

a) Nếu $a = 0$ hoặc $b = 0$ thì tích ab bằng bao nhiêu?

b) Nếu $ab = 0$ thì a và b có cùng khác 0 được không?

Ta đã biết: Trong một tích, nếu có một thừa số bằng 0 thì tích bằng 0; ngược lại nếu tích bằng 0 thì ít nhất một trong các thừa số của tích bằng 0.

Dựa vào tính chất trên, để giải phương trình tích $(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) = 0$, ta thực hiện như sau:

Bước 1 Giải các phương trình $a_1x + b_1 = 0$ và $a_2x + b_2 = 0$.

Bước 2 Nghiệm của mỗi phương trình ở Bước 1 là nghiệm của phương trình $(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) = 0$.

VÍ DỤ 1

Giải phương trình $(2x - 4)(3x + 7) = 0$.

Bài giải

Phương trình $2x - 4 = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Phương trình $3x + 7 = 0$ có nghiệm duy nhất $x = -\frac{7}{3}$.

Vậy phương trình $(2x - 4)(3x + 7) = 0$ có hai nghiệm $x = 2$ và $x = -\frac{7}{3}$.

VÍ DỤ 2

Bằng cách phân tích vế trái thành nhân tử, hãy giải các phương trình sau:

a) $25 - (x - 1)^2 = 0$;   b) $6x^2 - 3x = 0$.

Bài giải

a) $25 - (x - 1)^2 = 0$

$[5 - (x - 1)][5 + (x - 1)] = 0$

$(6 - x)(4 + x) = 0$.

Phương trình $6 - x = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 6$.

Phương trình $4 + x = 0$ có nghiệm duy nhất $x = -4$.

Vậy phương trình $25 - (x - 1)^2 = 0$ có hai nghiệm $x = 6$ và $x = -4$.

b) $6x^2 - 3x = 0$

$3x(2x - 1) = 0$.

Phương trình $3x = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Phương trình $2x - 1 = 0$ có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$.

Vậy phương trình $6x^2 - 3x = 0$ có hai nghiệm $x = 0$ và $x = \frac{1}{2}$.

LUYỆN TẬP 1

Giải các phương trình sau:

a) $(12 - 4x)(5x + 6) = 0$;   b) $(4x + 1)^2 - (2x - 3)^2 = 0$.

VÍ DỤ 3

Giải phương trình $(x + 4)(x - 3) = (x + 4)(-x + 5)$.

Bài giải

$(x + 4)(x - 3) = (x + 4)(-x + 5)$

$(x + 4)(x - 3) - (x + 4)(-x + 5) = 0$

$(x + 4)[(x - 3) - (-x + 5)] = 0$

$(x + 4)(x - 3 + x - 5) = 0$

$(x + 4)(2x - 8) = 0$.

Phương trình $x + 4 = 0$ có nghiệm duy nhất $x = -4$.

Phương trình $2x - 8 = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 4$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -4$ và $x = 4$.

LUYỆN TẬP 2

Giải phương trình $(5x + 8)(6x - 1) = (3x - 4)(6x - 1)$.

VẬN DỤNG 1

Trả lời câu hỏi nêu trong phần Khởi động.

2 PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

Trong mục này, chúng ta sẽ nghiên cứu cách giải các phương trình có biểu thức chứa ẩn ở mẫu (gọi tắt là *phương trình chứa ẩn ở mẫu*).

HOẠT ĐỘNG 2

Một học sinh giải phương trình $x+\frac{1}{x-2}=2+\frac{1}{x-2}$ như sau:

"Chuyển các biểu thức chứa ẩn sang một vế:

$$x+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-2}=2.$$

Thu gọn vế trái, ta giải được $x=2$".

Giá trị $x=2$ có phải là nghiệm của phương trình ban đầu không? Vì sao?

Khi biến đổi phương trình mà làm mất mẫu chứa ẩn của phương trình thì nghiệm của phương trình nhận được có thể không là nghiệm của phương trình ban đầu. Vì vậy khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta phải đặt *điều kiện xác định của phương trình* trước khi làm mất mẫu chứa ẩn của phương trình.

Điều kiện xác định của phương trình chứa ẩn ở mẫu là điều kiện của ẩn để tất cả các mẫu trong phương trình đều khác 0.

VÍ DỤ 4

Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau:

a) $\frac{x+1}{x-1}=2$;

b) $1+\frac{2}{x-3}=\frac{3}{x+1}$.

Bài giải

a) Phương trình $\frac{x+1}{x-1}=2$ được xác định khi $x-1\neq 0$ hay $x\neq 1$.

b) Phương trình $1+\frac{2}{x-3}=\frac{3}{x+1}$ được xác định khi $x-3\neq 0$ và $x+1\neq 0$ hay $x\neq 3$ và $x\neq -1$.

LUYỆN TẬP 3

Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau:

a) $\frac{x}{x-5} = \frac{x+3}{x+2}$;　　b) $1 + \frac{4x-6}{x-4} = \frac{3}{x-4}$.

HOẠT ĐỘNG 3

Xét phương trình $\frac{2}{x} = \frac{3}{x+1}$.

a) Tìm điều kiện xác định của phương trình.

b) Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi bỏ mẫu để thu được một phương trình mới.

c) Giải phương trình mới ở câu b.

d) Giá trị của ẩn x tìm được ở câu c có thoả mãn điều kiện xác định và có phải là nghiệm của phương trình ban đầu không?

Cách làm như trong Hoạt động 3 chính là cách giải phương trình $\frac{2}{x} = \frac{3}{x+1}$. Tổng quát, để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta thực hiện như sau:

Bước 1 Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2 Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi bỏ mẫu.

Bước 3 Giải phương trình vừa nhận được.

Bước 4 Kiểm tra điều kiện xác định và kết luận nghiệm của phương trình ban đầu.

VÍ DỤ 5

Giải phương trình $\frac{x}{x+1} = \frac{x-1}{x-2}$.　　(1)

Bài giải

Điều kiện xác định của phương trình là $x \neq -1$ và $x \neq 2$.

Quy đồng mẫu hai vế của phương trình, ta được:

$$\frac{x(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)}.$$

Sau khi bỏ mẫu, ta được phương trình:

$$x(x-2) = (x+1)(x-1). \qquad (1a)$$

Giải phương trình (1a):

$$x(x-2)=(x+1)(x-1)$$
$$x^2-2x=x^2-1$$
$$-2x=-1$$
$$x=\frac{1}{2}.$$

Ta thấy $x=\frac{1}{2}$ thoả mãn điều kiện xác định nên nó là nghiệm của phương trình (1).

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2}$.

VÍ DỤ 6

Giải phương trình $\frac{x}{x-3}+\frac{x}{x+1}=\frac{4x}{(x+1)(x-3)}$. (2)

Bài giải

Điều kiện xác định của phương trình là $x\neq -1$ và $x\neq 3$.

Quy đồng mẫu hai vế và bỏ mẫu, ta được:

$$\frac{x(x+1)+x(x-3)}{(x+1)(x-3)}=\frac{4x}{(x+1)(x-3)}$$
$$x(x+1)+x(x-3)=4x.$$
$$x^2+x+x^2-3x=4x$$
$$2x^2-6x=0$$
$$2x(x-3)=0$$
$$x=0 \text{ hoặc } x=3.$$

Ta thấy $x=0$ thoả mãn điều kiện xác định nhưng $x=3$ không thoả mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x=0$.

LUYỆN TẬP 4

Giải các phương trình sau:

a) $1+\frac{3x-2}{x-4}=\frac{2}{x-4}$;

b) $\frac{2x+3}{x}=\frac{8x-1}{4(x-2)}$.

VẬN DỤNG 2

Một đội máy xúc trên công trường đào được 8 000 m^3 đất trong đợt làm việc thứ nhất và 10 000 m^3 đất trong đợt làm việc thứ hai. Biết rằng thời gian làm việc của đội trong mỗi đợt là bằng nhau và mỗi ngày trong đợt thứ hai đội đào nhiều hơn 50 m^3 so với mỗi ngày trong đợt thứ nhất. Tìm năng suất trung bình mỗi ngày của đội trong mỗi đợt.

BÀI TẬP

1.1. Giải các phương trình sau:

a) $(4x+7)(3x-5)=0$; b) $(1{,}3x-3{,}9)(0{,}2x+8)=0$.

1.2. Phân tích vế trái thành nhân tử rồi giải phương trình:

a) $3x(x-6)+8(x-6)=0$; b) $(4x^2-9)-(x+2)(3-2x)=0$.

1.3. Giả sử chi phí vận chuyển x sản phẩm đến nơi tiêu thụ của một công ty được tính bởi công thức $C=2x^2-40x+480$ (nghìn đồng). Xác định số sản phẩm được vận chuyển đến nơi tiêu thụ khi chi phí vận chuyển là 480 000 đồng.

1.4. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{3x-8}{x+6}=2$;

b) $2x+\dfrac{3}{2}=\dfrac{2x^2-6}{x}$;

c) $\dfrac{6}{2x+3}=2-3x$.

1.5. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{1}{x-7}+4=\dfrac{x+1}{7-x}$;

b) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{3x-2}{x^2-1}$;

c) $\dfrac{3}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{2}{(x-2)(x-4)}=\dfrac{1}{(x-3)(x-4)}$.

1.6. Tìm các giá trị của k sao cho biểu thức P sau có giá trị bằng 2:

$$P=\frac{10}{3}-\frac{3k-1}{4k+12}-\frac{7k+2}{6k+18}.$$

1.7. Một ô tô dự định đi hết quãng đường AB dài 30 km. Trong thực tế, do thời tiết xấu nên tốc độ của ô tô đã giảm 20 km/h so với dự định. Vì vậy ô tô đi hết quãng đường AB với thời gian gấp rưỡi thời gian dự định. Hãy tìm tốc độ của ô tô trong thực tế.

Bài 2

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Từ khoá: phương trình bậc nhất hai ẩn, hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn, nghiệm của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn, phương pháp thế, phương pháp cộng.

Cô Dung tập thể dục mỗi buổi sáng trong 45 phút. Cô ấy kết hợp bài tập thể dục nhịp điệu để đốt cháy 12 calo mỗi phút và bài tập thể dục giãn cơ để đốt cháy 4 calo mỗi phút. Mục tiêu của cô ấy là đốt cháy hết 420 calo sau mỗi buổi tập thể dục. Hỏi cô Dung cần thực hiện mỗi bài tập thể dục nêu trên trong bao lâu để đạt được mục tiêu?

1 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

HOẠT ĐỘNG 1

a) Số tuổi của anh là x, số tuổi của em là y. Lập một hệ thức biểu diễn sự liên hệ giữa x và y, biết anh lớn hơn em 5 tuổi.

b) 500 kg gạo được chia thành x bao 50 kg và y bao 20 kg. Lập một hệ thức biểu diễn sự liên hệ giữa x và y.

Mỗi hệ thức đã lập trong Hoạt động 1 được gọi là một phương trình bậc nhất hai ẩn. Tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Phương trình bậc nhất hai ẩn x và y là phương trình có dạng

$$ax + by = c$$

trong đó a, b, c là các số đã biết ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$).

VÍ DỤ 1

Chỉ ra các phương trình bậc nhất hai ẩn x và y trong các phương trình sau:

$y + 2x^2 = 1$; $\quad 3x - 4y = 5$; $\quad \dfrac{1}{x} - y = 7$; $\quad 0x + y = 9$; $\quad y^3 - x = 0$.

Bài giải

Các phương trình bậc nhất hai ẩn x và y là $3x - 4y = 5$ và $0x + y = 9$.

LUYỆN TẬP 1

Chỉ ra các phương trình bậc nhất hai ẩn x và y trong các phương trình sau:

$5y - x = -2$; $\quad 3x^2 - 10y = 1$; $\quad \dfrac{x^2}{x+1} - y = 0$; $\quad x + 0y = 4$; $\quad y^2 - 9x = -6$.

HOẠT ĐỘNG 2

a) Cặp số $(x_1; y_1) = (8; 5)$ có thoả mãn $50x_1 + 20y_1 = 500$ không?
b) Tìm một cặp số $(x_2; y_2)$ khác cặp số $(8; 5)$ sao cho $50x_2 + 20y_2 = 500$.
c) Tìm một cặp số $(x_3; y_3)$ sao cho $50x_3 + 20y_3 \neq 500$.

Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ thoả mãn $50x_0 + 20y_0 = 500$ được gọi là một nghiệm của phương trình $50x + 20y = 500$.
Tổng quát, ta nói cặp số $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ nếu $ax_0 + by_0 = c$.

VÍ DỤ 2

Những cặp số nào trong ba cặp số $(1; 2)$, $(3; -2)$ và $(-4; 0,5)$ là nghiệm của phương trình $2x + y = 4$?

Bài giải
Vì $2.1 + 2 = 4$ nên cặp số $(1; 2)$ là một nghiệm của phương trình $2x + y = 4$.
Vì $2.3 - 2 = 4$ nên cặp số $(3; -2)$ là một nghiệm của phương trình $2x + y = 4$.
Vì $2.(-4) + 0,5 \neq 4$ nên cặp số $(-4; 0,5)$ không là một nghiệm của phương trình $2x + y = 4$.

LUYỆN TẬP 2

Tìm bốn nghiệm của phương trình $3x - 4y = 5$.

Lưu ý: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, mỗi nghiệm $(x_0; y_0)$ của phương trình $ax + by = c$ được biểu diễn bởi điểm có toạ độ $(x_0; y_0)$.

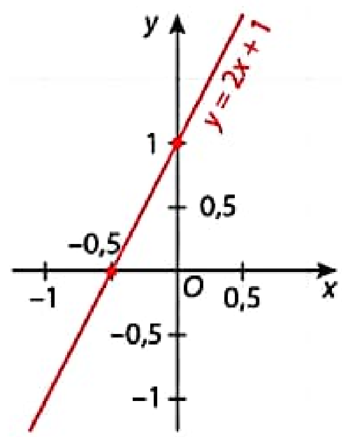
VÍ DỤ 3

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy biểu diễn các nghiệm của mỗi phương trình sau:
a) $2x - y = -1$; b) $0x + 3y = 6$; c) $-4x + 0y = 12$.

Bài giải
a) Xét phương trình $2x - y = -1$. (1)
Chuyển vế, ta có $y = 2x + 1$.
Nếu cho x một giá trị bất kì thì cặp số $(x; y)$, trong đó $y = 2x + 1$, là một nghiệm của phương trình (1).

Do đó phương trình (1) có các nghiệm là $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x + 1. \end{cases}$

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình (1) là đường thẳng $y = 2x + 1$.



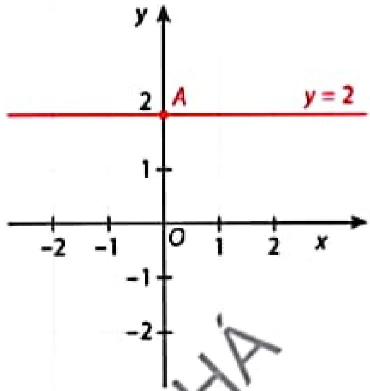
b) Xét phương trình $0x + 3y = 6$. (2)

Từ (2), ta có $3y = 6$ hay $y = 2$.

Nếu cho x một giá trị bất kì thì cặp số $(x; y)$, trong đó $y = 2$, là một nghiệm của phương trình (2).

Do đó phương trình (2) có các nghiệm là $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2. \end{cases}$

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình (2) là đường thẳng đi qua điểm $A(0; 2)$ và song song với trục hoành (ta gọi đường thẳng này là đường thẳng $y = 2$).



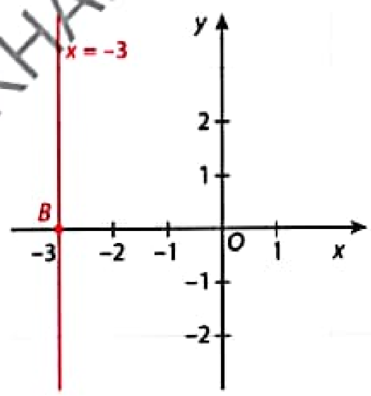
c) Xét phương trình $-4x + 0y = 12$. (3)

Từ (3), ta có $-4x = 12$ hay $x = -3$.

Nếu cho y một giá trị bất kì thì cặp số $(x; y)$, trong đó $x = -3$, là một nghiệm của phương trình (3).

Do đó phương trình (3) có các nghiệm là $\begin{cases} x = -3 \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình (3) là đường thẳng đi qua điểm $B(-3; 0)$ và song song với trục tung (ta gọi đường thẳng này là đường thẳng $x = -3$).



LUYỆN TẬP 3

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy biểu diễn các nghiệm của mỗi phương trình sau:

a) $4x - y = 3$; b) $0x - 2y = 5$; c) $7x + 0y = 21$.

2 HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

HOẠT ĐỘNG 3

Trong phần Khởi động, gọi x (phút) và y (phút) lần lượt là thời gian cô Dung thực hiện bài tập thể dục nhịp điệu và bài tập thể dục giãn cơ để đạt được mục tiêu. Lập hai phương trình biểu diễn sự liên hệ giữa x và y.

Trong Hoạt động 3, hai phương trình lập được là hai phương trình bậc nhất hai ẩn. Hệ gồm hai phương trình như thế được gọi là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

Tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn x và y là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

trong đó mỗi phương trình của hệ là một phương trình bậc nhất hai ẩn x và y.

VÍ DỤ 4

Chỉ ra các hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn trong các hệ phương trình sau:

$\begin{cases} y + 2x^2 = 1 \\ y^2 + 2x = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 4y = -5 \\ 4x + 3y = 15; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - y = 7 \\ x + y = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 9 \\ x = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y^3 - x = 0 \\ x - y = 0. \end{cases}$

Bài giải

Các hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn là $\begin{cases} 3x - 4y = -5 \\ 4x + 3y = 15 \end{cases}$ và $\begin{cases} y = 9 \\ x = 0. \end{cases}$

LUYỆN TẬP 4

Có bao nhiêu hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn trong các hệ phương trình sau?

$\begin{cases} y = 0 \\ x - 3y = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ x + y = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{1}{y} - 7x = 8 \\ x = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ x - 4 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y - x = 5 \\ 2x - 2y = -10. \end{cases}$

HOẠT ĐỘNG 4

Xét hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} x + y = 45 \\ 3x + y = 105. \end{cases}$$

Trong hai cặp số (25; 20) và (30; 15), cặp số nào là một nghiệm của phương trình $x + y = 45$, đồng thời là một nghiệm của phương trình $3x + y = 105$?

Cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một *nghiệm của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn* nếu nó là nghiệm chung của hai phương trình của hệ đó.

Lưu ý:

- Nếu hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn không có nghiệm thì ta nói hệ đó vô nghiệm.
- Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn là tìm tất cả các nghiệm của nó.

VÍ DỤ 5

Hãy cho biết cặp số nào trong hai cặp số (1; 2) và (–2; 3) là một nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 3y = -4. \end{cases}$

Bài giải

Vì 3.1 + 2 = 5 và 2.1 – 3.2 = –4 nên cặp số (1; 2) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 3y = -4. \end{cases}$

Vì $3.(-2) + 3 \neq 5$ nên cặp số (–2; 3) không là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 3y = -4. \end{cases}$

VÍ DỤ 6

Giải thích vì sao hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$ vô nghiệm.

Bài giải

Giả sử hệ phương trình đã cho có nghiệm, tức là có một cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $x_0 + 2y_0 = 2$ và $2x_0 + 4y_0 = 5$. Do đó $2x_0 + 4y_0 = 4$ và $2x_0 + 4y_0 = 5$. Suy ra 4 = 5 (vô lí). Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

LUYỆN TẬP 5

Giải thích vì sao hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$ vô nghiệm.

3 GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

HOẠT ĐỘNG 5

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 & (1) \\ -3x + 5y = -4. & (2) \end{cases}$$

a) Từ phương trình (1) của hệ, biểu diễn x theo y rồi thế vào phương trình (2) để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn y).

b) Giải phương trình chỉ còn một ẩn y ở câu a.

c) Thay giá trị của y tìm được trong câu b vào phương trình biểu diễn x theo y trong câu a để tìm giá trị của x. Kiểm tra xem cặp $(x; y)$ vừa tìm được có phải là nghiệm của hệ phương trình đã cho không.

Cách giải hệ phương trình nêu trong Hoạt động 5 được gọi là *giải hệ phương trình bằng phương pháp thế*. Tổng quát, để giải hệ phương trình bằng phương pháp thế, ta làm như sau:

Bước 1 Từ một phương trình của hệ đã cho (xem là phương trình thứ nhất), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình thứ hai để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).

Bước 2 Giải phương trình thu được ở Bước 1 để tìm giá trị của ẩn có mặt trong phương trình đó.

Bước 3 Sử dụng giá trị của ẩn tìm được trong Bước 2 để tìm giá trị của ẩn còn lại rồi kết luận nghiệm của hệ phương trình.

VÍ DỤ 7

Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp thế:

$$\begin{cases} x - 4y = 6 \\ -2x + 3y = -7. \end{cases}$$

Bài giải

Từ phương trình thứ nhất, biểu diễn x theo y ta có $x = 4y + 6$. Thế $x = 4y + 6$ vào phương trình thứ hai, ta được:

$$\begin{aligned} -2(4y + 6) + 3y &= -7 \\ -8y - 12 + 3y &= -7 \\ -5y - 12 &= -7 \\ -5y &= 5 \\ y &= -1. \end{aligned}$$

Thay $y = -1$ vào phương trình $x = 4y + 6$, ta tìm được $x = 2$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(2; -1)$.

VÍ DỤ 8

Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 6x - 3y = -12 \\ -2x + y = 4; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ -3x + 6y = -7. \end{cases}$

Bài giải

a) Từ phương trình thứ hai, biểu diễn y theo x ta có $y = 2x + 4$. Thế $y = 2x + 4$ vào phương trình thứ nhất, ta được:

$$6x - 3(2x + 4) = -12 \text{ hay } 0x = 0.$$

Mọi x thuộc $\mathbb{R}$ đều là nghiệm của phương trình này. Vậy hệ đã cho có vô số nghiệm $(x; y)$ với $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x + 4. \end{cases}$

b) Từ phương trình thứ nhất, biểu diễn x theo y ta có $x = 2y + 2$. Thế $x = 2y + 2$ vào phương trình thứ hai, ta được:

$$-3(2y + 2) + 6y = -7 \text{ hay } 0y = -1.$$

Phương trình này không có nghiệm y. Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

Lưu ý: Trong quá trình giải hệ phương trình bằng phương pháp thế, nếu sau khi thế xuất hiện phương trình có hệ số của ẩn bằng 0 thì hệ phương trình đã cho hoặc có vô số nghiệm, hoặc vô nghiệm.

LUYỆN TẬP 6

Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 7x + 3y = 4; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + y = -3 \\ 12x + 3y = -9; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 5y = -4 \\ -4x + 20y = 15. \end{cases}$

4 GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP CỘNG

HOẠT ĐỘNG 6

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & (1) \\ x + 3y = 4. & (2) \end{cases}$$

a) Viết phương trình (1') thu được khi nhân hai vế của phương trình (1) với 3.

b) Cộng từng vế hai phương trình (1') và (2) ta được phương trình nào?

c) Giải phương trình thu được trong câu b để tìm giá trị của ẩn x.

d) Thay giá trị của x tìm được trong câu c vào phương trình (1) hoặc (2) để tìm giá trị của y. Kiểm tra xem cặp $(x; y)$ vừa tìm được có phải là nghiệm của hệ phương trình đã cho không.

Cách giải hệ phương trình nêu trong Hoạt động 6 được gọi là *giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng*. Tổng quát, để giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng, ta làm như sau:

Bước 1 Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.

Bước 2 Cộng hoặc trừ từng vế hai phương trình thu được trong Bước 1 để được một phương trình mới mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình chỉ còn một ẩn).

Bước 3 Giải phương trình mới tìm được ở Bước 2 để tìm giá trị của ẩn có mặt trong phương trình đó.

Bước 4 Thay giá trị của ẩn tìm được trong Bước 3 vào một trong hai phương trình của hệ đã cho để tìm giá trị của ẩn còn lại rồi kết luận nghiệm của hệ phương trình.

VÍ DỤ 9

Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 7 \\ 2x - 3y = 2. \end{cases}$$

Bài giải

Do hệ số của x trong hai phương trình bằng nhau nên trừ từng vế hai phương trình của hệ, ta được:

$$(2x + 2y) - (2x - 3y) = 7 - 2$$
$$5y = 5$$
$$y = 1.$$

Thay $y = 1$ vào phương trình $2x + 2y = 7$, ta có:

$$2x + 2 = 7$$
$$2x = 5$$
$$x = \frac{5}{2}.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{5}{2}; 1\right)$.

VÍ DỤ 10

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 4. \end{cases}$$

Bài giải

Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 2 và hai vế của phương trình thứ hai với 3, ta thu được hệ sau:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 14 \\ 9x - 6y = 12. \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ trên, ta được:

$$(4x + 6y) + (9x - 6y) = 14 + 12$$
$$13x = 26$$
$$x = 2.$$

Thay $x = 2$ vào phương trình $2x + 3y = 7$, ta có:

$$4 + 3y = 7$$
$$3y = 3$$
$$y = 1.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là (2; 1).

LUYỆN TẬP 7

Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 5x + 4y = 9 \\ 3x + 7y = 10; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ -4x + 6y = 8; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 9y = 15 \\ -2x + 6y = -10. \end{cases}$

VẬN DỤNG

Trả lời câu hỏi nêu trong phần Khởi động.

5 TÌM NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG MÁY TÍNH CẦM TAY

Ta có thể tìm được nghiệm của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng máy tính cầm tay trong trường hợp hệ đó có nghiệm duy nhất.

VÍ DỤ 11

Sử dụng máy tính cầm tay thích hợp, tìm nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 7x + 8y = 9 \\ 4x - 3y = 5. \end{cases}$$

Bài giải

MODE 5 1

7 = 8 = 9 = 4 = − 3 = 5 =

= Kết quả: $X = \frac{67}{53}$ = Kết quả: $Y = \frac{1}{53}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{67}{53}; \frac{1}{53}\right)$.

VÍ DỤ 12

Sử dụng máy tính cầm tay thích hợp, tìm nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 0,1x + 0,3y = 2,2 \\ 7x - 6y = 0,8. \end{cases}$$

Bài giải

MODE 5 1

0 · 1 = 0 · 3 = 2 · 2 =

7 = − 6 = 0 · 8 =

= Kết quả: $X = \frac{224}{45}$ = Kết quả: $Y = \frac{766}{135}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{224}{45}; \frac{766}{135}\right)$.

Lưu ý: Khi tìm nghiệm của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng máy tính cầm tay, nếu hệ đó không có nghiệm duy nhất thì có loại máy tính cầm tay không hiển thị kết luận về nghiệm của hệ. Trong trường hợp đó, ta giải hệ bằng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng.

LUYỆN TẬP 8

Sử dụng máy tính cầm tay thích hợp, tìm nghiệm của các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 9x - 5y = -11 \\ 22x + 17y = 3; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{3}{8}y = \frac{1}{4} \\ -\frac{4}{5}x + \frac{9}{8}y = \frac{7}{8}; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 0,6x - 0,7y = 1,5 \\ -0,2x + 0,3y = -1. \end{cases}$

BÀI TẬP

1.8. Tìm ba nghiệm cho mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

a) $5x + 7y = 10$; b) $11x - 3y = 18$.

1.9. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế:

a) $\begin{cases} 7x + y = 19 \\ x + 7y = -11; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 6y = -3 \\ 5x + 8y = 7; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = -2. \end{cases}$

1.10. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng:

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 2x - 7y = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 2x + y = 4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}5y = 3 \\ 1{,}5x - 2y = 1{,}5. \end{cases}$

1.11. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2(x + y) + 3(x - y) = 4 \\ (x + y) + 2(x - y) = 5; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3(x + 2y) - 4(2x - y) = 5 \\ 4(x + 2y) + 3(2x - y) = 15. \end{cases}$

1.12. Sử dụng máy tính cầm tay thích hợp, tìm nghiệm của mỗi hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 11x - 13y = -7 \\ 7x + 19y = 2; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{8}x + \dfrac{3}{4}y = \dfrac{1}{16} \\ -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{7}{5}y = \dfrac{1}{5}; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 0{,}12x - 0{,}15y = -2{,}4 \\ 0{,}21x + 0{,}35y = -3{,}6. \end{cases}$

1.13. Tìm các giá trị của m và n để đa thức sau bằng đa thức 0:

$$P(x) = (5m - 3n - 1)x + m - 4n - 12.$$

1.14. Xác định a và b để đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm A và B trong mỗi trường hợp sau:

a) $A(3; -2)$ và $B(-3; 1)$; b) $A(0; 2)$ và $B(\sqrt{3}; 2)$.

Bài 3 GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Từ khoá: hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

Hai bạn Nam và An cùng vào một cửa hàng để mua bánh mì và trà sữa cho gia đình của mình. Bạn Nam mua 3 ổ bánh mì và 2 li trà sữa, bạn An mua 5 ổ bánh mì và 3 li trà sữa. Trên đường về nhà, hai bạn này gặp bạn Châu. Bạn Nam và bạn An cho bạn Châu biết số tiền mỗi bạn đã trả cho cửa hàng lần lượt là 120 000 đồng và 190 000 đồng. Biết rằng giá tiền mỗi ổ bánh mì là bằng nhau và giá tiền mỗi li trà sữa cũng bằng nhau. Hỏi giá tiền của một ổ bánh mì và giá tiền của một li trà sữa là bao nhiêu?

Trong bài học này, chúng ta sẽ tìm hiểu ứng dụng của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn trong việc giải quyết một số vấn đề thực tiễn.

HOẠT ĐỘNG

Hãy xác định giá tiền của một ổ bánh mì và một li trà sữa nêu trong phần Khởi động theo các hướng dẫn sau:

a) Gọi x và y (đơn vị: nghìn đồng) lần lượt là giá tiền của một ổ bánh mì và một li trà sữa rồi đặt điều kiện cho chúng. Hãy lập biểu thức tính số tiền bạn Nam và bạn An phải trả theo x và y.

b) Từ thông tin đã biết, hãy lập hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn theo x và y.

c) Giải hệ phương trình trên để tìm x và y.

d) Từ nghiệm tìm được trong câu c, xác định giá tiền của một ổ bánh mì và một li trà sữa.

Nhận xét: Tổng quát, để giải quyết một bài toán bằng cách lập hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1 Lập hệ phương trình:

- Chọn hai ẩn (thường là hai đại lượng cần tìm trong bài toán) và đặt điều kiện thích hợp, đơn vị (nếu có) cho chúng.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập hai phương trình biểu diễn mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2 Giải hệ hai phương trình ở Bước 1.

Bước 3 Kiểm tra xem nghiệm tìm được ở Bước 2 có thoả mãn điều kiện của ẩn không rồi trả lời cho bài toán ban đầu.

VÍ DỤ 1

Chị Lan và chị Thu đi mua áo sơ mi và quần tây tại một cửa hàng thời trang. Chị Lan mua 3 chiếc áo sơ mi và 2 chiếc quần tây với giá tiền tổng cộng là 2,25 triệu đồng. Chị Thu mua 2 chiếc áo sơ mi và 1 chiếc quần tây với giá tiền tổng cộng là 1,25 triệu đồng. Xác định giá bán mỗi chiếc áo sơ mi và mỗi chiếc quần tây, biết rằng tất cả các áo sơ mi đều đồng giá và tất cả các quần tây đều đồng giá.

Bài giải

Gọi x (triệu đồng) và y (triệu đồng) ($x > 0$ và $y > 0$) lần lượt là giá bán mỗi chiếc áo sơ mi và mỗi chiếc quần tây.

Vì chị Lan mua 3 chiếc áo sơ mi và 2 chiếc quần tây với giá tiền tổng cộng là 2,25 triệu đồng nên $3x + 2y = 2{,}25$.

Vì chị Thu mua 2 chiếc áo sơ mi và 1 chiếc quần tây với giá tiền tổng cộng là 1,25 triệu đồng nên $2x + y = 1{,}25$.

Do đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2{,}25 \\ 2x + y = 1{,}25. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được $x = 0{,}25$ (triệu đồng) và $y = 0{,}75$ (triệu đồng).

Ta thấy $x = 0{,}25$ và $y = 0{,}75$ thoả mãn điều kiện $x > 0$ và $y > 0$.

Vậy giá bán mỗi chiếc áo sơ mi và mỗi chiếc quần tây lần lượt là 250 nghìn đồng và 750 nghìn đồng.

LUYỆN TẬP 1

Trong môn bóng rổ, mỗi quả ném phạt thành công sẽ được 1 điểm và mỗi quả ném vào rổ sẽ được 2 hoặc 3 điểm tuỳ theo khu vực ném. Trong một mùa giải, một vận động viên bóng rổ đã ghi được tổng cộng 1 243 điểm, trong đó anh ấy đã thực hiện thành công 237 quả ném phạt và tổng số các quả ném rổ thành công ở khu vực 2 điểm và khu vực 3 điểm là 496. Tìm số quả ném rổ thành công ở khu vực 2 điểm và khu vực 3 điểm mà vận động viên đã thực hiện trong mùa giải đó.

VÍ DỤ 2

Một chuyên gia dinh dưỡng đề xuất cho một khách hàng một chế độ ăn đặc biệt bao gồm hai loại thực phẩm D và E. Chế độ ăn phải có đúng 350 đơn vị canxi và 180 đơn vị sắt. Số lượng đơn vị của canxi và sắt trong 100 gam thực phẩm mỗi loại được cho trong bảng sau:

	Thực phẩm D	Thực phẩm E
Canxi	30	10
Sắt	10	10

Khách hàng trên cần ăn bao nhiêu gam thực phẩm mỗi loại theo chế độ ăn đó?

Bài giải

Gọi x (gam) và y (gam) ($x > 0$ và $y > 0$) lần lượt là khối lượng thực phẩm D và E mà khách hàng trên cần ăn theo chế độ.

Trong 100 gam thực phẩm D có 30 đơn vị canxi và 10 đơn vị sắt nên trong x gam thực phẩm D có $\frac{30x}{100}$ đơn vị canxi và $\frac{10x}{100}$ đơn vị sắt.

Trong 100 gam thực phẩm E có 10 đơn vị canxi và 10 đơn vị sắt nên trong y gam thực phẩm E có $\frac{10y}{100}$ đơn vị canxi và $\frac{10y}{100}$ đơn vị sắt.

Chế độ ăn phải có đúng 350 đơn vị canxi nên $\frac{30x}{100} + \frac{10y}{100} = 350$.

Chế độ ăn phải có đúng 180 đơn vị sắt nên $\frac{10x}{100} + \frac{10y}{100} = 180$.

Do đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{30x}{100} + \frac{10y}{100} = 350 \\ \frac{10x}{100} + \frac{10y}{100} = 180 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 0,3x + 0,1y = 350 \\ 0,1x + 0,1y = 180. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được $x = 850$ và $y = 950$.

Ta thấy $x = 850$ và $y = 950$ thoả mãn điều kiện $x > 0$ và $y > 0$.

Vậy khách hàng trên cần ăn 850 gam thực phẩm D và 950 gam thực phẩm E.

LUYỆN TẬP 2

Bảng bên dưới mô tả khối lượng (kg) nhôm và đồng để sản xuất ra một thiết bị điện tử A hoặc B.

	Nhôm	Đồng
Thiết bị điện tử A	2	3
Thiết bị điện tử B	1	2

Một xưởng sản xuất sử dụng hết 420 kg nhôm và 690 kg đồng để sản xuất các thiết bị điện tử A và B. Hỏi có bao nhiêu thiết bị điện tử mỗi loại được sản xuất?

VÍ DỤ 3

Xác định các hệ số x và y trong phương trình phản ứng hoá học (đã cân bằng) sau:

$$xZn + 4yHNO_3 \rightarrow xZn(NO_3)_2 + 2NO + 2yH_2O.$$

Bài giải

Vì phương trình phản ứng hoá học nêu trên đã cân bằng nên lần lượt số nguyên tử của nguyên tố Zn, nguyên tố H, nguyên tố N và nguyên tố O ở hai vế của phương trình phải bằng nhau.

Do đó $4y = 2x + 2$ và $12y = 6x + 2 + 2y$. Vậy ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 4y = 2x + 2 \\ 12y = 6x + 2 + 2y \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 6x - 10y = -2. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được $x = 3$ và $y = 2$. Vậy $x = 3$ và $y = 2$.

LUYỆN TẬP 3

Xác định các hệ số x và y trong phương trình phản ứng hoá học (đã cân bằng) sau:

$$xKMnO_4 \rightarrow yK_2MnO_4 + MnO_2 + O_2.$$

VÍ DỤ 4

Hai người ở hai địa điểm A và B cách nhau 3,8 km, khởi hành cùng một lúc, đi bộ ngược chiều nhau và gặp nhau ở một địa điểm cách A là 2 km. Nếu người đi chậm hơn xuất phát trước người kia $3\frac{1}{6}$ phút thì họ sẽ gặp nhau ở chính giữa quãng đường AB. Tính tốc độ của mỗi người.

Bài giải

Gọi x (km/h) và y (km/h) ($x > 0$ và $y > 0$) lần lượt là tốc độ của người đi từ A và người đi từ B. Vì họ khởi hành cùng một lúc rồi gặp nhau ở một địa điểm cách A là 2 km nên người đi chậm hơn là người đi từ B và người này đi được quãng đường là $3{,}8 - 2 = 1{,}8$ (km). Do đó $\frac{2}{x} = \frac{1{,}8}{y}$.

Từ giả thiết "Nếu người đi chậm hơn xuất phát trước người kia $3\frac{1}{6}$ phút (hay $\frac{19}{360}$ giờ) thì họ sẽ gặp nhau ở chính giữa quãng đường AB", ta suy ra:

$$\frac{1{,}9}{x} = \frac{1{,}9}{y} - \frac{19}{360}.$$

Đặt $u = \frac{1}{x}$ và $v = \frac{1}{y}$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1{,}9u = 1{,}9v - \frac{19}{360} \\ 2u = 1{,}8v \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 1{,}9u - 1{,}9v = -\frac{19}{360} \\ 2u - 1{,}8v = 0. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được $u = \frac{1}{4}$ và $v = \frac{5}{18}$. Do đó $x = 4$ và $y = 3{,}6$.

Ta thấy $x = 4$ và $y = 3{,}6$ thoả mãn điều kiện $x > 0$ và $y > 0$.

Vậy tốc độ của người đi từ A và người đi từ B lần lượt là 4 km/h và 3,6 km/h.

LUYỆN TẬP 4

Một xe khách chạy từ bến xe A đến bến xe B cách nhau 215 km. Sau khi xe khách xuất phát được 1 giờ, một xe ô tô bắt đầu đi từ bến xe B đến bến xe A và gặp xe khách khi đã đi được 1 giờ 30 phút. Tính tốc độ của mỗi xe, biết rằng mỗi giờ xe ô tô đi nhanh hơn xe khách 10 km.

BÀI TẬP

1.15. Một nhà hàng buffet có một mức giá cho người lớn và một mức giá khác cho trẻ em. Gia đình ông An gồm hai người lớn và ba trẻ em thanh toán 1 260 000 đồng khi vào nhà hàng. Gia đình ông Vương gồm ba người lớn và một trẻ em thanh toán 1 120 000 đồng khi vào nhà hàng. Xác định giá buffet của mỗi người lớn và mỗi trẻ em.

1.16. Một phòng thí nghiệm cần tạo ra 500 ml dung dịch axit Trichloroacetic 34% (axit Trichloroacetic được sử dụng phổ biến trong lĩnh vực da liễu). Các dung dịch có sẵn là dung dịch axit Trichloroacetic 25% và dung dịch axit Trichloroacetic 50%. Cần trộn bao nhiêu mililít mỗi dung dịch trên để tạo thành 500 ml dung dịch axit Trichloroacetic 34%?

1.17. Xác định các hệ số x và y trong phương trình phản ứng hoá học (đã cân bằng) sau:

$$8HCl + Fe_3O_4 \to xFeCl_2 + 2yFeCl_3 + 4H_2O.$$

1.18. Thầy Đức đang soạn một bài kiểm tra môn Toán với tổng số điểm là 100 điểm, bao gồm các câu hỏi trắc nghiệm đúng/sai (2 điểm cho mỗi câu hỏi) và các câu hỏi trắc nghiệm nhiều lựa chọn (4 điểm cho mỗi câu hỏi). Ngoài ra, thầy Đức muốn số câu hỏi trắc nghiệm nhiều lựa chọn gấp đôi số câu hỏi trắc nghiệm đúng/sai.

a) Có bao nhiêu câu hỏi mỗi loại trong bài kiểm tra?

b) Nếu học sinh của thầy Đức có thể trả lời một câu hỏi trắc nghiệm đúng/sai trong vòng 1 phút và một câu hỏi trắc nghiệm nhiều lựa chọn trong vòng 1,5 phút thì họ có đủ thời gian để hoàn thành bài kiểm tra trong 45 phút không?

1.19. Hai địa điểm A và B cách nhau 200 km. Tại cùng một thời điểm, một xe ô tô đi từ A đến B, một xe máy đi từ B đến A và hai xe gặp nhau ở C cách A 120 km. Nếu xe máy khởi hành trước ô tô 1 giờ thì hai xe gặp nhau ở D cách C 24 km. Tìm tốc độ của mỗi xe.

ÔN TẬP CHƯƠNG 1

BÀI TẬP TỰ LUẬN

1.20. Giải các phương trình sau bằng cách đưa về dạng tích:

a) $x(2x-10)=4x(x-6)$; b) $4x+12=(x+3)(7-5x)$;

c) $(x^2+4x+4)-25=0$; d) $9x^2-6x+1=x^2$.

1.21. Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{2x-1}{x-5}+1=\dfrac{1}{x-5}$;

b) $2x-\dfrac{2x^2}{x+9}=\dfrac{4x}{x+9}+\dfrac{5}{9}$;

c) $\dfrac{x+3}{x+1}+\dfrac{x-4}{x-1}=2$;

d) $\dfrac{3x-2}{x+5}=\dfrac{6x+1}{2x-3}$.

1.22. Độ cao h (m) của một viên đá so với mực nước biển khi được ném từ đỉnh của một vách đá được tính bởi công thức $h=-5t^2+15t+20$, trong đó t (s) là thời gian kể từ lúc viên đá bắt đầu được ném. Khi nào viên đá đạt độ cao 20 m so với mực nước biển?

1.23. Một công ty sử dụng biểu thức $\dfrac{60(2n+1)}{n+1}$ (đơn vị: triệu đồng) để xác định tổng tiền lương của nhân viên A trong năm thứ n tại công ty. Trong năm thứ mấy thì tổng tiền lương của nhân viên A là 110 triệu đồng?

1.24. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng hoặc phương pháp thế:

a) $\begin{cases}3x+4y=8\\2x-5y=-10;\end{cases}$ b) $\begin{cases}9x-11y=6\\3x+y=4;\end{cases}$

c) $\begin{cases}-0{,}4x+0{,}5y=-6\\1{,}2x-1{,}8y=21;\end{cases}$ d) $\begin{cases}2x-6y=14\\-x+3y=-7.\end{cases}$

1.25. Một hợp kim chứa 25% kim loại đồng. Một hợp kim khác chứa 50% kim loại đồng. Cần dùng bao nhiêu gam hợp kim mỗi loại nêu trên để tạo ra 1 kg hợp kim chứa 45% kim loại đồng?

1.26. Xác định các hệ số x và y trong phương trình phản ứng hoá học (đã cân bằng) sau:

$$3Cl_2 + 6NaOH \rightarrow xNaCl + yNaClO_3 + 3H_2O.$$

1.27. Một công ty thiết kế nội thất sản xuất ra hai loại ghế là ghế bành và ghế dài từ hai loại nguyên liệu là gỗ và vải. Số đơn vị nguyên liệu cần dùng để tạo ra một chiếc ghế mỗi loại được cho trong bảng sau:

	Gỗ	Vải
Ghế bành	40	40
Ghế dài	30	20

Hỏi có bao nhiêu chiếc ghế mỗi loại được sản xuất nếu sử dụng hết 1 600 đơn vị gỗ và 1 400 đơn vị vải?

1.28. Điểm trung bình của một vận động viên bắn súng sau 100 lần bắn là 8,73 điểm. Kết quả cụ thể được ghi lại trong bảng sau, trong đó có 2 ô bị mờ không đọc được (đánh dấu ?):

Điểm số mỗi lần bắn	6	7	8	9	10
Số lần bắn	?	10	?	45	28

Hãy xác định các số trong hai ô đó.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1.29. Tổng các nghiệm của phương trình $(x-1)(2x-1) = (x-1)(x+2)$ là

A. 1. B. 2.

C. 3. D. 4.

1.30. Cho phương trình $4x^2 - 4x + 1 = x^2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm.

B. Phương trình đã cho có đúng một nghiệm.

C. Phương trình đã cho có vô số nghiệm.

D. Phương trình đã cho vô nghiệm.

1.31. Điều kiện xác định của phương trình $1 + \frac{2}{x-2} = \frac{3}{x+2}$ là

A. $x \neq 2$. B. $x \neq -2$.

C. $x \neq 2$ và $x \neq -2$. D. $x \neq 2$ hoặc $x \neq -2$.

1.32. Phương trình $\frac{x+3}{x-3}-\frac{x-3}{x+3}=\frac{x}{x^2-9}$ có một nghiệm duy nhất là

A. $x=-1$.
B. $x=0$.
C. $x=1$.
D. $x=2$.

1.33. Số nghiệm của phương trình $\frac{3}{(x-1)(x-2)}+\frac{2}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{(x-2)(x-3)}$ là

A. 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

1.34. Cho hệ phương trình $\begin{cases}3x+y=-4\\6x+2y=-8\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hệ phương trình trên có đúng một nghiệm.
B. Hệ phương trình trên vô nghiệm.
C. Hệ phương trình trên có vô số nghiệm $(x; y)$ với $x \in \mathbb{R}$ và $y \in \mathbb{R}$.
D. Hệ phương trình trên có vô số nghiệm $(x; y)$ với $x \in \mathbb{R}$ và $y=-3x-4$.

1.35. Đồ thị của hàm số $y=mx+n$ đi qua hai điểm $A(2; 3)$ và $B(1; -1)$ nếu

A. $m=1$ và $n=1$.
B. $m=2$ và $n=-1$.
C. $m=4$ và $n=-5$.
D. $m=-2$ và $n=1$.

1.36. Phương trình $(3a+4b+1)x=a+3b-3$ có vô số nghiệm $x \in \mathbb{R}$ khi

A. $a=1$ và $b=-1$.
B. $a=-3$ và $b=2$.
C. $a=5$ và $b=-4$.
D. $a=-7$ và $b=5$.

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Tìm hiểu các bài toán dân gian bằng thơ gắn với hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Mục tiêu:

- Khám phá một số bài toán dân gian bằng thơ gắn với hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn;
- Vận dụng được cách giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn để giải các bài toán đó.

Yêu cầu chuẩn bị:

- Bút chì, bút mực, máy tính cầm tay;
- Giấy A3 có hai bài toán dân gian bằng thơ gắn với hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

Tổ chức hoạt động:

- Lớp học chia thành nhiều nhóm, mỗi nhóm có 4 – 5 học sinh.

HOẠT ĐỘNG 1

Tìm hiểu một số bài toán dân gian bằng thơ gắn với hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

- Giáo viên phát cho các nhóm các tờ giấy A3 (có nội dung như nhau) chứa hai bài toán dân gian bằng thơ gắn với hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

  Ví dụ minh hoạ:

  1. *Quýt ngon mỗi quả chia ba*
  Cam ngon mỗi quả bổ ra làm mười
  Mỗi người một miếng chia đều
  Bổ mười bảy quả trăm người đủ chia

  Hỏi có bao nhiêu quả cam, bao nhiêu quả quýt?

  2. *Vừa gà vừa chó*
  Bó lại cho tròn
  Ba mươi sáu con
  Một trăm chân chẵn

  Hỏi số gà và số chó trong bài toán trên bằng bao nhiêu?

- Mỗi nhóm vận dụng các bước giải bài toán bằng cách lập hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn để viết lời giải của những bài toán trên giấy A3 được phát.
- Với mỗi bài toán đã cho, giáo viên mời 1 nhóm thuyết trình trước lớp lời giải của bài toán. Các nhóm khác thảo luận về tính chính xác của những lời giải đó.

HOẠT ĐỘNG 2

Khám phá thêm các bài toán dân gian bằng thơ gắn với hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

- Mỗi nhóm sưu tầm và giải các bài toán dân gian bằng thơ tương tự trên Internet, sách, báo,…
- Trong tiết học thực hành và trải nghiệm tiếp theo, giáo viên sẽ mời từng nhóm báo cáo trước lớp về những bài toán sưu tầm được và trình bày lời giải cho một bài toán mà nhóm thấy thú vị nhất.

Chương 2 Bất đẳng thức. Bất phương trình bậc nhất một ẩn

Một trong những điểm đặc biệt hấp dẫn của công viên giải trí là các trò chơi cảm giác mạnh. Tuy nhiên đối với một số trò chơi, người chơi phải đáp ứng yêu cầu về chiều cao hay trọng lượng tối thiểu hoặc tối đa theo quy định. Đó là một ví dụ đơn giản về sự hiện diện của bất đẳng thức trong đời sống hằng ngày.

Cùng với bất đẳng thức, bất phương trình bậc nhất một ẩn có thể được sử dụng để giải quyết nhiều tình huống trong thực tiễn, như tìm thời gian tối thiểu t để đi một quãng đường S với vận tốc trung bình v, hay tính toán lợi nhuận, dự trù kế hoạch kinh doanh,…

Cùng tìm hiểu

- Khái niệm bất đẳng thức và một số tính chất cơ bản của bất đẳng thức;
- Khái niệm và cách giải bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Bài 1 BẤT ĐẲNG THỨC

Từ khoá: bất đẳng thức, tính chất của bất đẳng thức.

Bạn Hùng cho biết: *"Số tiền mình dùng để mua sách vở và các dụng cụ học tập chuẩn bị cho năm học mới chưa đến 500 nghìn đồng".*

Bạn Lan nói: *"Ngày Chủ nhật vừa qua mình đã đọc ít nhất là 60 trang sách truyện".*

Trong cuộc sống hằng ngày, ta thường xuyên gặp những thông báo tương tự. Bằng các kí hiệu toán học, ta có thể diễn đạt những thông báo đó như thế nào?

1 BẤT ĐẲNG THỨC

HOẠT ĐỘNG 1

Trong một thang máy có viết thông báo: "Tải trọng không vượt quá 1 000 kg".

a) Những tải trọng nào sau đây có thể được chấp nhận bởi thang máy này? Giải thích vì sao.

900 kg; 1 000 kg; 825 kg; 1 023 kg.

b) Gọi a là tải trọng mà thang máy cho phép. Hỏi a có thể nhận những giá trị nào?

Khi so sánh hai số thực a, b bất kì, luôn xảy ra một trong ba trường hợp sau:

- Số a bằng số b, kí hiệu $a = b$;
- Số a lớn hơn số b, kí hiệu $a > b$;
- Số a nhỏ hơn số b, kí hiệu $a < b$.

Nếu số a không lớn hơn số b thì phải có hoặc $a < b$, hoặc $a = b$. Khi đó, ta nói gọn là *a nhỏ hơn hoặc bằng b* và kí hiệu $a \leq b$. Nếu số a không nhỏ hơn số b thì phải có hoặc $a > b$, hoặc $a = b$. Khi đó, ta nói là *a lớn hơn hoặc bằng b* và kí hiệu $a \geq b$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa:

Hệ thức dạng $a < b$ (hay $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$) được gọi là *bất đẳng thức*. Khi đó a được gọi là *vế trái* và b được gọi là *vế phải* của bất đẳng thức.

Lưu ý:

- Bất đẳng thức $a > b$ còn được viết là $b < a$.
- Nếu đồng thời có hai bất đẳng thức $a > b$ và $a < c$ thì ta viết gộp lại thành $b < a < c$ (đọc là a lớn hơn b, nhỏ hơn c).

- Hai bất đẳng thức $a > b$ và $c > d$ (hay $a \geq b$ và $c \geq d$) được gọi là hai bất đẳng thức cùng chiều.
- Hai bất đẳng thức $a > b$ và $c < d$ (hay $a \geq b$ và $c \leq d$) được gọi là hai bất đẳng thức ngược chiều.

VÍ DỤ 1

a) Cho hai ví dụ về bất đẳng thức.

b) Viết bất đẳng thức mô tả khẳng định "số a không lớn hơn -3". Xác định vế trái và vế phải của bất đẳng thức đó.

c) Cho một ví dụ về hai bất đẳng thức cùng chiều và một ví dụ về hai bất đẳng thức ngược chiều.

Bài giải

a) $-1 < 0$, $-2 \geq -4$.

b) Số a không lớn hơn -3, nghĩa là $a \leq -3$.
Bất đẳng thức này có a là vế trái, -3 là vế phải.

c) $5 > 1$ và $7 > 4$ là hai bất đẳng thức cùng chiều.
$4 \geq 2\sqrt{3}$ và $\pi + 1 \leq 2\sqrt{5}$ là hai bất đẳng thức ngược chiều.

LUYỆN TẬP 1

Chỉ ra các bất đẳng thức trong những hệ thức sau:

$1{,}5 > \sqrt{2}$; $\quad \frac{3}{4} = 0{,}75$; $\quad 100 < 5^3$;

$2.3^2 = 3.6$; $\quad 2\pi \geq 6$; $\quad 5 + (-4) \leq 2$.

VẬN DỤNG 1

Trở lại với câu hỏi ở đầu bài. Gọi a (nghìn đồng) là số tiền bạn Hùng đã dùng để mua sách vở và dụng cụ học tập, b là số trang sách mà bạn Lan đã đọc trong ngày Chủ nhật. Hãy viết các bất đẳng thức diễn đạt thông báo của hai bạn Hùng và Lan.

VẬN DỤNG 2

Trong công viên giải trí X có những trò chơi dành riêng cho trẻ em ở độ tuổi theo quy định. Dưới đây là biển thông báo đối với các trò chơi A, B, C, D:

A	B	C	D
Dành cho trẻ em dưới 12 tuổi	Dành cho trẻ em từ 12 tuổi trở lên	Cấm trẻ em từ 12 tuổi trở xuống	Cấm trẻ em trên 12 tuổi

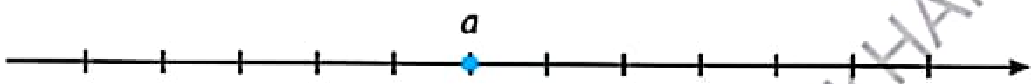
Gọi m là tuổi (tính tròn năm) của một trẻ em vào chơi công viên. Đối với mỗi thông báo, hãy viết bất đẳng thức mô tả điều kiện của m để bạn đó được phép tham gia trò chơi.

2 LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP CỘNG

HOẠT ĐỘNG 2

a) Tết trồng cây năm ngoái, chi đoàn Hải Bình trồng được a cây, chi đoàn Tân Phú trồng được b cây, ít hơn so với chi đoàn Hải Bình. Viết bất đẳng thức so sánh a và b.

b) Số cây do chi đoàn Hải Bình trồng năm ngoái được biểu diễn bằng một điểm màu xanh trên trục số ở *Hình 2.1* (mỗi khoảng cách ứng với 1 đơn vị). Hãy vẽ lại *Hình 2.1* và biểu diễn b trên trục số bằng một điểm màu xanh khác, biết rằng năm ngoái chi đoàn Tân Phú trồng được ít hơn 4 cây so với chi đoàn Hải Bình.



Hình 2.1

c) Năm nay mỗi chi đoàn đều trồng được nhiều hơn 3 cây so với năm ngoái. Dùng các điểm màu đỏ để biểu diễn số cây mỗi chi đoàn trồng được năm nay trên trục số vẽ ở câu b. Dựa vào trục số, viết bất đẳng thức so sánh số cây mà hai chi đoàn trồng được năm nay.

Kết quả của Hoạt động 2 cho thấy, nếu mỗi chi đoàn đều trồng thêm được 3 cây thì tổng số cây mà chi đoàn Hải Bình trồng năm nay vẫn nhiều hơn tổng số cây của chi đoàn Tân Phú.

Tổng quát, người ta chứng minh được tính chất sau:

Tính chất 1

Với ba số a, b, c, ta có:

Nếu $a < b$ thì $a + c < b + c$;　　Nếu $a \leq b$ thì $a + c \leq b + c$;

Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$;　　Nếu $a \geq b$ thì $a + c \geq b + c$.

Khi cộng cùng một số vào hai vế của bất đẳng thức, ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức ban đầu.

Lưu ý:

Tính chất trên vẫn đúng khi ta trừ vào hai vế của bất đẳng thức với cùng một số. Chẳng hạn, nếu $a < b$ thì $a - c < b - c$.

Ta có thể sử dụng tính chất trên để so sánh hai số hoặc chứng minh một bất đẳng thức.

VÍ DỤ 2

a) Không thực hiện phép tính, hãy so sánh:

$2\,000 + \sqrt{2}$ và $2\,023 + \sqrt{2}$; $\pi - \dfrac{2\,000}{2\,001}$ và $3 - \dfrac{2\,000}{2\,001}$.

b) Cho x và y là hai số thực, trong đó $x > y$. Bạn An khẳng định là $x + 1{,}3 > y + 1{,}3$. Khẳng định của bạn An đúng hay sai? Vì sao?

Bài giải

a) Ta biết rằng $2\,000 < 2\,023$. Cộng $\sqrt{2}$ vào hai vế của bất đẳng thức này, ta được bất đẳng thức cùng chiều, nghĩa là:

$$2\,000 + \sqrt{2} < 2\,023 + \sqrt{2}.$$

Ta có $\pi > 3$. Trừ hai vế của bất đẳng thức này cho $\dfrac{2\,000}{2\,001}$, ta được bất đẳng thức cùng chiều dưới đây:

$$\pi - \frac{2\,000}{2\,001} > 3 - \frac{2\,000}{2\,001}.$$

b) Cộng 1,3 vào hai vế của bất đẳng thức $x > y$, ta được một bất đẳng thức cùng chiều, nghĩa là $x + 1{,}3 > y + 1{,}3$. Vậy khẳng định của bạn An đúng.

LUYỆN TẬP 2

a) Biết rằng $a + 12{,}5 > b + 12{,}5$. Hãy so sánh a và b.

b) Cho biết $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$. Chứng minh rằng $-5{,}6 < \sqrt{2} - 7 < -5{,}5$.

VẬN DỤNG 3

So sánh $x^2 + 25$ và 25, với x là số thực tuỳ ý.

3 LIÊN HỆ GIỮA THỨ TỰ VÀ PHÉP NHÂN

a) Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân với số dương

HOẠT ĐỘNG 3

Chọn dấu thích hợp (>, <) cho từng ô $\boxed{?}$. Trong mỗi trường hợp, có nhận xét gì về chiều của bất đẳng thức thu được với chiều của bất đẳng thức cho ở dòng ngay phía trên?

a) $2 < 5$

$2 . 4 \boxed{?} 5 . 4$; $2 . 7 \boxed{?} 5 . 7$.

b) $-3 < 1$

$-3 . 8 \boxed{?} 1 . 8$; $-3 . 2 \boxed{?} 1 . 2$.

c) $-1 > -4$

$-1 . 12 \boxed{?} -4 . 12$; $-1 . 5 \boxed{?} -4 . 5$.

Trong Hoạt động 3, ta thấy các bất đẳng thức thu được đều cùng chiều với bất đẳng thức cho ban đầu. Tổng quát, người ta chứng minh được tính chất sau:

Tính chất 2

Với ba số a, b, c bất kì, trong đó $c > 0$, ta có:

Nếu $a < b$ thì $a.c < b.c$; Nếu $a \le b$ thì $a.c \le b.c$;

Nếu $a > b$ thì $a.c > b.c$; Nếu $a \ge b$ thì $a.c \ge b.c$.

Khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức với cùng một số dương, ta được bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức ban đầu.

Lưu ý:

Tính chất trên vẫn đúng khi ta chia cả hai vế của bất đẳng thức cho cùng một số dương.

Chẳng hạn, nếu $a < b$ thì $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ với c là số dương bất kì.

VÍ DỤ 3

Không thực hiện phép tính, hãy so sánh các biểu thức:

a) $-2{,}17 . 62{,}5$ và $-2{,}25 . 62{,}5$;

b) $12{,}31^3 . \pi$ và $12{,}31^3 . 4$;

c) $\frac{152}{3\,213}$ và $\frac{170}{3\,213}$.

Bài giải

a) Vì $-2{,}17 > -2{,}25$ nên nhân hai vế của bất đẳng thức với số $62{,}5 > 0$, ta được:

$$-2{,}17 . 62{,}5 > -2{,}25 . 62{,}5.$$

b) Ta biết rằng $\pi < 4$. Nhân $12{,}31^3$ vào hai vế của bất đẳng thức này, ta được:

$$12{,}31^3 . \pi < 12{,}31^3 . 4.$$

c) Xuất phát từ bất đẳng thức $152 < 170$, chia hai vế cho 3 213, ta được:

$$\frac{152}{3\,213} < \frac{170}{3\,213}.$$

LUYỆN TẬP 3

Không thực hiện phép tính, hãy sắp các số sau theo thứ tự từ nhỏ đến lớn:

$$4\sqrt{3}, 4\sqrt{2}, 4\sqrt{5}, 8.$$

VẬN DỤNG 4

Bác Lâm muốn rào xung quanh mảnh vườn hình chữ nhật có số đo chiều rộng là a (m). Chiều dài dài hơn chiều rộng 3 m. Bác Lâm ước lượng là $a < 15$. Bác có tấm lưới dài khoảng 70 m. Tấm lưới này có đủ dài để bác Lâm rào vườn không? Giải thích vì sao.

b) Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân với số âm

HOẠT ĐỘNG 4

a) Xét bất đẳng thức $6 < 11$. Nhân hai vế của bất đẳng thức với -4 và so sánh các kết quả, ta được bất đẳng thức nào?

b) Xét bất đẳng thức $-4 < 2$. Nhân hai vế của bất đẳng thức với -7 và so sánh các kết quả, ta được bất đẳng thức nào?

c) Xét bất đẳng thức $-3 > -5$. Nhân hai vế của bất đẳng thức với -12 và so sánh các kết quả, ta được bất đẳng thức nào?

Trong mỗi trường hợp, bất đẳng thức thu được sau khi nhân có cùng chiều với bất đẳng thức ban đầu hay không?

Trong Hoạt động 4, các bất đẳng thức thu được đều ngược chiều với bất đẳng thức ban đầu. Tổng quát, người ta chứng minh được tính chất sau:

Tính chất 3

Với ba số a, b, c bất kì, trong đó $c < 0$, ta có:

Nếu $a < b$ thì $a.c > b.c$; Nếu $a \leq b$ thì $a.c \geq b.c$;

Nếu $a > b$ thì $a.c < b.c$; Nếu $a \geq b$ thì $a.c \leq b.c$.

Khi nhân cả hai vế của bất đẳng thức với cùng một số âm, ta được bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức ban đầu.

Lưu ý:

Tính chất trên vẫn đúng khi ta chia cả hai vế của bất đẳng thức cho cùng một số âm. Chẳng hạn, nếu $a < b$ thì $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ với c là số âm bất kì.

VÍ DỤ 4

Cho hai số thực x, y, trong đó $x < y$. Chọn kí hiệu phù hợp (trong các kí hiệu >, <) cho mỗi ô $\boxed{?}$ dưới đây và giải thích vì sao.

$-x \boxed{?} -y$; $2x \boxed{?} 2y$; $-\frac{x}{5} \boxed{?} -\frac{y}{5}$.

Bài giải

Theo giả thiết: $x < y$. (1)

Từ bất đẳng thức (1), suy ra:

- $-x > -y$; (Do nhân hai vế của bất đẳng thức (1) với một số âm là -1)
- $2x < 2y$; (Do nhân hai vế của bất đẳng thức (1) với một số dương là 2)
- $-\frac{x}{5} > -\frac{y}{5}$. (Do chia hai vế của bất đẳng thức (1) cho một số âm là -5)

LUYỆN TẬP 4

Cho $-5m \geq -5n$. Hãy so sánh:

a) m và n;

b) $1 - 2m$ và $1 - 2n$.

4 TÍNH CHẤT BẮC CẦU CỦA THỨ TỰ

HOẠT ĐỘNG 5

a) Trong một mùa thi đấu giải vô địch bóng đá quốc gia, đội A ghi được ít bàn thắng hơn đội B, đội B lại ghi được ít bàn thắng hơn đội C. Gọi a, b, c lần lượt là số bàn thắng của đội A, B, C. Viết các bất đẳng thức biểu thị quan hệ thứ tự giữa a và b, giữa b và c.

b) *Hình 2.2* cho biết biểu diễn của a trên trục số.

Hình 2.2

Hãy biểu diễn b và c trên trục số. So sánh số bàn thắng của các đội A và C.

Tổng quát hoá kết quả thu được từ Hoạt động 5, ta có tính chất:

Tính chất 4

Nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$. Tính chất này gọi là *tính chất bắc cầu của thứ tự*.

Tính chất bắc cầu cũng đúng với các thứ tự lớn hơn (>), lớn hơn hoặc bằng (≥), nhỏ hơn hoặc bằng (≤).

VÍ DỤ 5

Cho $a < b$. Hãy so sánh $2a + 5$ và $2b + 7$.

Bài giải

Theo giả thiết thì $a < b$. Nhân 2 vào hai vế của bất đẳng thức, ta có $2a < 2b$. (1)

Cộng 5 vào hai vế của bất đẳng thức (1), ta được $2a + 5 < 2b + 5$. (2)

Mặt khác, vì $5 < 7$ nên $2b + 5 < 2b + 7$. (3)

Từ (2) và (3), sử dụng tính chất bắc cầu, suy ra $2a + 5 < 2b + 7$.

LUYỆN TẬP 5

Cho $x \geq y$. Chứng minh rằng $0,8x + 1 \geq 0,8y - 1$.

Lưu ý:

Các tính chất của thứ tự cũng chính là tính chất của bất đẳng thức.

BÀI TẬP

2.1. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

a) $-4+7>5$;

b) $-12 \le -3.4$;

c) $135+(-87)<150+(-87)$.

2.2. Chép lại bảng bên và điền vào những ô có dấu "?" trong bảng đó để ô bên trái và bên phải của bảng biểu diễn cùng một thông tin.

Bất đẳng thức	Diễn đạt bằng lời
$m>-2$	m lớn hơn âm 2
$a \ge 5$	?
?	s không lớn hơn 1
$x<-2$	?
?	r dương
?	b không âm

2.3. Dưới đây là hình ảnh của hai biển báo tốc độ giao thông (đơn vị: km/h) dành cho ô tô, máy kéo, mô tô.

Hình ảnh		
Ý nghĩa	Tốc độ tối đa cho phép là 50 km/h	Tốc độ tối thiểu cho phép là 30 km/h

Gọi v (km/h) là tốc độ lưu thông của các phương tiện đó khi đi trên đoạn đường có một trong hai biển báo trên. Hãy dùng các bất đẳng thức để mô tả điều kiện của v theo quy định thể hiện trên mỗi biển báo.

2.4. Không thực hiện phép tính, hãy so sánh:

a) $2+28{,}5.6$ và $3+28{,}5.6$;

b) $30\sqrt{2}-2\,022$ và $30\pi-2\,022$;

c) $35-3\sqrt{3}$ và $36-3\sqrt{2}$.

2.5. Cho $a \le b$. Hãy so sánh:

a) $\sqrt{2}-3a$ và $\sqrt{2}-3b$;

b) $20a-5$ và $20b-5$.

2.6. So sánh x và y nếu:

a) $2x-3>2y-3$;

b) $-3x+4 \ge -3y+4$.

2.7. Cho x và y là hai số thực tuỳ ý, trong đó $x<y$. Chứng minh rằng $5-2x>3-2y$.

2.8. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai? Vì sao?

a) $-3x^2 \le 0$ với mọi số thực x;

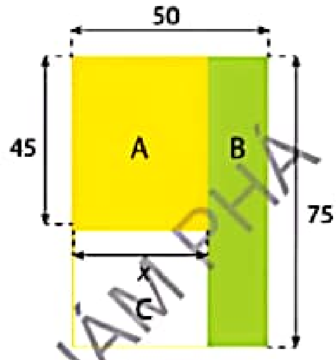
b) Vì $5>-3$ nên $\frac{5}{a}>-\frac{3}{a}$ với mọi số thực $a \ne 0$.

2.9. Hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Biết rằng chiều rộng của hình chữ nhật lớn hơn 5 cm. Bạn Mai kết luận là chu vi của hình chữ nhật lớn hơn 30 cm. Phát biểu của bạn Mai có đúng không? Vì sao?

Bài 2 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Từ khoá: bất phương trình, nghiệm của bất phương trình, bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Chủ đầu tư khu chung cư Vạn Xuân muốn quy hoạch khu đất hình chữ nhật kích thước 50 m × 75 m giữa các toà nhà bằng cách chia nó thành ba hình chữ nhật nhỏ A, B, C như *Hình 2.3*. Phần A dùng để làm sân tập luyện thể thao (có thể chơi bóng rổ, bóng chuyền), phần B dành để trồng cây xanh và phần C là nơi đặt cầu trượt, bập bênh cho trẻ em. Chủ đầu tư muốn chia khu đất sao cho diện tích hình A không nhỏ hơn diện tích hình B. Vậy cạnh x của hình A phải dài tối thiểu là bao nhiêu mét?



Hình 2.3

1 MỞ ĐẦU VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

a) Bất phương trình

HOẠT ĐỘNG 1

Xét bản thiết kế của chủ đầu tư khu chung cư Vạn Xuân.

a) Viết biểu thức tính diện tích hình chữ nhật A và biểu thức tính diện tích hình chữ nhật B.

b) Viết điều kiện mà số dương x cần thoả mãn để diện tích hình A không nhỏ hơn diện tích hình B.

Biểu thức thu được ở trên được gọi là một bất phương trình. Tổng quát, ta có định nghĩa:

Cho $A(x)$, $B(x)$ là hai biểu thức của biến x. Khi cần tìm x sao cho $A(x) > B(x)$ (hoặc $A(x) < B(x)$, $A(x) \geq B(x)$, $A(x) \leq B(x)$) thì ta nói $A(x) > B(x)$ (hoặc $A(x) < B(x)$, $A(x) \geq B(x)$, $A(x) \leq B(x)$) là một *bất phương trình* ẩn x. $A(x)$ và $B(x)$ lần lượt được gọi là vế trái và vế phải của bất phương trình.

VÍ DỤ 1

$x^2 - 3 \geq -2x$; $x + 1 < 0$ là những bất phương trình ẩn x.

$t - 5 > 2$; $2t + 1 \leq 1 - t$ là những bất phương trình ẩn t.

LUYỆN TẬP 1

Cho một ví dụ về bất phương trình ẩn u. Chỉ rõ vế trái và vế phải của bất phương trình đó.

b) Nghiệm của bất phương trình

HOẠT ĐỘNG 2

Cho bất phương trình $x^2 < 2x + 3$.

a) Khi thay $x = 1$ vào hai vế của bất phương trình, ta được một khẳng định đúng hay sai?

b) Khi thay $x = 5$ vào hai vế của bất phương trình, ta được một khẳng định đúng hay sai?

Trong Hoạt động trên, giá trị $x = 1$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình đã cho. Tổng quát, ta có định nghĩa:

Khi thay giá trị $x = x_0$ vào hai vế của một bất phương trình ẩn x mà được một khẳng định đúng thì ta nói $x = x_0$ (hay x_0) là một *nghiệm của bất phương trình* đó.

VÍ DỤ 2

Trong các số sau, số nào là một nghiệm của bất phương trình $14 - x > 2x - 13$?

a) $x = 4$; b) $x = 7$; c) $x = 12$.

Bài giải

a) Thay $x = 4$ vào hai vế của bất phương trình $14 - x > 2x - 13$, ta có $10 > -5$.
Đây là một khẳng định đúng.
Vậy $x = 4$ là một nghiệm của bất phương trình.

b) Thay $x = 7$ vào hai vế của bất phương trình trên, ta có $7 > 1$.
Đây là một khẳng định đúng.
Vậy $x = 7$ cũng là một nghiệm của bất phương trình.

c) Thay $x = 12$ vào hai vế của bất phương trình trên, ta có $2 > 11$.
Đây là một khẳng định sai.
Vậy $x = 12$ không phải là một nghiệm của bất phương trình.

LUYỆN TẬP 2

$x = -2$ là một nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình sau?

a) $x(x - 1) < x + 2$; b) $x^2 - 2 > 0$.

2 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

HOẠT ĐỘNG 3

Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào có vế trái là đa thức bậc nhất một ẩn?

$3x - 8 < 0$; $5x^3 - 1 > 0$;

$0{,}5t - 4 \geq 0$; $3 - 2y \leq 0$;

$\dfrac{1}{t+1} - \dfrac{1}{2t} > 0$; $x^2 - 1 < 0$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

Bất phương trình có dạng $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$), trong đó a, b là các số đã cho, $a \neq 0$, được gọi là *bất phương trình bậc nhất một ẩn (x là ẩn).*

VÍ DỤ 3

Trong các bất phương trình sau, đâu là bất phương trình bậc nhất một ẩn?

a) $5x - 12 < 0$; b) $x^3 - 2x \geq 0$;

c) $0.x + 4 > 0$; d) $0{,}5u - 3 \leq 0$.

Bài giải

a) $5x - 12 < 0$ là một bất phương trình bậc nhất một ẩn (ẩn x).

b) Bất phương trình $x^3 - 2x \geq 0$ có vế trái là đa thức bậc 3 của ẩn x nên không phải là bất phương trình bậc nhất.

c) Bất phương trình $0.x + 4 > 0$ có hệ số của ẩn là $a = 0$ nên không phải là bất phương trình bậc nhất.

d) $0{,}5u - 3 \leq 0$ là một bất phương trình bậc nhất một ẩn (ẩn u).

LUYỆN TẬP 3

Hãy chỉ ra các bất phương trình bậc nhất một ẩn trong các bất phương trình sau. Cho biết hệ số của ẩn trong mỗi bất phương trình bậc nhất một ẩn đó.

a) $t - 1 < 0$; b) $x^2 - 2 \geq 0$;

c) $\dfrac{t+1}{t+2} < 0$; d) $2y \geq 0$.

3 CÁCH GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Giải một bất phương trình nghĩa là tìm tất cả các nghiệm của nó.

HOẠT ĐỘNG 4

Cho bất phương trình $3x + 9 > 0$.

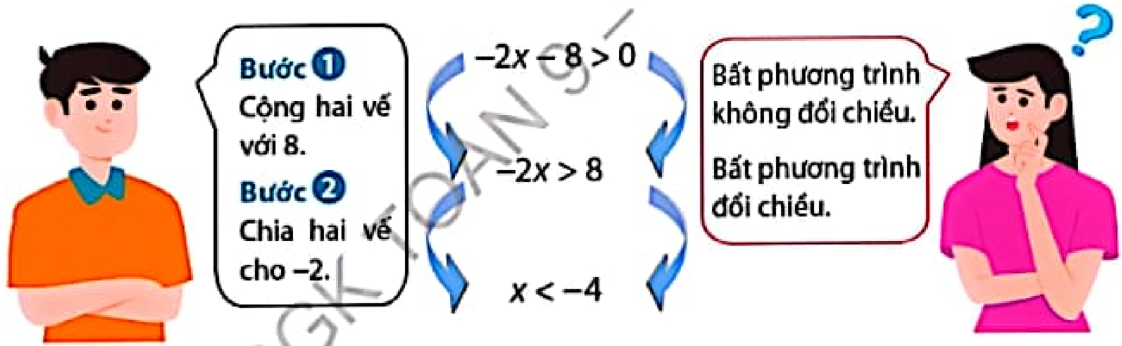
a) Để vế trái của bất phương trình chỉ còn $3x$, ta cộng vào hai vế số nào? Viết bất phương trình thu được sau khi cộng với số đó.

b) Từ bất phương trình thu được ở câu a, làm thế nào để có một bất phương trình mà hệ số của ẩn bằng 1? Đó là bất phương trình nào?

Hoạt động 4 chính là hoạt động giải bất phương trình $3x + 9 > 0$. Nghiệm của bất phương trình là tất cả những giá trị của x thoả mãn điều kiện $x > -3$. Người ta nói rằng nghiệm của bất phương trình này là $x > -3$.

HOẠT ĐỘNG 5

Hai bạn Trung và Mai thảo luận về hoạt động giải bất phương trình $-2x - 8 > 0$.



Bạn Mai hỏi bạn Trung: "Tại sao ở bước biến đổi thứ nhất, bất phương trình không đổi chiều? Còn ở bước biến đổi thứ hai thì bất phương trình lại đổi chiều?".
Em hãy giúp bạn Trung giải đáp thắc mắc của bạn Mai.

Để giải bất phương trình $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$), trong đó $a \neq 0$, ta thực hiện ba bước sau:

Bước 1 Cộng $-b$ vào hai vế và giữ nguyên chiều của bất phương trình ban đầu.

Bước 2 Chia hai vế của bất phương trình thu được ở Bước 1 cho số $a \neq 0$ theo quy tắc:

- Nếu $a > 0$ thì giữ nguyên chiều của bất phương trình;
- Nếu $a < 0$ thì đổi chiều của bất phương trình.

Bước 3 Kết luận nghiệm của bất phương trình.

VÍ DỤ 4

Giải các bất phương trình sau:

a) $8x - 5 > 0$;

b) $-2x + 6 \leq 0$.

Bài giải

a) $8x - 5 > 0$

$8x > 5$ (Cộng 5 vào hai vế, giữ nguyên chiều của bất phương trình)

$8x : 8 > 5 : 8$ (Chia hai vế cho 8, giữ nguyên chiều của bất phương trình)

$x > \frac{5}{8}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{5}{8}$.

b) $-2x + 6 \leq 0$

$-2x \leq -6$ (Cộng -6 vào hai vế, giữ nguyên chiều của bất phương trình)

$-2x : (-2) \geq -6 : (-2)$ (Chia hai vế cho -2, đổi chiều của bất phương trình)

$x \geq 3$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \geq 3$.

LUYỆN TẬP 4

Giải các bất phương trình sau:

a) $4x - 9 \geq 0$;

b) $0{,}3 - 0{,}2x < 0$.

Lưu ý:

Ở Bước 1, ta đã thực hiện quy tắc sau, gọi là *quy tắc chuyển vế*: *Khi chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia, ta phải đổi dấu hạng tử đó.*

Quy tắc thực hiện ở Bước 2 gọi là *quy tắc nhân với một số*: *Khi nhân hai vế của bất phương trình với cùng một số khác 0, ta phải:*

- *Giữ nguyên chiều bất phương trình nếu số đó dương;*
- *Đổi chiều bất phương trình nếu số đó âm.*

Nhờ hai quy tắc này, ta có thể giải được nhiều bất phương trình phức tạp hơn.

VÍ DỤ 5

Giải bất phương trình:

a) $\frac{2}{9}x - 2 < \frac{1}{3}$;

b) $3x - 4 > 8x + 2$;

c) $2x + 7 < 2x + 5$.

Bài giải

a) $\frac{2}{9}x - 2 < \frac{1}{3}$

$\frac{2}{9}x < 2 + \frac{1}{3}$ (Chuyển −2 sang vế phải và đổi dấu)

$\frac{2}{9}x < \frac{7}{3}$ (Rút gọn vế phải)

$\frac{9}{2} \cdot \frac{2}{9}x < \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{3}$ (Chia hai vế cho $\frac{2}{9}$, tức là nhân với $\frac{9}{2}$, giữ nguyên chiều của bất phương trình)

$x < \frac{21}{2}$.

Nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < \frac{21}{2}$, hay $x < 10,5$.

b) $3x - 4 > 8x + 2$

$3x - 8x > 2 + 4$ (Chuyển $8x$ sang vế trái và −4 sang vế phải. Đổi dấu các hạng tử khi chuyển vế)

$-5x > 6$ (Rút gọn hai vế)

$x < \frac{6}{-5}$. (Chia hai vế cho −5 và đổi chiều bất phương trình)

Nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < -\frac{6}{5}$, nghĩa là $x < -1,2$.

c) $2x + 7 < 2x + 5$

$2x - 2x < -7 + 5$ (Sử dụng quy tắc chuyển vế)

$0x < -2$.

Không có số thực nào thoả mãn điều kiện $0x < -2$. Ta nói là bất phương trình vô nghiệm.

LUYỆN TẬP 5

Giải các bất phương trình:

a) $-3x - 2 > 4x + 7$;

b) $\frac{7}{3}x - 3 \leq 1 - 4x$.

Lưu ý:

Để lời giải một bất phương trình được trình bày ngắn gọn, nhiều khi ta không cần giải thích đã áp dụng quy tắc nào.

VÍ DỤ 6

Bạn Dũng tham gia học tiếng Anh ở một trung tâm ngoại ngữ. Qua hai bài kiểm tra của khoá học, bạn đã đạt lần lượt 60 và 67 điểm (thang điểm 100). Bạn phấn đấu đạt điểm trung bình ít nhất là 70 sau ba lần kiểm tra. Để có kết quả này, ở lần kiểm tra thứ ba, bạn Dũng phải được ít nhất bao nhiêu điểm?

Bài giải

Gọi x là số điểm của bạn Dũng ở lần kiểm tra thứ ba.

Vì thang điểm là 100 nên $0 \le x \le 100$.

Theo mong muốn của bạn Dũng thì x phải thoả mãn điều kiện $\frac{60+67+x}{3} \ge 70$.

Đây là một bất phương trình ẩn x. Giải bất phương trình để tìm x. Ta có:

$\frac{60+67+x}{3} \ge 70$

$127 + x \ge 210$

$x \ge 210 - 127$

$x \ge 83$.

Kết hợp với điều kiện $0 \le x \le 100$, ta suy ra nghiệm của bất phương trình là $83 \le x \le 100$. Như vậy số điểm ít nhất bạn Dũng cần phải đạt được trong kì kiểm tra thứ ba là 83.

LUYỆN TẬP 6

Bác sĩ khuyên cô Vân mỗi ngày ăn không quá 60 gam chất béo. Hôm nay, theo tính toán của cô Vân về lượng chất béo đã ăn thì bữa điểm tâm sáng là 8 gam, bữa trưa là 31 gam. Nếu tuân thủ lời khuyên của bác sĩ thì cô Vân còn có thể ăn nhiều nhất là bao nhiêu gam chất béo trong thời gian còn lại của ngày?

VẬN DỤNG 1

Trở lại với bài toán nêu ở đầu bài học.

Hãy giúp chủ đầu tư khu chung cư Vạn Xuân xác định cạnh x của hình chữ nhật A.

VẬN DỤNG 2

Trò chơi chọn số

Cô giáo đưa ra hai cách tìm số mới từ một số x được chọn ngẫu nhiên.

Cách A: Lấy x nhân với 3, được bao nhiêu đem cộng thêm 50.

Cách B: Lấy x trừ đi 1, được bao nhiêu đem nhân với 5.

Có hai đội chơi: Đội chọn cách A gọi là đội A, đội chọn cách B gọi là đội B.

Luật chơi:

Đội đi trước được quyền chọn số. Sau khi thảo luận để chọn một giá trị của x, đội chọn số thông báo số đã chọn. Với số x đã được thông báo, mỗi đội sử dụng cách tính số của mình và cho biết kết quả.

Nếu kết quả của đội chọn số lớn hơn kết quả của đối thủ thì đội chọn số thắng và được quyền chọn tiếp một giá trị khác của x.

Trong trường hợp kết quả của đội chọn số nhỏ hơn hoặc bằng kết quả của đối thủ thì đội chọn số thua và phải nhường lượt chơi cho đối thủ.

Nếu đội A được quyền chọn số thì nên chọn như thế nào để đảm bảo thắng?

Nếu đội B được quyền chọn số thì nên chọn như thế nào để đảm bảo thắng?

BÀI TẬP

2.10. Hãy chỉ ra các bất phương trình bậc nhất một ẩn trong những bất phương trình sau:

a) $5x \leq 2$;

b) $t^2 + t > 1$;

c) $\frac{1}{x+1} > 0$;

d) $3u + 2 < 0$.

2.11. $x = -2{,}5$ là nghiệm của bất phương trình nào?

a) $3x - 5 < 2x - 8$;

b) $x - 1 \leq 5x + 9$;

c) $5x < 12$.

2.12. Giải bất phương trình:

a) $2x - 3 > 0$;

b) $3 - 4t > 0$;

c) $-7x + 9 \leq 0$;

d) $-x - 1 \geq 0$.

2.13. Giải bất phương trình:

a) $3x + 2 \leq 8$;

b) $2x - 5 < 4x + 7$;

c) $-0{,}4x + 3 < -1{,}2x + 5$;

d) $\frac{7}{3}u + 3 \geq 2u - 1$.

2.14. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy đưa ra hai cách khác nhau để trả lời câu hỏi dưới đây:

"Bất phương trình $2x - 3 < 5x + 3$ nhận số nào trong các số sau làm nghiệm: -3; $-2{,}55$; $-\frac{1}{7}$; $\frac{2}{3}$; $1{,}2$?".

Trong hai cách đó, cách nào đòi hỏi ít tính toán hơn?

2.15. Dưới đây là hai lời giải do hai bạn Mai và Bình đưa ra cho bài toán "Giải bất phương trình $-0{,}5x + 6 < 2x - 9$". Hãy tìm các sai lầm (nếu có) trong mỗi lời giải và giải thích vì sao.

- Lời giải của bạn Mai:

$-0{,}5x + 6 < 2x - 9$

$-0{,}5x - 2x > -9 - 6$

$-2{,}5x > -15$

$x < 6$.

- Lời giải của bạn Bình:

$-0{,}5x + 6 < 2x - 9$

$-0{,}5x - 2x < -9 - 6$

$-2{,}5x < -15$

$x < 6$.

2.16. Bạn Trung lấy một số nhân với 3 rồi cộng thêm 5 và có kết quả là số âm. Có thể nói gì về số bạn Trung đã chọn ban đầu?

2.17. Bạn Nam có 150 000 đồng. Nam đã mua hộp bút vẽ hết 45 000 đồng và mua sách hết 38 000 đồng. Nam định mua thêm vở. Mỗi quyển vở giá 8 500 đồng. Hỏi bạn Nam có thể mua nhiều nhất là bao nhiêu quyển vở?

2.18. Nhân dịp kỉ niệm 48 năm ngày thống nhất đất nước, nhà trường dự định tổ chức cho học sinh khối lớp 9 xem phim ở rạp Chiến Thắng. Rạp Chiến Thắng đề xuất hai phương án trả tiền vé như sau:

- Phương án 1: tính mỗi vé 50 nghìn đồng.
- Phương án 2: trả khoản phí ban đầu là 400 nghìn đồng rồi sau đó tính mỗi vé 45 nghìn đồng.

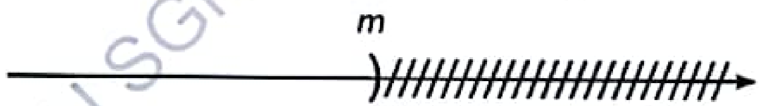
a) Nếu có 75 học sinh đăng kí xem phim thì nhà trường nên chọn phương án trả tiền nào?

b) Với bao nhiêu học sinh đăng kí thì nhà trường sẽ có lợi hơn nếu trả tiền theo phương án 2?

EM CÓ BIẾT

Tập hợp tất cả các nghiệm của một bất phương trình được gọi là tập nghiệm của bất phương trình đó. Để dễ hình dung tập nghiệm, người ta biểu diễn nó trên trục số.

- Nếu bất phương trình có nghiệm là $x < m$ thì tập nghiệm của nó chính là $\{x | x < m\}$. Tập nghiệm này được biểu diễn bởi *Hình 2.4a* dưới đây:



Hình 2.4a

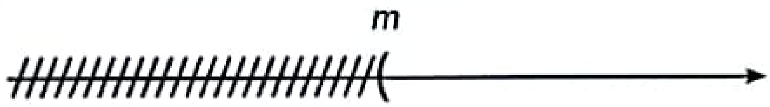
Trong *Hình 2.4a*, tất cả các điểm bên phải điểm m và điểm m đều bị gạch bỏ.

- Nếu bất phương trình có nghiệm là $x \le m$ thì tập nghiệm là $\{x | x \le m\}$. Người ta biểu diễn tập nghiệm này bởi *Hình 2.4b*:

Hình 2.4b

Trong trường hợp này, các điểm bên phải điểm m bị gạch bỏ, nhưng điểm m được giữ lại (vì giá trị m cũng thuộc tập nghiệm) và để thể hiện điều đó, người ta đánh dấu điểm m bằng kí hiệu "]".

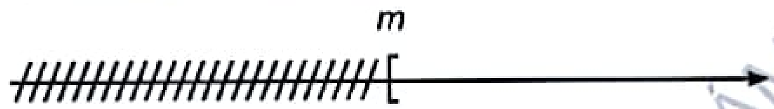
- Nếu bất phương trình có nghiệm là $x > m$ thì tập nghiệm của nó chính là $\{x|x > m\}$. Lúc này, tập nghiệm được biểu diễn bởi *Hình 2.4c*:



Hình 2.4c

Trong *Hình 2.4c*, tất cả các điểm bên trái m và điểm m đều bị gạch bỏ.

- Nếu bất phương trình có nghiệm là $x \geq m$ thì tập nghiệm là $\{x|x \geq m\}$. Người ta biểu diễn tập nghiệm này bởi *Hình 2.4d*:



Hình 2.4d

Ở đây thì giá trị m cũng thuộc tập nghiệm nên các điểm bên trái điểm m bị gạch bỏ nhưng điểm m được giữ lại. Điều đó được thể hiện bằng cách đánh dấu điểm m bởi kí hiệu "[".

Tóm lại, trên trục số:

- Tập nghiệm của một bất phương trình là những giá trị thuộc phần không bị gạch bỏ, tính cả những giá trị được đánh dấu bởi các kí hiệu "[", "]".
- Phần không phải là nghiệm bao gồm những giá trị bị gạch bỏ bằng dấu "/" và những giá trị được đánh dấu bởi các kí hiệu "(", ")".

ÔN TẬP CHƯƠNG 2

BÀI TẬP TỰ LUẬN

2.19. Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

a) $\widehat{B} + \widehat{C} > 90°$;

b) $\widehat{B} + \widehat{C} \geq 90°$;

c) $b + c \geq a$;

d) $b - c \leq a$.

2.20. Cho ba số thực x, y, z. Biết rằng $y \geq z$. Hãy so sánh mỗi cặp số sau và giải thích vì sao.

a) $y - 3$ và $z - 3$;

b) $-5y$ và $-5z$;

c) $\frac{y}{3}$ và $\frac{z}{3}$;

d) $x + 2y$ và $x + 2z$.

2.21. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai? Vì sao?

a) $x < x + 1$ với mọi số thực x;

b) $2x \geq x$ với mọi số thực $x \neq 0$.

2.22. Biết rằng $a < b$ và $c < d$. Hãy so sánh:

a) $a + c$ và $b + c$;

b) $b + c$ và $b + d$;

c) $a + c$ và $b + d$;

d) $a - c$ và $a - d$.

2.23. Cho bài toán: So sánh $-5m$ với 1 và -1, biết rằng $-\frac{1}{5} < m < \frac{1}{5}$.

Bạn Hà đã giải bài toán như sau:

Nhân -5 vào các vế của bất đẳng thức $-\frac{1}{5} < m < \frac{1}{5}$, ta có:

$(-5) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) < (-5).m < (-5) \cdot \frac{1}{5}$.

Suy ra $1 < -5m < -1$.

Tìm sai lầm (nếu có) trong lời giải của bạn Hà và giải thích vì sao.

2.24. Giải bất phương trình:

a) $4x - 7 \geq 0$;

b) $1 - 2x < 0$;

c) $-2x - 0,5 \leq 0$;

d) $\frac{3}{7}x - \frac{5}{14} > 0$.

2.25. Giải bất phương trình:

a) $2x - 1 < 7$;

b) $3 - 4x \geq 11$;

c) $\frac{2x - 5}{3} < -6$;

d) $\frac{x - 2}{-7} \geq 5$.

2.26. Giải bất phương trình:

a) $2(x+3) > (x-1)-(x-4)$;

b) $\frac{1}{4} - x \le -\frac{5}{12} - 2x$;

c) $\frac{2x+3}{4} > \frac{-x+6}{3}$;

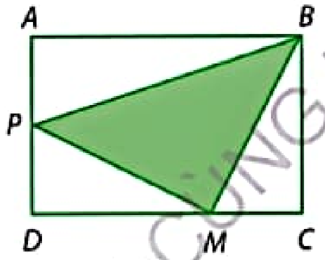
d) $\frac{x-1}{2} \le \frac{2x+5}{3}$.

2.27. Tìm x sao cho:

a) $2x-9$ là số không âm;

b) Giá trị của biểu thức $5x+4$ không lớn hơn giá trị của biểu thức $-(x+2)$.

2.28. *ABCD* là hình chữ nhật có chiều dài $AB = 6$ cm và chiều rộng $AD = 4$ cm. *P* là trung điểm cạnh *AD*. Tìm điểm *M* trên cạnh *CD* sao cho diện tích tam giác *BMP* không lớn hơn một phần ba diện tích hình chữ nhật *ABCD* (*Hình 2.5*).



Hình 2.5

2.29. Quãng đường từ nhà bạn Minh đến trường dài 3 km. Hằng ngày bạn Minh dùng xe đạp để đến trường. Tốc độ đi xe đạp của bạn Minh thường không vượt quá 9 km/h. Hỏi bạn Minh cần ít nhất là bao nhiêu phút để đi từ nhà đến trường?

2.30. Trong buổi sáng đầu tiên của đợt hiến máu nhân đạo tổ chức ở một trường đại học, người ta đã thu được không dưới 35 100 ml máu. Theo thống kê thì sáng hôm đó có 36 người hiến máu ở mức 450 ml. Số còn lại hiến ở mức 350 ml. Hỏi trong buổi sáng hôm đó đã có ít nhất bao nhiêu người hiến máu ở mức 350 ml?

2.31. *Chọn hãng xe nào?*

Nhà máy dự định tổ chức một chuyến du lịch cho 35 công nhân được bình chọn là lao động xuất sắc. Anh Tùng được giao nhiệm vụ tìm hiểu chi phí thuê xe ô tô chở công nhân đi du lịch. Dưới đây là giá thuê xe do hai hãng xe đưa ra:

- Hãng A: Tiền thuê ban đầu là 2 triệu đồng, sau đó mỗi km của hành trình tính 8 nghìn đồng.
- Hãng B: Tiền thuê ban đầu là 1,5 triệu đồng, sau đó mỗi km của hành trình tính 9 nghìn đồng.

a) Lập bất phương trình diễn đạt giả định: "Tiền thuê xe của hãng A ít hơn tiền thuê xe của hãng B".

b) Giải bất phương trình đó.

c) Nếu hành trình du lịch dự định của nhà máy dài 320 km thì anh Tùng chọn hãng nào sẽ có lợi hơn về khoản phí thuê xe phải trả?

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

2.32. Nếu $a < b$ thì

A. $-a < -b$.

B. $5 - 2a > 5 - 2b$.

C. $4 - a < 4 - b$.

D. $-10a + 2 < -10b + 2$.

2.33. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Nếu $x > 0$ thì $x^2 > x$.

B. Nếu $x < 0$ thì $\frac{1}{x} > 0$.

C. Nếu $a > b$ thì $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

D. Nếu $0 < x < 1$ thì $x^2 < x$.

2.34. Cho bất phương trình $2x + 7 < 3x + 5$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. -1 là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

B. 0 là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

C. 2 là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

D. 3 là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

2.35. $x_0 = 3$ là một nghiệm của bất phương trình

A. $3x + 7 < x - 3$.

B. $2x - 5 \geq 1$.

C. $4x - 2 < x + 1$.

D. $-5x \leq -18$.

2.36. Nghiệm của bất phương trình $-5x + 8 > -x - 4$ là

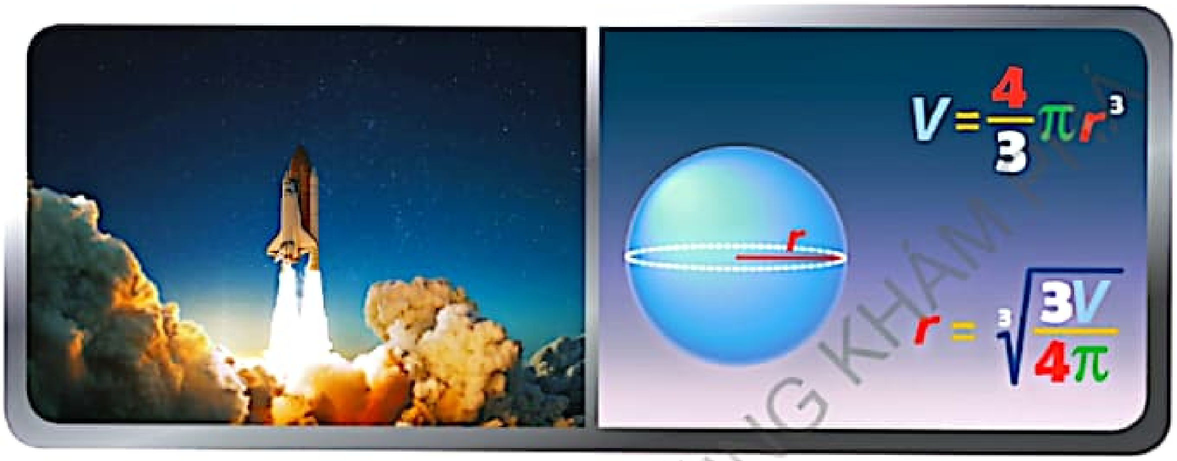
A. $x > 3$.

B. $x < 3$.

C. $x > -\frac{4}{6}$.

D. $x < -\frac{4}{6}$.

Chương 3 Căn thức



Nhiều đại lượng trong khoa học và trong thực tiễn được biểu diễn dưới dạng căn thức bậc hai và căn thức bậc ba. Chẳng hạn, một tàu vũ trụ rời Trái Đất phải có tốc độ tối thiểu là 11,2 km/s (gọi là tốc độ thoát) và tốc độ này được tính bởi công thức $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$ (nguồn: https://letstalkscience.ca/educational-resources/stem-in-context/escape-velocity), trong đó G là hằng số hấp dẫn vũ trụ, M là khối lượng của Trái Đất, R là bán kính của Trái Đất. Một ví dụ khác là bán kính của hình cầu được tính bởi công thức $\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, trong đó V là thể tích của hình cầu.

Cùng tìm hiểu

- Khái niệm về căn bậc hai của số thực không âm, căn bậc ba của một số thực, căn thức bậc hai và căn thức bậc ba của một biểu thức đại số;
- Cách tính giá trị (đúng hoặc gần đúng) căn bậc hai, căn bậc ba của một số hữu tỉ bằng máy tính cầm tay;
- Cách thực hiện một số phép tính đơn giản về căn bậc hai của số thực không âm;
- Cách thực hiện một số phép biến đổi đơn giản về căn thức bậc hai của biểu thức đại số.

Bài 1 CĂN BẬC HAI CỦA MỘT SỐ THỰC KHÔNG ÂM

Từ khoá: căn bậc hai của số thực không âm, căn bậc hai của một bình phương, căn bậc hai của một tích, căn bậc hai của một thương.

Tốc độ v (m/s) của một vật thể sau khi rơi được h (m) từ một độ cao được tính bởi công thức $v = \sqrt{19,6h}$. Gọi v_1 là tốc độ của vật sau khi rơi được 25 mét và v_2 là tốc độ của vật sau khi rơi được 100 mét. Hỏi v_2 gấp bao nhiêu lần v_1?

1 KHÁI NIỆM VỀ CĂN BẬC HAI CỦA SỐ THỰC KHÔNG ÂM

HOẠT ĐỘNG 1

a) Tìm căn bậc hai số học của 4.

b) Xét số đối của căn bậc hai số học của 4. Tính bình phương của số này và so sánh kết quả với 4.

Ta có định nghĩa sau:

Căn bậc hai của một số thực a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.

Lưu ý:

Người ta chứng minh được rằng:

- Số dương a có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau, trong đó số dương là $\sqrt{a}$ và số âm là $-\sqrt{a}$.
- Số 0 có đúng một căn bậc hai là chính nó, ta viết $\sqrt{0} = 0$.
- Với hai số a và b không âm, nếu $a < b$ thì $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

VÍ DỤ 1

Tìm các căn bậc hai của 9 và 7.

Bài giải

Số 9 có hai căn bậc hai là $\sqrt{9} = 3$ và $-\sqrt{9} = -3$.

Số 7 có hai căn bậc hai là $\sqrt{7}$ và $-\sqrt{7}$.

LUYỆN TẬP 1

Tìm các căn bậc hai của mỗi số sau:

a) 16; b) $\dfrac{9}{25}$; c) 0,36; d) 6.

VÍ DỤ 2

So sánh:

a) 1 và $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{15}$ và 4.

Bài giải

a) Vì $1 < 2$ nên $\sqrt{1} < \sqrt{2}$. Vậy $1 < \sqrt{2}$.

b) Vì $15 < 16$ nên $\sqrt{15} < \sqrt{16}$. Vậy $\sqrt{15} < 4$.

LUYỆN TẬP 2

So sánh:

a) 2 và $\sqrt{5}$;

b) 7 và $\sqrt{48}$.

2 TÍNH GIÁ TRỊ (ĐÚNG HOẶC GẦN ĐÚNG) CĂN BẬC HAI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ BẰNG MÁY TÍNH CẦM TAY

Sử dụng máy tính cầm tay, ta có thể tính được giá trị (đúng hoặc gần đúng) căn bậc hai của một số hữu tỉ cho trước.

VÍ DỤ 3

Sử dụng máy tính cầm tay, tính các căn bậc hai của:

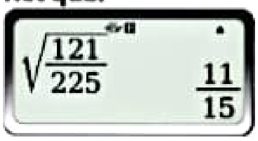
a) $\frac{121}{225}$;

b) 13 (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Bài giải

a) [√▭] [▭/▭] [1] [2] [1] [▽] [2] [2] [5] [=]

Kết quả:



Vậy $\frac{121}{225}$ có hai căn bậc hai là $\sqrt{\frac{121}{225}} = \frac{11}{15}$ và $-\sqrt{\frac{121}{225}} = -\frac{11}{15}$.

b) [√▭] [1] [3] [=] [S⇔D]

Kết quả:

Vậy 13 có hai căn bậc hai là $\sqrt{13} \approx 3{,}606$ và $-\sqrt{13} \approx -3{,}606$.

LUYỆN TẬP 3

Sử dụng máy tính cầm tay, tính các căn bậc hai của:

a) $\frac{361}{144}$;

b) 42,8 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

VẬN DỤNG 1

Bạn Tuấn khẳng định: "Có đúng một số thực sao cho bình phương tổng của số này và 1 là 36". Bạn Mai khẳng định: "Có đúng hai số thực như thế". Trong hai bạn Tuấn và Mai, ai đúng và ai sai? Vì sao?

3 CĂN BẬC HAI CỦA MỘT BÌNH PHƯƠNG

HOẠT ĐỘNG 2

a) So sánh $\sqrt{5^2}$ và 5.

b) So sánh $\sqrt{(-6)^2}$ và 6.

Tổng quát, ta tính căn bậc hai của một bình phương như sau:

Với mọi số thực a, ta có:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Như vậy:

$$\sqrt{a^2} = a \text{ nếu } a \geq 0;$$
$$\sqrt{a^2} = -a \text{ nếu } a < 0.$$

VÍ DỤ 4

Không dùng máy tính cầm tay, tính:

a) $\sqrt{13^2}$;

b) $\sqrt{(-9)^2}$;

c) $\sqrt{4^3}$;

d) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$.

Bài giải

a) $\sqrt{13^2} = |13| = 13$.

b) $\sqrt{(-9)^2} = |-9| = 9$.

c) $\sqrt{4^3} = \sqrt{64} = \sqrt{8^2} = |8| = 8$.

d) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$ (do $1 - \sqrt{2} < 0$).

LUYỆN TẬP 4

Rút gọn:

a) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$;

b) $\sqrt{(4-\sqrt{17})^2}$;

c) $\sqrt{(\sqrt{11}-3)^2} - \sqrt{(2-\sqrt{11})^2}$.

4 CĂN BẬC HAI CỦA MỘT TÍCH

HOẠT ĐỘNG 3

Tính và so sánh:

a) $\sqrt{9.16}$ và $\sqrt{9}.\sqrt{16}$;

b) $\sqrt{4.25}$ và $\sqrt{4}.\sqrt{25}$.

Ta có tính chất sau về căn bậc hai của một tích:

Nếu a và b là hai số không âm thì

$$\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}.$$

Lưu ý: Tính chất trên có thể mở rộng cho tích của nhiều số không âm. Chẳng hạn với a, b, c là ba số không âm, ta có $\sqrt{a.b.c} = \sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}$.

VÍ DỤ 5

Không dùng máy tính cầm tay, tính:

a) $\sqrt{1,21.81}$; b) $\sqrt{3}.\sqrt{48}$; c) $\sqrt{490.90}$.

Bài giải

a) $\sqrt{1,21.81} = \sqrt{1,21}.\sqrt{81} = 1,1.9 = 9,9$.

b) $\sqrt{3}.\sqrt{48} = \sqrt{3.48} = \sqrt{144} = 12$.

c) $\sqrt{490.90} = \sqrt{49.10.10.9} = \sqrt{49.100.9} = \sqrt{49}.\sqrt{100}.\sqrt{9} = 7.10.3 = 210$.

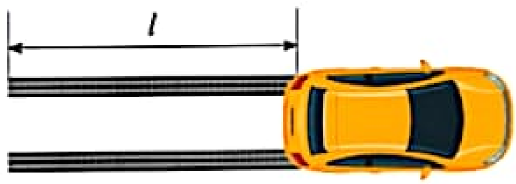
LUYỆN TẬP 5

Rút gọn:

a) $\sqrt{\frac{7}{6}} \cdot \sqrt{42}$; b) $\sqrt{0,16.36.225}$; c) $\sqrt{0,3}.\sqrt{51}.\sqrt{10}.\sqrt{17}$.

VẬN DỤNG 2

Tốc độ của xe ô tô và vết trượt của bánh xe trên mặt đường khi phanh gấp liên hệ với nhau bởi công thức $v = \sqrt{20kl}$, trong đó v (m/s) là tốc độ của xe ô tô khi phanh gấp, k là hệ số ma sát giữa bánh xe và mặt đường khi xe ô tô phanh và l (m) là độ dài vết trượt của bánh xe trên mặt đường (nguồn: *https://sciencing.com/how-8070776-determine-speed-accident-investigation.html*).



Hình 3.1

a) Một ô tô đang chạy trên đường thì phanh gấp và tạo ra một vết trượt của bánh xe dài 25 m. Hỏi tốc độ của ô tô khi phanh gấp là bao nhiêu, biết hệ số ma sát giữa bánh xe và mặt đường ở thời điểm đó là 0,8?

b) Nếu tốc độ của một ô tô khi phanh gấp là 15 m/s và hệ số ma sát giữa bánh xe và mặt đường ở thời điểm đó là 0,6 thì vết trượt của bánh xe dài bao nhiêu?

5 CĂN BẬC HAI CỦA MỘT THƯƠNG

HOẠT ĐỘNG 4

Tính và so sánh:

a) $\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ và $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}$;

b) $\sqrt{\dfrac{25}{4}}$ và $\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}$.

Ta tính căn bậc hai của một thương như sau:

Nếu a là số không âm và b là số dương thì

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

VÍ DỤ 6

Không dùng máy tính cầm tay, tính:

a) $\sqrt{\dfrac{36}{169}}$;

b) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}}$.

Bài giải

a) $\sqrt{\dfrac{36}{169}} = \dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{169}} = \dfrac{6}{13}$.

b) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\dfrac{72}{8}} = \sqrt{9} = 3$.

LUYỆN TẬP 6

Rút gọn:

a) $\sqrt{\dfrac{9}{25} : \dfrac{64}{121}}$;

b) $\sqrt{\dfrac{81}{10}} : \sqrt{4\dfrac{9}{10}}$.

VẬN DỤNG 3

Trả lời câu hỏi nêu trong phần Khởi động bằng cách tính tỉ số của v_2 và v_1.

6 ĐƯA THỪA SỐ RA NGOÀI HOẶC VÀO TRONG DẤU CĂN BẬC HAI

HOẠT ĐỘNG 5

Giải thích vì sao:

a) $\sqrt{3^2.5} = 3\sqrt{5}$;

b) $\sqrt{(-2)^2.7} = 2\sqrt{7}$.

Tổng quát, ta có:

Nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$.
Nếu $a < 0$ và $b \geq 0$ thì $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$.

Lưu ý:

- Cách biến đổi

$$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b} \text{ khi } a \geq 0, b \geq 0;$$
$$\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b} \text{ khi } a < 0, b \geq 0$$

được gọi là *đưa thừa số ra ngoài dấu căn.*

- Ngược lại, cách biến đổi

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b} \text{ khi } a \geq 0, b \geq 0;$$
$$a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b} \text{ khi } a < 0, b \geq 0$$

được gọi là *đưa thừa số vào trong dấu căn.*

VÍ DỤ 7

Rút gọn biểu thức: $\sqrt{98} - \sqrt{32} + 5\sqrt{8}$.

Bài giải

$$\begin{aligned}\sqrt{98} - \sqrt{32} + 5\sqrt{8} &= \sqrt{49.2} - \sqrt{16.2} + 5\sqrt{4.2}\\ &= \sqrt{7^2.2} - \sqrt{4^2.2} + 5\sqrt{2^2.2}\\ &= 7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5.2\sqrt{2}\\ &= 7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 10\sqrt{2}\\ &= 13\sqrt{2}.\end{aligned}$$

LUYỆN TẬP 7

Rút gọn biểu thức: $\dfrac{\sqrt{48} + \sqrt{20}}{\sqrt{12} + \sqrt{5}}$.

VÍ DỤ 8

Đưa thừa số vào trong dấu căn rồi so sánh $3\sqrt{7}$ và $4\sqrt{5}$.

Bài giải

$3\sqrt{7} = \sqrt{3^2.7} = \sqrt{63}$; $4\sqrt{5} = \sqrt{4^2.5} = \sqrt{80}$.

Vì $\sqrt{63} < \sqrt{80}$ nên $3\sqrt{7} < 4\sqrt{5}$.

LUYỆN TẬP 8

Sắp xếp các số $5\sqrt{8}$, $6\sqrt{7}$ và $3\sqrt{22}$ theo thứ tự từ nhỏ đến lớn.

BÀI TẬP

3.1. Tìm căn bậc hai số học của mỗi số sau rồi suy ra căn bậc hai của chúng:

a) 169;
b) 256;
c) 324;
d) 400.

3.2. Sử dụng máy tính cầm tay, tính gần đúng các căn bậc hai của các số sau (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn):

a) 3,2;
b) 4,15.

3.3. Tải trọng an toàn m (kg) của một dây cáp thép được tính bởi công thức $m = 8d^2$, trong đó d (mm) là đường kính của dây cáp thép (nguồn: *https://calculator.academy/swl-of-wire-rope-calculator/*).

a) Biểu diễn d^2 theo m.
b) Tìm đường kính nhỏ nhất của dây cáp thép có tải trọng an toàn là 900 kg (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

3.4. Công thức tính động năng của một vật chuyển động là $W_đ = \frac{1}{2}mv^2$, trong đó $W_đ$ (J) là động năng, m (kg) là khối lượng và v (m/s) là tốc độ của vật.

a) Biểu diễn v^2 theo $W_đ$ và m.
b) Tìm tốc độ của một vật chuyển động có khối lượng 1 kg và động năng là 50 J.

3.5. Không dùng máy tính cầm tay, tính:

a) $\sqrt{3^4.(-5)^2}$;
b) $\sqrt{0,6}.\sqrt{5,4}$;
c) $\sqrt{3\frac{6}{25}}$;
d) $\sqrt{\frac{49}{6}}:\sqrt{2\frac{2}{3}}$.

3.6. Viết các số dưới dấu căn thành dạng tích rồi đưa thừa số ra ngoài dấu căn:

a) $\sqrt{72}$;
b) $\sqrt{147}$;
c) $\sqrt[3]{30\,000}$.

3.7. Đưa thừa số vào trong dấu căn rồi so sánh:

a) $2\sqrt{3}$ và $3\sqrt{2}$;
b) $4\sqrt{5}$ và $3\sqrt{7}$;
c) -10 và $-4\sqrt{6}$.

3.8. Rút gọn:

a) $6\sqrt{5} - \sqrt{80} + 2\sqrt{5}$;
b) $\frac{\sqrt{12} - \sqrt{112}}{\sqrt{3} - \sqrt{28}}$.

3.9. Không dùng máy tính cầm tay, chứng minh rằng:

a) $(\sqrt{5}-1)^2 = 6-2\sqrt{5}$;

b) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{5}=-1$.

3.10. Tính nhanh:

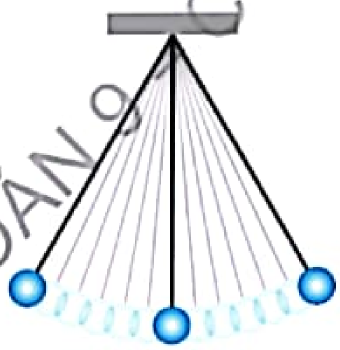
a) $\sqrt{37^2-12^2}$;

b) $\sqrt{101^2-20^2}$;

c) $\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}}.\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.

3.11. Chu kì của con lắc đơn là thời gian để nó thực hiện một dao động qua lại hoàn chỉnh.

Công thức tính chu kì T (giây) của một con lắc đơn là $T=\frac{2\pi\sqrt{l}}{\sqrt{9,8}}$, trong đó l (m) là chiều dài của con lắc (nguồn: *https://www.thetechedvocate.org/how-to-calculate-the-period-of-a-pendulum/*). Tính giá trị chính xác của chu kì của một con lắc đơn có chiều dài là 9,8 cm.



Hình 3.2

3.12. Nhiệt lượng Q (J) toả ra từ vật dẫn khi có dòng điện chạy qua được tính bởi công thức $Q=I^2Rt$, trong đó I (A) là cường độ dòng điện chạy qua vật dẫn, R (Ω) là điện trở của vật dẫn và t (s) là thời gian dòng điện chạy qua vật dẫn (nguồn: *https://gimnazijapg.me/images/pdfdoc/fizika/III_razred/electric-energy-and-power.pdf*). Biết rằng nhiệt lượng toả ra từ vật dẫn có điện trở 300 Ω trong thời gian 1 giây là 225 J, hãy tính giá trị chính xác của cường độ dòng điện chạy qua vật dẫn này.

Bài 2 CĂN THỨC BẬC HAI

Từ khoá: căn thức bậc hai, căn thức bậc hai của một bình phương, căn thức bậc hai của một tích, căn thức bậc hai của một thương.

Công suất P (W), hiệu điện thế U (V) và điện trở R (Ω) trong một đoạn mạch một chiều liên hệ với nhau theo công thức $U = \sqrt{PR}$ (nguồn: *https://dinhnghia.vn/dinh-nghia-cong-suat-dien-cua-dong-dien-mot-chieu-xoay-chieu.html*). Nếu công suất và điện trở trong đoạn mạch đều tăng gấp đôi thì tỉ số giữa hiệu điện thế lúc đó và hiệu điện thế ban đầu bằng bao nhiêu?

1 CĂN THỨC BẬC HAI

HOẠT ĐỘNG 1

Một tấm thảm hình chữ nhật có đường chéo là 5 dm và chiều rộng là x (dm). Giải thích vì sao chiều dài của tấm thảm là $\sqrt{25 - x^2}$ (dm).

Trong Hoạt động 1, ta gọi $\sqrt{25 - x^2}$ là căn thức bậc hai của $25 - x^2$, còn $25 - x^2$ là biểu thức lấy căn.

Một cách tổng quát:

Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt{A}$ là *căn thức bậc hai* của A, còn A được gọi là biểu thức lấy căn hay biểu thức dưới dấu căn.

Lưu ý: $\sqrt{A}$ xác định (hay có nghĩa) khi A lấy giá trị không âm.

VÍ DỤ 1

Với những giá trị nào của x thì mỗi biểu thức $\sqrt{-x}$, $\sqrt{x^2}$ xác định?

Bài giải

$\sqrt{-x}$ xác định khi $-x \geq 0$, tức là $x \leq 0$.

$\sqrt{x^2}$ xác định với mọi số thực x (vì $x^2 \geq 0$ với mọi số thực x).

LUYỆN TẬP 1

Chỉ ra các căn thức bậc hai trong các biểu thức sau và tìm điều kiện để chúng xác định:

$x^2 + y - 1$; $\quad \sqrt{x^2 + 5}$; $\quad \dfrac{xy + 2z}{y^2 + z}$; $\quad a^2 - 3a + 4$; $\quad \sqrt{3u - 6}$.

2 CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT BÌNH PHƯƠNG

HOẠT ĐỘNG 2

Hãy chép lại và hoàn thành *Bảng 3.1*. Em có nhận xét gì về giá trị của $\sqrt{(2x-1)^2}$ và $|2x-1|$?

Bảng 3.1

x	-2	-1	0	1	2
$\sqrt{(2x-1)^2}$	?	?	?	?	?
$\|2x-1\|$	?	?	?	?	?

Tổng quát, ta có phép biến đổi sau:

Với mọi biểu thức đại số A, ta có:

$$\sqrt{A^2} = |A|.$$

VÍ DỤ 2

Rút gọn:

a) $\sqrt{a^4}$; b) $\sqrt{(x-3)^2}$ với $x \geq 3$; c) $\sqrt{b^6}$ với $b < 0$.

Bài giải

a) $\sqrt{a^4} = \sqrt{(a^2)^2} = |a^2| = a^2$ (vì $a^2 \geq 0$).

b) $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = x-3$ (vì $x \geq 3$).

c) $\sqrt{b^6} = \sqrt{(b^3)^2} = |b^3| = -b^3$ (vì $b < 0$ nên $b^3 < 0$).

LUYỆN TẬP 2

Rút gọn:

a) $\sqrt{x^8}$; b) $2\sqrt{(-y+5)^2}$ với $y \geq 5$; c) $-3\sqrt{z^{10}}$ với $z < 0$.

3 CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT TÍCH

HOẠT ĐỘNG 3

Hãy chép lại và hoàn thành *Bảng 3.2*. Em có nhận xét gì về giá trị của $\sqrt{(x+1)(x+3)}$ và $\sqrt{x+1}.\sqrt{x+3}$?

Bảng 3.2

x	0	1	2	3	4
$\sqrt{x+1}$	?	?	?	?	?
$\sqrt{x+3}$	?	?	?	?	?
$\sqrt{(x+1)(x+3)}$	?	?	?	?	?
$\sqrt{x+1}.\sqrt{x+3}$	?	?	?	?	?

Người ta chứng minh được tính chất sau:

Với hai biểu thức A và B không âm, ta có:

$$\sqrt{A.B} = \sqrt{A}.\sqrt{B}.$$

Lưu ý:

- Tính chất trên có thể mở rộng cho tích của nhiều biểu thức không âm. Chẳng hạn với các biểu thức không âm A, B, C, ta có $\sqrt{A.B.C} = \sqrt{A}.\sqrt{B}.\sqrt{C}$.
- Với biểu thức A không âm, ta có $\sqrt{A^2} = (\sqrt{A})^2 = A$.

VÍ DỤ 3

Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{16a^4b^2}$;

b) $\sqrt{5x}.\sqrt{45x}$ với $x \geq 0$.

Bài giải

a) $\sqrt{16a^4b^2} = \sqrt{16}.\sqrt{a^4}.\sqrt{b^2} = 4.\sqrt{(a^2)^2}.|b| = 4a^2|b|$.

b) $\sqrt{5x}.\sqrt{45x} = \sqrt{5x.45x} = \sqrt{225x^2} = \sqrt{225}.\sqrt{x^2} = 15|x| = 15x$ (vì $x \geq 0$).

LUYỆN TẬP 3

Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{36x^8(2-y)^2}$ với $y \geq 2$;

b) $\sqrt{\dfrac{7z}{3}} \cdot \sqrt{\dfrac{3}{28z}}$ với $z > 0$.

VẬN DỤNG 1

Một hình chữ nhật có chiều dài là $\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ mét và chiều rộng là $\sqrt{\dfrac{a}{12}}$ mét ($a > 0$). Tính diện tích của hình chữ nhật theo a.

4 CĂN THỨC BẬC HAI CỦA MỘT THƯƠNG

HOẠT ĐỘNG 4

Cho biểu thức A không âm và biểu thức B dương.

a) Giải thích vì sao $\sqrt{\dfrac{A}{B}} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A}$.

b) Chứng minh $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$.

Theo Hoạt động 4, ta chứng minh được rằng:

Với biểu thức A không âm và biểu thức B dương, ta có:

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}.$$

VÍ DỤ 4

Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{\frac{36x^4}{49}}$;

b) $\frac{\sqrt{6y^3}}{\sqrt{54y}}$ với $y > 0$.

Bài giải

a) $\sqrt{\frac{36x^4}{49}} = \frac{\sqrt{36x^4}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{36}.\sqrt{x^4}}{7} = \frac{6x^2}{7}$.

b) $\frac{\sqrt{6y^3}}{\sqrt{54y}} = \sqrt{\frac{6y^3}{54y}} = \sqrt{\frac{y^2}{9}} = \frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{9}} = \frac{|y|}{3} = \frac{y}{3}$ (vì $y > 0$).

LUYỆN TẬP 4

Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{a}{b^2} \cdot \sqrt{\frac{b^4}{4a^2}}$ với $a < 0$;

b) $\frac{\sqrt{5x^2y^5}}{\sqrt{80y^3}}$ với $y > 0$.

VẬN DỤNG 2

Giải bài toán nêu trong phần Khởi động.

5 TRỤC CĂN THỨC Ở MẪU

HOẠT ĐỘNG 5

a) Nhân cả tử và mẫu của biểu thức $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ với $\sqrt{2}$ rồi biến đổi biểu thức đó về dạng không còn căn thức ở mẫu.

b) Nhân cả tử và mẫu của biểu thức $\frac{5}{\sqrt{2}+1}$ với $\sqrt{2}-1$ rồi biến đổi biểu thức đó về dạng không còn căn thức ở mẫu.

c) Nhân cả tử và mẫu của biểu thức $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ với $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ rồi biến đổi biểu thức đó về dạng không còn căn thức ở mẫu.

Trong Hoạt động 5, ta đã biến đổi các biểu thức $\frac{4}{3\sqrt{2}}$, $\frac{5}{\sqrt{2}+1}$ và $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ về dạng không còn căn thức ở mẫu. Cách làm này được gọi là *trục căn thức ở mẫu*. Trong câu b, để trục căn thức ở mẫu, ta đã nhân cả tử và mẫu của biểu thức $\frac{5}{\sqrt{2}+1}$ với biểu thức $\sqrt{2}-1$. Ta gọi biểu thức $\sqrt{2}+1$ và biểu thức $\sqrt{2}-1$ là *hai biểu thức liên hợp với nhau*. Tương tự, trong câu c, ta gọi biểu thức $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ và biểu thức $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ là hai biểu thức liên hợp với nhau. Tổng quát, ta gọi $\sqrt{A}+B$ và $\sqrt{A}-B$ là *hai biểu thức liên hợp với nhau*; $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ và $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ là *hai biểu thức liên hợp với nhau*.

Một cách tổng quát:

- Với các biểu thức A, B mà $B > 0$, ta có:

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}.$$

- Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0$ và $A \neq B^2$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A}+B} = \frac{C(\sqrt{A}-B)}{A-B^2}; \frac{C}{\sqrt{A}-B} = \frac{C(\sqrt{A}+B)}{A-B^2}.$$

- Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0$, $B \geq 0$ và $A \neq B$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A-B}; \frac{C}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B}.$$

VÍ DỤ 5

Trục căn thức ở mẫu:

a) $\frac{20}{7\sqrt{5}}$;

b) $\frac{9}{\sqrt{6}-3}$;

c) $\frac{8}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$;

d) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$.

Bài giải

a) $\frac{20}{7\sqrt{5}} = \frac{20\sqrt{5}}{7\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \frac{20\sqrt{5}}{7.5} = \frac{4\sqrt{5}}{7}$.

b) $\frac{9}{\sqrt{6}-3} = \frac{9(\sqrt{6}+3)}{(\sqrt{6}-3)(\sqrt{6}+3)} = \frac{9(\sqrt{6}+3)}{6-9} = -3(\sqrt{6}+3)$.

c) $\frac{8}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{8(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})} = \frac{8(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{7-3} = 2(\sqrt{7}-\sqrt{3})$.

d) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$.

LUYỆN TẬP 5

Trục căn thức ở mẫu (với giả thiết các biểu thức đều có nghĩa):

a) $\frac{6}{\sqrt{x}}$; b) $\frac{\sqrt{y}}{1+\sqrt{y}}$; c) $\frac{x(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

BÀI TẬP

3.13. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{25a^4}-2a^2$;

b) $3\sqrt{4b^6}+7b^3$ với $b<0$;

c) $\frac{1}{x-y}\sqrt{x^4(x-y)^2}$ với $x>y$;

d) $\sqrt{0,3}.\sqrt{270z^2}$.

3.14. Rút gọn rồi tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt{9(4-4x+x^2)^2}$ tại $x=\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{4a^2(9b^2+6b+1)^2}$ tại $a=-2, b=-\sqrt{3}$;

c) $a^2b^2\cdot\sqrt{\frac{9b^4}{25a^6}}$ tại $a=-3, b=\sqrt{5}$;

d) $\frac{\sqrt{3x^6y^4}}{\sqrt{27x^2y^2}}$ tại $x=-3, y=\sqrt{5}$.

3.15. Tìm x, biết:

a) $\sqrt{3}x-\sqrt{48}=0$; b) $2\sqrt{5}x+\sqrt{80}=\sqrt{125}-\sqrt{45}$.

3.16. Trục căn thức ở mẫu (với giả thiết các biểu thức đều có nghĩa):

a) $\frac{2\sqrt{6}+1}{4\sqrt{6}}$; b) $\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}+3}$;

c) $\frac{4}{\sqrt{10}-\sqrt{8}}$; d) $\frac{ab}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;

e) $\frac{3x}{4\sqrt{x}-1}$; g) $\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{m\sqrt{n}}$.

3.17. Rút gọn các biểu thức sau (với giả thiết các biểu thức đều có nghĩa):

a) $\frac{6\sqrt{2}+3}{1+2\sqrt{2}}$; b) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1}$;

c) $\frac{m-2\sqrt{m}}{2-\sqrt{m}}$; d) $\frac{3x+\sqrt{xy}}{3\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

3.18. Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần:

a) $8\sqrt{3}, 4\sqrt{7}, 5\sqrt{6}$ và $9\sqrt{2}$;

b) $6\sqrt{3}, \sqrt{48}, 3\sqrt{7}$ và $2\sqrt{11}$.

3.19. Diện tích A của hình tròn bán kính r được tính bởi công thức $A = \pi r^2$.

a) Viết biểu thức tính r theo A từ công thức trên.

b) Diện tích của hình tròn C_1 gấp 9 lần diện tích của hình tròn C_2 thì bán kính của hình tròn C_1 gấp bao nhiêu lần bán kính của hình tròn C_2?

3.20. Vào ngày 06/01/2020, ông Thành đầu tư hết 100 triệu đồng vào một tài khoản đầu tư chứng khoán. Đến cuối ngày 06/01/2021, tài khoản đầu tư của ông tăng gấp k lần. Đến cuối ngày 06/01/2022, tài khoản đó tăng thêm $0,8k$ lần so với tài khoản cuối ngày 06/01/2021. Gọi S (triệu đồng) là số tiền trong tài khoản đầu tư của ông Thành cuối ngày 06/01/2022.

a) Viết biểu thức tính S theo k.

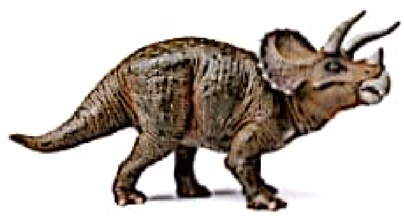
b) Viết biểu thức tính k theo S. Nếu số tiền trong tài khoản đầu tư của ông Thành cuối ngày 06/01/2022 là 180 triệu đồng thì giá trị của k bằng bao nhiêu?

3.21. Trong một nghiên cứu về khủng long, người ta dùng công thức sau để ước tính tốc độ di chuyển của khủng long:

$$Fr = \frac{v^2}{gl},$$

trong đó Fr là số Froude, v (m/s) là tốc độ di chuyển của khủng long, l (m) là chiều dài chân của khủng long và $g = 9,8$ m/s^2 là gia tốc trọng trường.

(Nguồn: R. McNeill Alexander, *How Dinosaur Ran*, Scientific American, Vol. 264, No. 4 (April 1991), pp. 130 – 137)



Hình 3.3

a) Viết biểu thức tính v theo l và Fr từ công thức trên.

b) Ước tính tốc độ di chuyển của loài khủng long Triceratops có chiều dài chân là 2,8 m và có số Froude là 0,16 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bài 3 CĂN BẬC BA. CĂN THỨC BẬC BA

Từ khoá: căn bậc ba của số thực, căn thức bậc ba.

Ở các bài học trước, ta đã tìm hiểu căn bậc hai của một số thực không âm và căn thức bậc hai của một biểu thức đại số. Căn bậc ba và căn thức bậc ba có được định nghĩa tương tự không?

1 KHÁI NIỆM VỀ CĂN BẬC BA CỦA MỘT SỐ THỰC

HOẠT ĐỘNG 1

a) Tìm một số có lập phương bằng 27.
b) Tìm một số có lập phương bằng −8.

Ta có định nghĩa sau:

Căn bậc ba của một số thực a là số x sao cho $x^3 = a$.

Lưu ý:

- Mỗi số thực a đều có duy nhất một căn bậc ba.
- Căn bậc ba của số thực a được kí hiệu là $\sqrt[3]{a}$, trong đó số 3 gọi là chỉ số của căn. Từ định nghĩa căn bậc ba, ta có $(\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$.
- Phép tìm căn bậc ba của một số thực gọi là phép khai căn bậc ba.

VÍ DỤ 1

Tìm căn bậc ba của 64; $-\dfrac{1}{125}$ và 0.

Bài giải

$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4.$

$\sqrt[3]{-\dfrac{1}{125}} = \sqrt[3]{\left(-\dfrac{1}{5}\right)^3} = -\dfrac{1}{5}.$

$\sqrt[3]{0} = \sqrt[3]{0^3} = 0.$

Nhận xét: Căn bậc ba của số dương là số dương, căn bậc ba của số âm là số âm, căn bậc ba của số 0 là số 0.

LUYỆN TẬP 1

Tính $\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{-27}-\sqrt[3]{216}$.

Lưu ý:

Tương tự căn bậc hai, căn bậc ba có các tính chất sau:

Với hai số thực a và b:

- Nếu $a<b$ thì $\sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b}$;
- $\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}$;
- $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ nếu $b\neq 0$.

VÍ DỤ 2

So sánh 4 và $\sqrt[3]{67}$.

Bài giải

Ta có $4=\sqrt[3]{64}$. Vì $64<67$ nên $\sqrt[3]{64}<\sqrt[3]{67}$. Vậy $4<\sqrt[3]{67}$.

LUYỆN TẬP 2

So sánh:

a) 6 và $\sqrt[3]{210}$;

b) $3\sqrt[3]{4}$ và $4\sqrt[3]{3}$.

VÍ DỤ 3

Rút gọn:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$;

b) $5\sqrt[3]{128}+3\sqrt[3]{16}$.

Bài giải

a) $\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{\dfrac{625}{5}}=\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$.

b) $5\sqrt[3]{128}+3\sqrt[3]{16}=5\sqrt[3]{64.2}+3\sqrt[3]{8.2}=5\sqrt[3]{4^3.2}+3\sqrt[3]{2^3.2}$
$=5\sqrt[3]{4^3}.\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{2}=5.4\sqrt[3]{2}+3.2\sqrt[3]{2}$
$=20\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{2}=26\sqrt[3]{2}$.

LUYỆN TẬP 3

Tính $\dfrac{\sqrt[3]{162}}{\sqrt[3]{6}}-\sqrt[3]{24}.\sqrt[3]{9}$.

2 TÍNH GIÁ TRỊ CĂN BẬC BA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ BẰNG MÁY TÍNH CẦM TAY

Sử dụng máy tính cầm tay, ta có thể tính được giá trị (đúng hoặc gần đúng) căn bậc ba của một số hữu tỉ cho trước.

VÍ DỤ 4

Sử dụng máy tính cầm tay, tính căn bậc ba của:

a) $\frac{216}{343}$;

b) 18 (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Bài giải

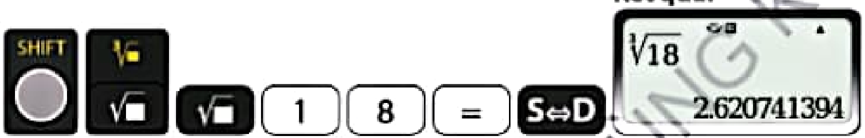
a)

Kết quả:

Vậy $\frac{216}{343}$ có căn bậc ba là $\sqrt[3]{\frac{216}{343}} = \frac{6}{7}$.

b)

Kết quả:



Vậy 18 có căn bậc ba là $\sqrt[3]{18} \approx 2,621$.

LUYỆN TẬP 4

Sử dụng máy tính cầm tay, tính căn bậc ba của:

a) $-\frac{512}{1331}$;

b) 15,27 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

VẬN DỤNG 1

Thể tích của một bể nước hình lập phương là 13,824 m^3. Tìm độ dài cạnh của bể nước.

3 CĂN THỨC BẬC BA CỦA MỘT BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

HOẠT ĐỘNG 2

Viết công thức tính thể tích V của hình lập phương có cạnh bằng a. Từ đó giải thích vì sao $a = \sqrt[3]{V}$.

Trong Hoạt động 2, ta gọi $\sqrt[3]{V}$ là căn thức bậc ba của V, còn V là biểu thức lấy căn bậc ba.

Một cách tổng quát:

Với A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt[3]{A}$ là *căn thức bậc ba* của A, còn A được gọi là biểu thức lấy căn hay biểu thức dưới dấu căn.

VÍ DỤ 5

Chỉ ra các căn thức bậc ba trong các biểu thức sau:

$$x^2+y^2-1; \quad \sqrt[3]{z^2-2}; \quad \frac{a}{b^2+1}; \quad c^2-c+1; \quad \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}; \quad \sqrt{u+v}.$$

Bài giải

$\sqrt[3]{z^2-2}$ và $\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ là các căn thức bậc ba.

VÍ DỤ 6

Rút gọn các biểu thức:

a) $\sqrt[3]{a^9}$; b) $\sqrt[3]{-8x^6}$; c) $\dfrac{\sqrt[3]{2y^3}}{\sqrt[3]{128}}$.

Bài giải

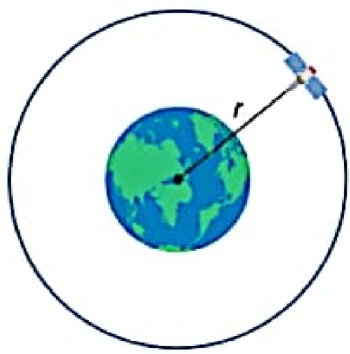
a) $\sqrt[3]{a^9}=a^3$.

b) $\sqrt[3]{-8x^6}=\sqrt[3]{-8}.\sqrt[3]{x^6}=(-2)x^2=-2x^2$.

c) $\dfrac{\sqrt[3]{2y^3}}{\sqrt[3]{128}}=\sqrt[3]{\dfrac{2y^3}{128}}=\sqrt[3]{\dfrac{y^3}{64}}=\dfrac{\sqrt[3]{y^3}}{\sqrt[3]{64}}=\dfrac{y}{4}$.

VẬN DỤNG 2

Bán kính r (m) của quỹ đạo của một vệ tinh (giả sử quỹ đạo của vệ tinh là đường tròn) được ước tính bởi công thức $r=\sqrt[3]{\dfrac{GMt^2}{4\pi^2}}$, trong đó G (Nm^2/kg^2) là hằng số hấp dẫn vũ trụ, M (kg) là khối lượng của Trái Đất và t (s) là thời gian để vệ tinh hoàn thành một quỹ đạo (nguồn: *https://courses.lumenlearning.com/suny-osuniversityphysics/chapter/13-4-satellite-orbits-and-energy/*). Hãy ước tính bán kính của quỹ đạo của vệ tinh có thời gian hoàn thành một quỹ đạo là $2,6.10^6$ giây, biết rằng $G=\dfrac{6,67}{10^{11}}$ (Nm^2/kg^2) và $M=5,98.10^{24}$ (kg) (làm tròn kết quả đến hàng nghìn).



Hình 3.4

BÀI TẬP

3.22. Không dùng máy tính cầm tay, tính:

a) $\left(2\sqrt[3]{27}-5\sqrt[3]{-216}\right)\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{64}}$;

b) $2\sqrt[3]{36}.5\sqrt[3]{48}$.

3.23. Sắp xếp các số sau theo thứ tự tăng dần: $3\sqrt[3]{3}$, $2\sqrt[3]{10}$ và 5.

3.24. Rút gọn các biểu thức:

a) $\sqrt[3]{m^6}$;

b) $\sqrt[3]{-27n^3}$;

c) $\sqrt[3]{64y^3}-7y$;

d) $\dfrac{\sqrt[3]{12z^9}}{\sqrt[3]{96}}$.

3.25. Tìm x, biết rằng:

a) $\sqrt[3]{x-2}=3$;

b) $6x+\sqrt[3]{-8x^3}=2x+1$.

3.26. Một cửa hàng nhận thấy rằng nếu giảm giá bán $P\%$ trong t giờ thì số khách hàng tham gia mua hàng giảm giá trong t giờ đó, gọi là N, có thể được ước tính bởi biểu thức $N=125\sqrt[3]{Pt}$. Hãy ước tính số lượng khách hàng tham gia mua hàng giảm giá 50% trong 8 giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

3.27. Khoảng cách trung bình d (m) giữa một hành tinh và Mặt Trời liên hệ với chu kì quỹ đạo T (s) của hành tinh (thời gian hành tinh quay một vòng quanh Mặt Trời) theo công thức $d^3=\dfrac{10^{19}}{2{,}97}T^2$ (nguồn: *https://www.physicsclassroom.com/class/circles/Lesson-4/Kepler-s-Three-Laws*).

a) Viết biểu thức tính d theo T.

b) Tính khoảng cách trung bình giữa Sao Hoả và Mặt Trời theo kilômét, biết rằng chu kì quỹ đạo của Sao Hoả là $5{,}93.10^7$ giây (làm tròn kết quả đến hàng trăm nghìn).

ÔN TẬP CHƯƠNG 3

BÀI TẬP TỰ LUẬN

3.28. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $3\sqrt{12}-7\sqrt{48}-4\sqrt{75}+5\sqrt{108}$;

b) $(\sqrt{8}-6\sqrt{2}+\sqrt{10})\sqrt{2}-2\sqrt{5}$;

c) $0,7\sqrt{11}.\sqrt[3]{1000}+7\sqrt{(\sqrt{11}-\sqrt{13})^2}$;

d) $\dfrac{3}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{40}-\sqrt{5}}{\sqrt{8}-1}$.

3.29. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}:\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=x-y$ với x, y dương và $x\neq y$;

b) $\dfrac{a}{(a-b)^2}\sqrt{25a^4(a-b)^4}=5a^3$ với $a\neq b$;

c) $\dfrac{1}{\sqrt{z}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{z}+2}=\dfrac{4}{z-4}$ với $z\geq 0$ và $z\neq 4$.

3.30. Rút gọn các biểu thức sau (giả thiết các biểu thức đều có nghĩa):

a) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-1}+\dfrac{1}{a-\sqrt{a}}\right):\dfrac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1}$;

b) $\dfrac{xy+y\sqrt{x}+\sqrt{x}+1}{y\sqrt{x}+1}$;

c) $\dfrac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}+\sqrt{a^2b}-\sqrt{ab^2}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

3.31. Cho biểu thức:

$$P=\left(1+\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)\left(1-\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right) \text{ với } x\geq 0 \text{ và } x\neq 1.$$

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của P khi $x=5$.

3.32. Không dùng máy tính cầm tay, tính:

a) $\dfrac{2\sqrt[3]{27}+5\sqrt[3]{-216}}{\sqrt[3]{64}+\sqrt[3]{-8}}$;

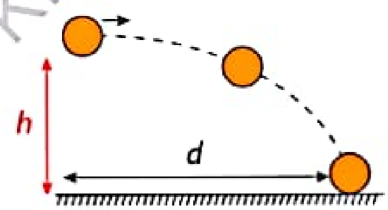
b) $\dfrac{15\sqrt[3]{104}}{12\sqrt[3]{13}}$.

3.33. Tính độ dài cạnh của một khu vườn hình vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm), biết diện tích của nó bằng diện tích của khu vườn hình chữ nhật có chiều rộng 5,2 m và chiều dài 14 m.

3.34. Một hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt là $\sqrt{56}$ cm và $\sqrt{14}$ cm. Tính diện tích của hình chữ nhật.

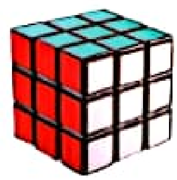
3.35. Tốc độ âm thanh v (m/s) gần bề mặt Trái Đất được cho bởi $v = 20\sqrt{T+273}$, trong đó T (°C) là nhiệt độ bề mặt (nguồn: *https://phys.libretexts.org/Bookshelves/College_Physics/Book%3A_College_Physics_1e_(OpenStax)/17%3A_Physics_of_Hearing/17.02%3A_Speed_of_Sound_Frequency_and_Wavelength*). Tính tốc độ âm thanh gần bề mặt Trái Đất khi nhiệt độ bề mặt lần lượt là 15°C và 30°C (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

3.36. Một quả bóng khi được đánh theo phương ngang với tốc độ v (m/s) tại độ cao h (m) so với mặt đất sẽ dịch chuyển theo phương ngang một quãng đường $d = v\sqrt{\dfrac{h}{4,9}}$ (m) cho đến khi chạm mặt đất (nguồn: *https://dinhluat.com/chuyen-dong-nem-ngang/*) (*Hình 3.5*). Quả bóng đi được bao xa theo phương ngang từ khi được đánh theo phương ngang với tốc độ 35 m/s tại độ cao 0,9 m so với mặt đất?



Hình 3.5

3.37. Một khối rubik có thể tích bằng 125 cm³ (*Hình 3.6*). Tính độ dài cạnh của khối rubik.



Hình 3.6

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

3.38. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

A. Mọi số thực đều có đúng hai căn bậc hai.

B. Mọi số thực âm đều có đúng hai căn bậc hai.

C. Mọi số thực không âm đều có đúng hai căn bậc hai.

D. Mọi số thực dương đều có đúng hai căn bậc hai.

3.39. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là **sai**?

A. Mọi số thực âm đều có căn bậc ba.

B. Căn bậc ba của số 0 là chính nó.

C. Mọi số thực dương đều có đúng hai căn bậc ba.

D. Mọi số thực đều có đúng một căn bậc ba.

3.40. Xét phát biểu I: "Nếu a và b là hai số không âm bất kì thì $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$" và phát biểu II: "Nếu a và b là hai số không âm bất kì thì $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$". Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

A. Cả hai phát biểu I và II đều đúng.

B. Cả hai phát biểu I và II đều sai.

C. Phát biểu I đúng và phát biểu II sai.

D. Phát biểu I sai và phát biểu II đúng.

3.41. Thứ tự từ nhỏ đến lớn của các số $5\sqrt{8}, 8\sqrt{5}, 7\sqrt{6}$ là

A. $5\sqrt{8}, 8\sqrt{5}, 7\sqrt{6}$.

B. $5\sqrt{8}, 7\sqrt{6}, 8\sqrt{5}$.

C. $8\sqrt{5}, 7\sqrt{6}, 5\sqrt{8}$.

D. $7\sqrt{6}, 5\sqrt{8}, 8\sqrt{5}$.

3.42. $\sqrt{\dfrac{36}{x}} - \sqrt{\dfrac{25}{x}} = \dfrac{1}{4}$ khi x bằng

A. 1. B. 4.

C. 9. D. 16.

3.43. Giá trị của biểu thức $\dfrac{1}{3+\sqrt{5}} + \dfrac{1}{3-\sqrt{5}}$ là

A. $\dfrac{3}{2}$. B. $\dfrac{1}{3}$.

C. $\dfrac{1}{6}$. D. $\dfrac{1}{2}$.

3.44. Rút gọn biểu thức $A = \left(\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{7}}{1-\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}}\right)(\sqrt{7}-\sqrt{5})$, ta thu được giá trị của A là

A. -2. B. 2.

C. -1. D. 1.

3.45. Biểu thức $\sqrt[3]{a+2} + \sqrt[3]{6a-9}$ có giá trị bằng 5 khi

A. $a = -1$. B. $a = 6$.

C. $a = -6$. D. $a = 1$.

Phần HÌNH HỌC PHẲNG

Chương 4 Hệ thức lượng trong tam giác vuông

Cánh tay rô-bốt có thể chuyển động một cách linh hoạt nhờ vào việc thay đổi các góc tại khớp nối giữa các bộ phận. Để tính toán vị trí của bàn tay rô-bốt một cách chính xác, cần sử dụng công thức trong đó kết hợp các tỉ số lượng giác của những góc nói trên.

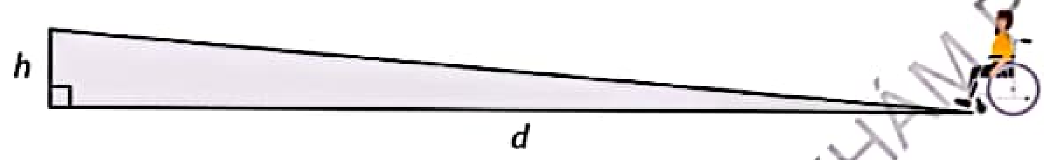
Cùng tìm hiểu

- Khái niệm các giá trị sin (sine), côsin (cosine), tang (tangent), côtang (cotangent) của góc nhọn;
- Cách tính tỉ số lượng giác của một số góc nhọn đặc biệt;
- Cách tính giá trị (đúng hoặc gần đúng) tỉ số lượng giác của góc nhọn bằng máy tính cầm tay;
- Mối liên hệ giữa các tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau;
- Cách giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn liền với tỉ số lượng giác của góc nhọn.

Bài 1 CÁC TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

Từ khoá: tỉ số lượng giác của góc nhọn, sin, côsin, tang, côtang, cạnh đối, cạnh kề, hai góc phụ nhau.

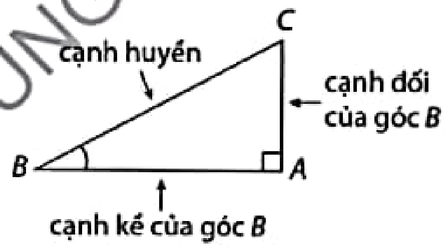
Theo quy chuẩn kĩ thuật quốc gia về xây dựng công trình đảm bảo cho người khuyết tật tiếp cận sử dụng (QCVN 10:2014/BXD), tỉ số giữa chiều cao h và chiều dài theo phương ngang d của dốc cho xe lăn không được lớn hơn $\frac{1}{12}$ như *Hình 4.1*. Nếu góc nghiêng của một con dốc so với phương ngang là $\alpha = 5°$ thì con dốc đó có đáp ứng được quy chuẩn trên không?



Hình 4.1

1 CÁC TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

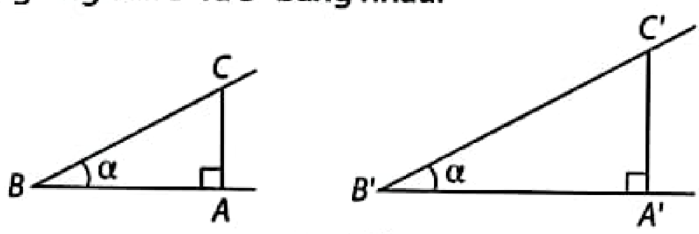
Cho tam giác ABC vuông tại A và xét góc nhọn B. Khi đó cạnh AB được gọi là *cạnh kề* của góc B, cạnh AC được gọi là *cạnh đối* của góc B (*Hình 4.2*).



Hình 4.2

HOẠT ĐỘNG 1

1. Vẽ một góc nhọn B có số đo α bất kì. Chọn một điểm C trên một cạnh và vẽ đường vuông góc CA từ C xuống cạnh còn lại (*Hình 4.3*). Hãy đo và tính các tỉ số cạnh đối và cạnh huyền, cạnh kề và cạnh huyền, cạnh đối và cạnh kề của góc B trong tam giác ABC.
2. Vẽ thêm một góc nhọn B' cũng có số đo α như trên và thực hiện tương tự.
3. Sử dụng dấu hiệu đồng dạng của hai tam giác vuông, hãy giải thích vì sao các cặp tỉ số tương ứng của $\widehat{B}$ và $\widehat{B'}$ bằng nhau.



Hình 4.3

Cho góc nhọn α. Nếu vẽ tam giác vuông bất kì có một góc nhọn bằng α thì các tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền, cạnh kề và cạnh huyền, cạnh đối và cạnh kề, cạnh kề và cạnh đối của góc α là xác định. Nói cách khác, các tỉ số này không phụ thuộc vào tam giác vuông được vẽ mà chỉ phụ thuộc vào số đo góc α.

Cho tam giác vuông có góc nhọn α, khi đó:

- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh huyền được gọi là *sin của góc* α, kí hiệu là $\sin\alpha$;
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh huyền được gọi là *côsin của góc* α, kí hiệu là $\cos\alpha$;
- Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề được gọi là *tang của góc* α, kí hiệu là $\tan\alpha$;
- Tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối được gọi là *côtang của góc* α, kí hiệu là $\cot\alpha$;

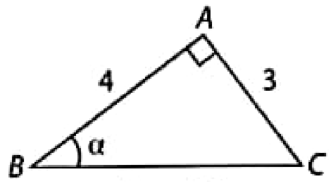
Các tỉ số $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$ được gọi là các *tỉ số lượng giác* của góc α.

Lưu ý:

1. Trong một tam giác vuông, độ dài các cạnh luôn là số dương và cạnh góc vuông luôn nhỏ hơn cạnh huyền. Do đó sin và côsin của một góc nhọn luôn dương và nhỏ hơn 1.
2. Để đơn giản, khi ghi các tỉ số lượng giác của một góc nhọn trong tam giác, ta sẽ bỏ kí hiệu "^" đi. Chẳng hạn, thay vì viết $\sin\widehat{A}$ thì ta viết $\sin A$.
3. $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$.

VÍ DỤ 1

Tính các tỉ số lượng giác của góc α trong *Hình 4.4*.



Hình 4.4

Bài giải

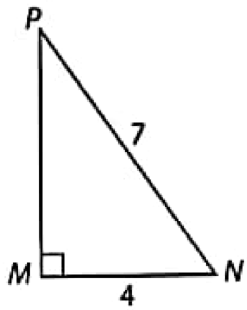
Vì ΔABC vuông tại A nên $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ (định lí Pythagore). Do đó $BC = 5$.

Suy ra: $\sin\alpha = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3}{5}$; $\cos\alpha = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{4}{5}$;

$\tan\alpha = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3}{4}$; $\cot\alpha = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4}{3}$.

LUYỆN TẬP 1

Tính các tỉ số lượng giác của góc N và góc P trong *Hình 4.5*.

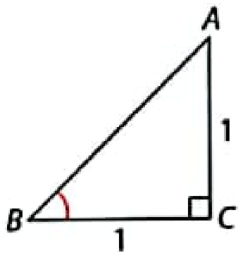


Hình 4.5

2 TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT SỐ GÓC ĐẶC BIỆT

HOẠT ĐỘNG 2

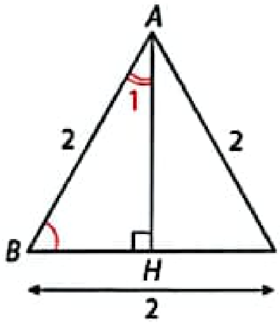
Trong *Hình 4.6*, tam giác ABC là tam giác gì? Xác định số đo và các tỉ số lượng giác của góc B.



Hình 4.6

HOẠT ĐỘNG 3

Trong *Hình 4.7*, tam giác ABC là tam giác gì? Xác định số đo và các tỉ số lượng giác của góc B và góc A_1.



Hình 4.7

Ta có bảng tỉ số lượng giác của một số góc nhọn đặc biệt:

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan 45^\circ = 1$	$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$
$\cot 30^\circ = \sqrt{3}$	$\cot 45^\circ = 1$	$\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

VÍ DỤ 2

Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ$ và AH là đường cao. Tính tỉ số $\frac{AH}{BH}$ và $\frac{AH}{CH}$, từ đó tìm $\frac{BH}{CH}$.

Bài giải *(Hình 4.8)*

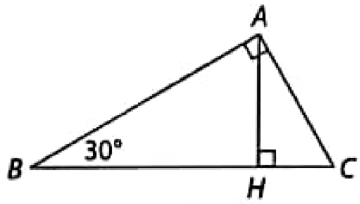
Xét ΔABH vuông tại H.

Ta có $\frac{AH}{BH} = \tan B = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$. (1)

Vì ΔABC vuông tại A nên $\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Vì ΔACH vuông tại H nên $\frac{AH}{CH} = \tan C = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$. (2)

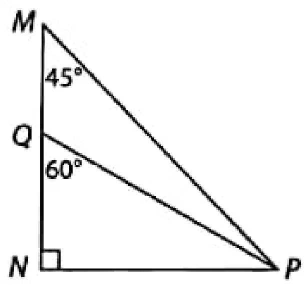
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BH}{CH} = \frac{AH}{CH} \cdot \frac{BH}{AH} = \sqrt{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = 3$.



Hình 4.8

LUYỆN TẬP 2

Trong *Hình 4.9*, hãy tính các tỉ số $\frac{PN}{PQ}$ và $\frac{PN}{PM}$, từ đó tìm $\frac{PQ}{PM}$.



Hình 4.9

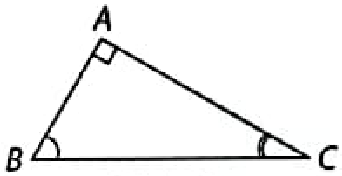
3 TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC PHỤ NHAU

HOẠT ĐỘNG 4

Cho tam giác ABC vuông tại A (*Hình 4.10*).

a) Tổng số đo của góc B và góc C bằng bao nhiêu độ?

b) Viết các tỉ số lượng giác của góc B và góc C, từ đó chỉ ra các cặp tỉ số lượng giác bằng nhau.



Hình 4.10

Hai góc được gọi là *hai góc phụ nhau* nếu tổng số đo của chúng bằng 90°. Định lí sau đây cho thấy mối liên hệ giữa các tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau:

Nếu hai góc phụ nhau thì sin của góc này bằng côsin của góc kia, tang của góc này bằng côtang của góc kia.

Lưu ý: Từ định lí trên, ta có:

$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$; $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$;

$\tan\alpha = \cot(90° - \alpha)$; $\cot\alpha = \tan(90° - \alpha)$.

VÍ DỤ 3

Viết các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của các góc nhỏ hơn 45°:

a) $\sin 53°$; b) $\tan 71°$.

Bài giải

a) $\sin 53° = \sin(90° - 37°) = \cos 37°$.

b) $\tan 71° = \tan(90° - 19°) = \cot 19°$.

LUYỆN TẬP 3

Viết các tỉ số lượng giác sau thành tỉ số lượng giác của các góc lớn hơn 45°:

a) $\cos 25°$; b) $\cot 31°$.

4 TÍNH CÁC TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC KHI BIẾT SỐ ĐO GÓC VÀ TÍNH SỐ ĐO GÓC KHI BIẾT TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC BẰNG MÁY TÍNH CẦM TAY

a) Tính tỉ số lượng giác khi biết số đo góc

Các giá trị tỉ số lượng giác của một góc nhọn bất kì có thể được tính dễ dàng bằng nhiều loại máy tính cầm tay khác nhau. Có nhiều đơn vị đo góc khác nhau nhưng trong chương trình Toán 9 ta chỉ sử dụng đơn vị độ. Do đó khi thực hiện tính các tỉ số lượng giác của một góc, cần chuyển máy tính về chế độ đơn vị đo góc là độ bằng cách bấm các phím như sau:

SHIFT + MENU (hoặc MODE) + 2 (Angle Unit) + 1 (Degree)

Ngoài đơn vị độ, người ta còn dùng đơn vị phút (′) và giây (″) để đo góc chính xác hơn với

$$1° = 60' \text{ và } 1' = 60''.$$

Để tính các tỉ số lượng giác sin, côsin và tang của một góc, ta sử dụng các phím sin, cos, tan. Để tính giá trị côtang của một góc α, ta tính tang của $90° - \alpha$ hoặc tính giá trị $\frac{1}{\tan\alpha}$.

VÍ DỤ 4

Sử dụng máy tính cầm tay, tính các tỉ số lượng giác sau:

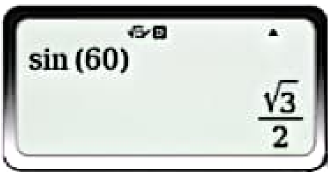
a) $\sin 60°$;

b) $\cot 25°15'35''$.

Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.

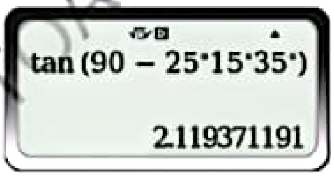
Bài giải

a) Bấm lần lượt các nút sin 6 0) =, ta được kết quả:



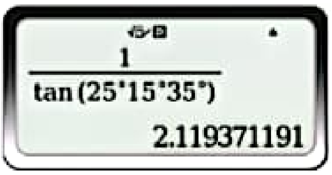
Do đó $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Bấm S⇔D, ta được giá trị gần đúng là $\sin 60° \approx 0{,}866$.

b) **Cách 1:** Bấm lần lượt các nút tan 9 0 − 2 5 °′″ 1 5 °′″ 3 5 °′″) =, ta được kết quả:



Do đó $\cot 25°15'35'' \approx 2{,}119$.

Cách 2: Bấm lần lượt các nút 1 ⬚/⬚ tan 2 5 °′″ 1 5 °′″ 3 5 °′″) =, ta được kết quả:



Do đó $\cot 25°15'35'' \approx 2{,}119$.

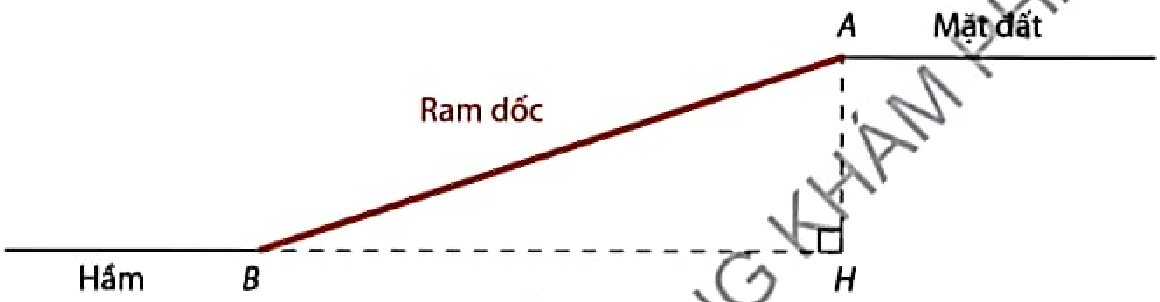
LUYỆN TẬP 4

Sử dụng máy tính cầm tay, hãy tính $\cos 13°$ và $\tan 71°25'$. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

VẬN DỤNG

Độ dốc của ram dốc *AB* từ mặt đất xuống tầng hầm được tính bằng tỉ số của chiều sâu *AH* và chiều dài *BH* của phần đường hầm dành để xây dựng ram dốc (*Hình 4.11*). Theo quy chuẩn kĩ thuật quốc gia về công trình ngầm đô thị (QCVN 08:2009/BXD, phần 2 – về gara ô tô), ram dốc thẳng cần có độ dốc không lớn hơn 18%. Em hãy cho biết ram dốc trong *Hình 4.11* có đạt chuẩn về độ dốc không, nếu góc nghiêng *ABH* của ram dốc so với phương ngang là:

a) 15°;　　　　　　　　b) 9°.



Hình 4.11

b) Tìm số đo góc khi biết tỉ số lượng giác

Khi biết tỉ số lượng giác của một góc nhọn, ta cũng có thể sử dụng máy tính cầm tay để tính số đo của góc nhọn đó. Để tìm góc nhọn α, ta bấm:

- SHIFT + sin và giá trị sin nếu biết $\sin\alpha$;
- SHIFT + cos và giá trị côsin nếu biết $\cos\alpha$;
- SHIFT + tan và giá trị tang nếu biết $\tan\alpha$;
- SHIFT + tan và nghịch đảo của giá trị côtang nếu biết $\cot\alpha$.

VÍ DỤ 5

Sử dụng máy tính cầm tay, hãy tìm góc nhọn α, biết:

a) $\sin\alpha = 0{,}6$;　　　　　　　　b) $\cot\alpha = 2$.

Làm tròn kết quả đến phút.

Bài giải

Chuyển máy tính về chế độ đơn vị đo góc là độ.

a) Để tính góc α có $\sin\alpha = 0{,}6$, ta bấm lần lượt các nút SHIFT sin 0 . 6) = và được số đo góc ở đơn vị độ. Bấm ° ' '' để hiển thị kết quả này theo độ, phút, giây, ta được:

$\sin^{-1}(0.6)$

36°52'11.63''

Vậy $\alpha \approx 36°52'$ (vì 11,63'' nhỏ hơn nửa phút).

b) Để tính góc α có $\cot\alpha = 2$, ta bấm lần lượt các nút SHIFT tan 1 ▭/▭ 2) = ° ' '' và được kết quả:

$\tan^{-1}(\frac{1}{2})$

26°33'54.18''

Vậy $\alpha \approx 26°34'$ (vì 54,18'' lớn hơn nửa phút).

LUYỆN TẬP 5

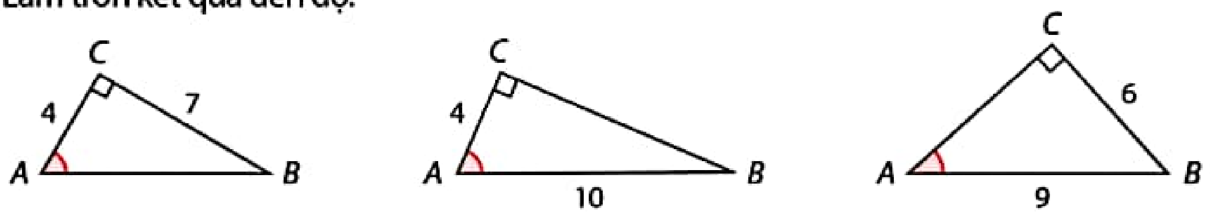
Sử dụng máy tính cầm tay, hãy tìm góc nhọn α, biết:

a) $\cos\alpha = 0{,}8$; b) $\tan\alpha = 5$.

Làm tròn kết quả đến giây.

LUYỆN TẬP 6

Xác định số đo góc nhọn A của tam giác vuông ABC trong mỗi trường hợp ở *Hình 4.12*. Làm tròn kết quả đến độ.

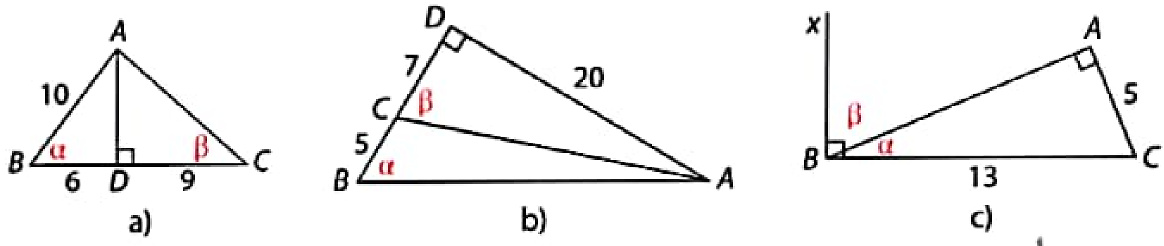


a) b) c)

Hình 4.12

BÀI TẬP

4.1. Tính tỉ số lượng giác của các góc α và β trong mỗi trường hợp ở *Hình 4.13*.



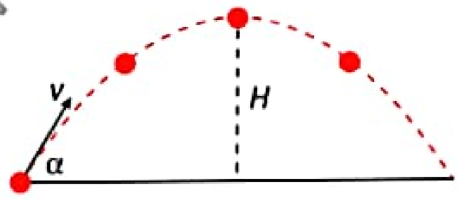
Hình 4.13

4.2. Sử dụng máy tính cầm tay, hãy tính và sắp xếp các tỉ số lượng giác sau theo thứ tự từ nhỏ đến lớn:

a) sin 56°, sin 10°, sin 48°, sin 14°;   b) cos 78°, cos 38°, cos 13°, cos 83°.

4.3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $\widehat{ABD} = 2\widehat{CBD}$. Hãy tính tỉ số chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật $ABCD$.

4.4. Khi một vật được ném xiên một góc α so với mặt đất và tốc độ ném ban đầu là v_0 (m/s) (*Hình 4.14*), độ cao lớn nhất H (m) mà vật có thể đạt đến được cho bởi công thức: $H = \frac{1}{20}v_0^2(\sin\alpha)^2$ (nguồn: *https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/Book%3A_Physics_(Boundless)/3%3A_Two-Dimensional_Kinematics/3.3%3A_Projectile_Motion*). Tính độ cao lớn nhất của vật nếu tốc độ ném ban đầu là 12 m/s và góc ném là:



Hình 4.14

a) 45°;   b) 30°;   c) 50°.

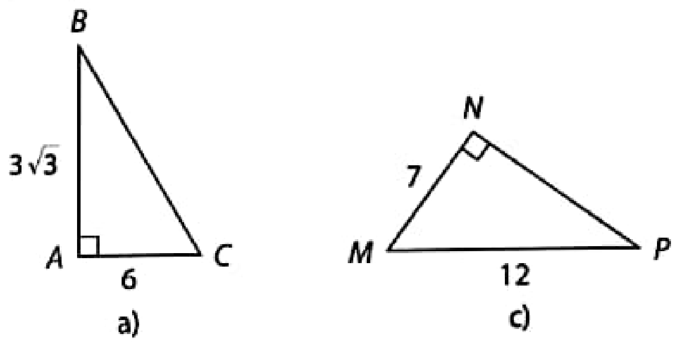
Làm tròn kết quả đến hàng phần mười mét.

4.5. Sử dụng máy tính cầm tay, tính số đo góc nhọn α, biết:

a) $\sin\alpha = 0{,}3$;   b) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$;   c) $\tan\alpha = \frac{5}{7}$;   d) $\cot\alpha = 4$.

Làm tròn số đo góc đến phút.

4.6. Tính số đo các góc nhọn của các tam giác vuông ở *Hình 4.15*.



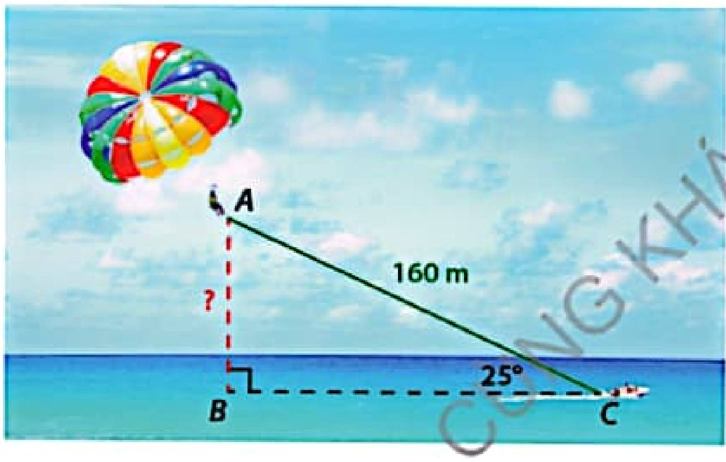
Hình 4.15

Làm tròn số đo góc đến độ.

Bài 2 MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Từ khoá: tỉ số lượng giác, hệ thức về cạnh và góc.

Ca nô dù bay là một trò chơi thể thao biển được ưa chuộng, trong đó người chơi được đeo dù và được ca nô kéo bay lên để thưởng ngoạn cảnh biển từ trên cao như *Hình 4.17*. Nếu biết độ dài *AC* của dây kéo và góc *ACB* tạo bởi dây và phương ngang, làm thế nào để tính được độ cao *AB* của người chơi so với mặt biển?



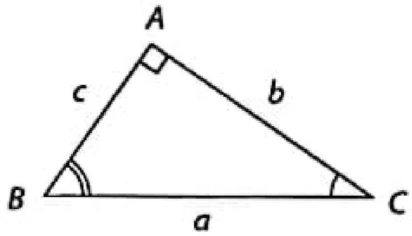
Hình 4.16

1 MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

HOẠT ĐỘNG 1

Cho ΔABC vuông tại *A* như *Hình 4.17*. Xác định tên các góc nhọn ở các ô $\boxed{?}$:

- Vì $\frac{b}{a} = \cos\boxed{?}$ nên $b = a.\cos\boxed{?}$;
- Vì $\frac{b}{a} = \sin\boxed{?}$ nên $b = a.\sin\boxed{?}$;
- Vì $\frac{b}{c} = \tan\boxed{?}$ nên $b = c.\tan\boxed{?}$;
- Vì $\frac{b}{c} = \cot\boxed{?}$ nên $b = c.\cot\boxed{?}$.



Hình 4.17

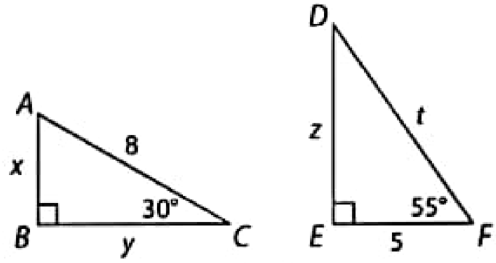
Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông bằng:

a) Cạnh huyền nhân với sin góc đối hoặc nhân với côsin góc kề;

b) Cạnh góc vuông còn lại nhân với tang góc đối hoặc côtang góc kề.

VÍ DỤ 1

Tính các độ dài x, y, z, t trong *Hình 4.18*.
Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



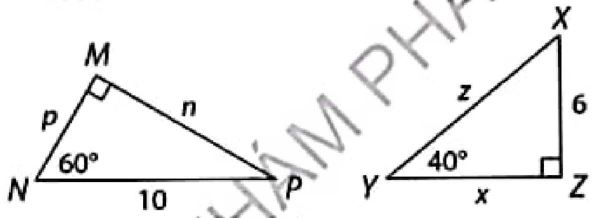
Hình 4.18

Bài giải

- Vì ΔABC vuông tại B nên:
$x = AB = AC.\sin C = 8.\sin 30° = 4$; $y = BC = AC.\cos C = 8.\cos 30° = 4\sqrt{3} \approx 6,93$.
- Vì ΔDEF vuông tại E nên:
$z = DE = EF.\tan F = 5.\tan 55° \approx 7,14$; $t = DF = \dfrac{EF}{\cos F} = \dfrac{5}{\cos 55°} \approx 8,72$.

LUYỆN TẬP 1

Tính các độ dài n, p, x, z trong *Hình 4.19*.
Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Hình 4.19

VẬN DỤNG 1

Quay lại bài toán ở phần Khởi động. Góc tạo bởi dây kéo dù bay và phương ngang là $\widehat{ACB} = 25°$.

a) Tính độ cao AB của dù bay nếu dây kéo AC dài 160 m.

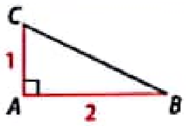
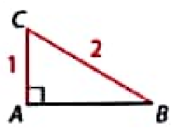
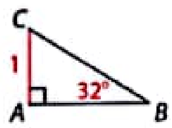
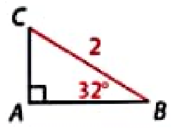
b) Nếu muốn bay cao 75 m thì dây kéo phải dài bao nhiêu mét?

Làm tròn kết quả đến hàng phần mười mét.

2 GIẢI TAM GIÁC VUÔNG

HOẠT ĐỘNG 2

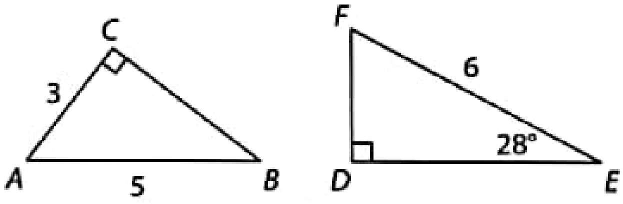
Trong mỗi trường hợp dưới đây, hãy xác định độ dài các cạnh và số đo góc ở các ô [?]. Làm tròn số đo góc đến độ và độ dài cạnh đến hàng phần mười. Cho biết em đã sử dụng hệ thức, định lí nào để tính.

	AB	AC	BC	$\widehat{B}$	$\widehat{C}$
	2	1	?	?	?
	?	1	2	?	?
	?	1	?	32°	?
	?	?	2	32°	?

Bài toán xác định số đo tất cả các góc và độ dài tất cả các cạnh của một tam giác vuông được gọi là bài toán *giải tam giác vuông*. Ta có thể giải được một tam giác vuông nếu biết độ dài của hai cạnh bất kì hoặc độ dài một cạnh cùng với số đo một góc nhọn bất kì của nó.

VÍ DỤ 2

Giải các tam giác vuông ABC và DEF trong *Hình 4.20*. Làm tròn số đo góc đến độ và độ dài cạnh đến hàng phần mười.



Hình 4.20

Bài giải

- Vì ΔABC vuông tại C nên:

  $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (định lí Pythagore);

  $\cos A = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$. Suy ra $\widehat{A} \approx 53°$.

  Suy ra $\widehat{B} = 90° - \widehat{A} \approx 37°$.

- Vì ΔDEF vuông tại D nên:

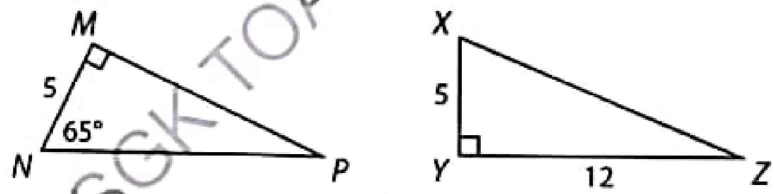
  $DE = EF.\cos E = 6.\cos 28° \approx 5{,}3$;

  $DF = EF.\sin E = 6.\sin 28° \approx 2{,}8$.

  Suy ra $\widehat{F} = 90° - \widehat{E} = 90° - 28° = 62°$.

LUYỆN TẬP 2

Giải các tam giác vuông MNP và XYZ trong *Hình 4.21*. Làm tròn số đo góc đến độ và độ dài cạnh đến hàng phần mười.



Hình 4.21

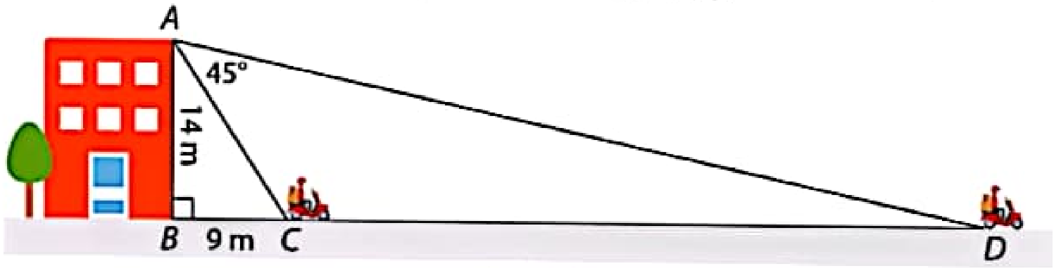
VẬN DỤNG 2

Trong *Hình 4.22*, một người đứng từ sân thượng toà nhà và quan sát một người đi xe máy từ vị trí C đến D.

a) Giải tam giác vuông ABD.

b) Tính tốc độ của xe máy, biết thời gian xe đi từ C đến D là 6,5 giây.

Làm tròn số đo góc đến độ và độ dài cạnh đến hàng phần mười mét.



Hình 4.22

BÀI TẬP

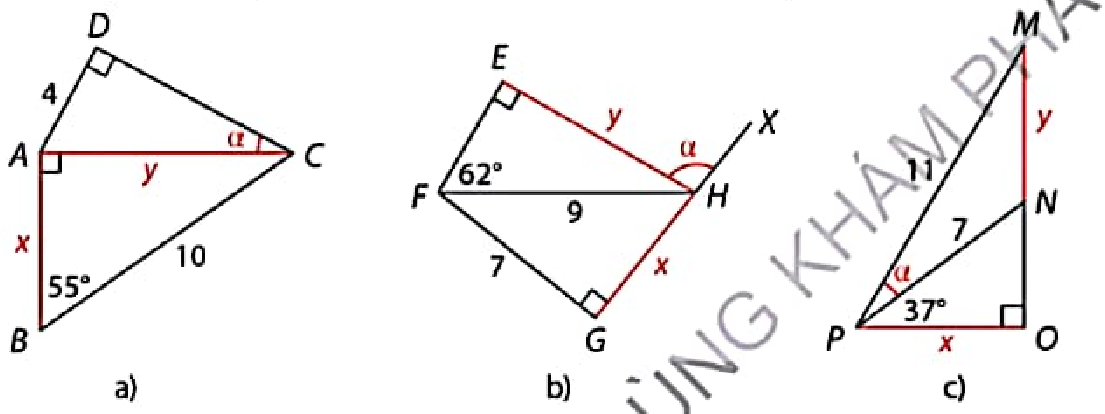
Trong các bài tập dưới đây, làm tròn số đo góc đến phút và độ dài đến hàng phần mười của đơn vị đo độ dài được cho.

4.7. Giải tam giác ABC vuông tại A, biết:

a) $AC = 11$ cm, $\widehat{C} = 60°$; b) $BC = 20$ cm, $\widehat{C} = 35°$;

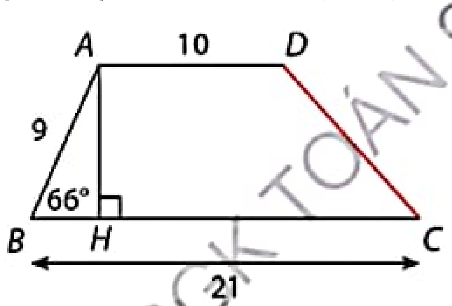
c) $AB = 7$ cm, $AC = 12$ cm; d) $AB = 9$ cm, $BC = 20$ cm.

4.8. Tính độ dài cạnh x, y và số đo góc α trong mỗi trường hợp ở *Hình 4.23*.



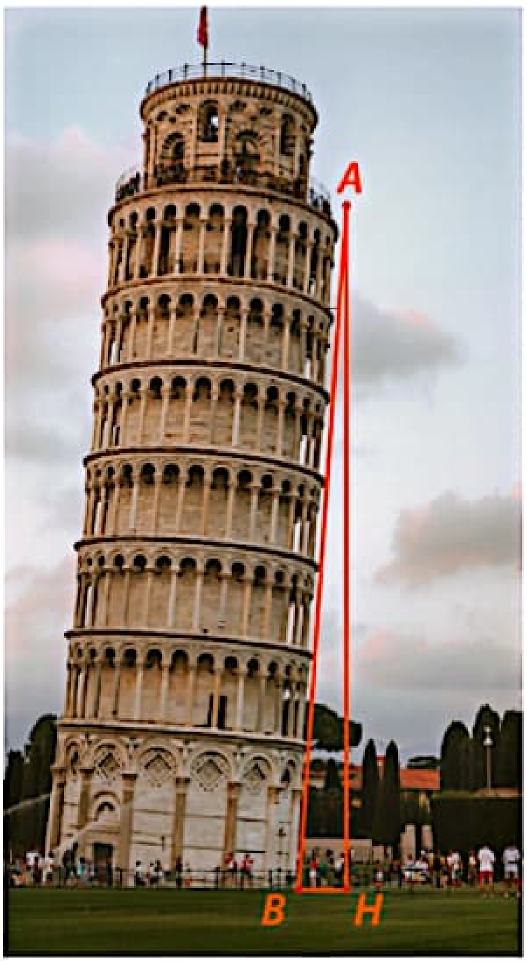
Hình 4.23

4.9. Tính độ dài cạnh bên CD của hình thang $ABCD$ trong *Hình 4.24*.



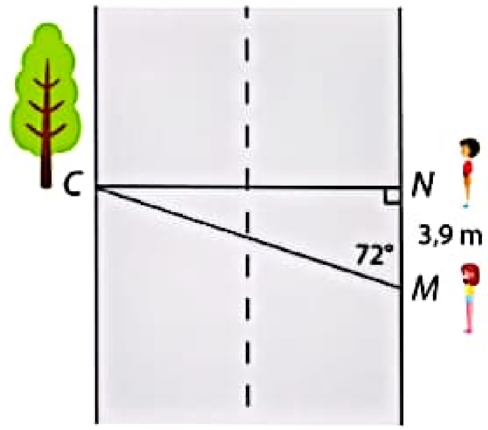
Hình 4.24

4.10. Người ta kể lại rằng, vào thế kỉ XVI, nhà khoa học Galileo đã thả rơi các quả cầu cùng thể tích từ tháp nghiêng Pisa xuống mặt đất. Ông phát hiện ra hiện tượng lí thú rằng thời gian một vật rơi tự do không phụ thuộc vào cân nặng của vật đó (nguồn: *https://www.britannica.com/summary/Galileo-Timeline*). Biết chiều cao của tháp nghiêng Pisa ở phía thấp hơn là $AH = 55{,}9$ m và góc nghiêng BAH của tháp so với phương thẳng đứng là khoảng $4°$ (*Hình 4.25*), nếu thả một quả bóng từ vị trí A trên đỉnh tháp xuống đất thì bóng sẽ chạm đất cách điểm B ở chân tháp là bao nhiêu mét?



Hình 4.25

4.11. Trong *Hình 4.26*, bạn Mai và bạn Nam đứng ở vị trí điểm *M* và *N* ở cùng một bên lề đường và cây xanh *C* nằm đối diện vị trí Nam đứng ở phía bên kia đường. Tính chiều rộng *NC* của con đường.

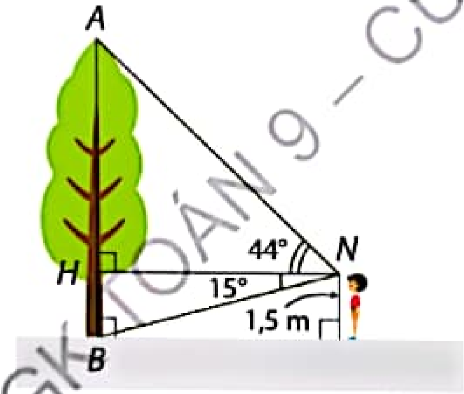


Hình 4.26

4.12. Quan sát *Hình 4.27* và tính:

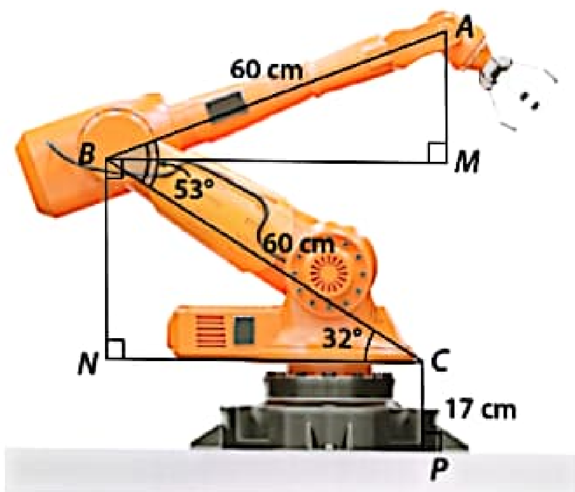
a) Khoảng cách *NH* giữa bạn Nam và cây;

b) Chiều cao *AB* của cây.



Hình 4.27

4.13. Cánh tay rô-bốt đặt trên mặt đất và có vị trí như *Hình 4.28*. Tính độ cao của điểm *A* trên đầu cánh tay rô-bốt so với mặt đất.



Hình 4.28

ÔN TẬP CHƯƠNG 4

BÀI TẬP TỰ LUẬN

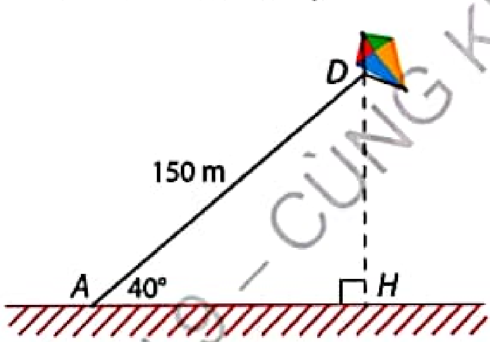
Trong các bài tập dưới đây, làm tròn số đo góc đến phút và độ dài đến hàng phần mười của đơn vị đo độ dài được cho.

4.14. Tính số đo các góc nhọn của tam giác vuông, biết:

a) Tỉ số giữa hai cạnh góc vuông là $\frac{5}{7}$;

b) Tỉ số giữa một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng $\frac{2}{5}$.

4.15. Trong *Hình 4.29*, một cánh diều được thả trên bầu trời với chiều dài dây là $AD = 150$ m, góc tạo bởi dây diều và phương nằm ngang là $\widehat{DAH} = 40°$. Tính độ cao DH của cánh diều so với mặt đất.

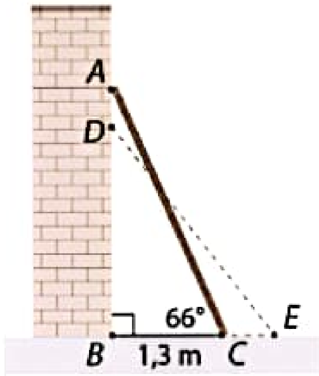


Hình 4.29

4.16. Một chiếc thang AC được dựng vào một bức tường thẳng đứng (*Hình 4.30*).

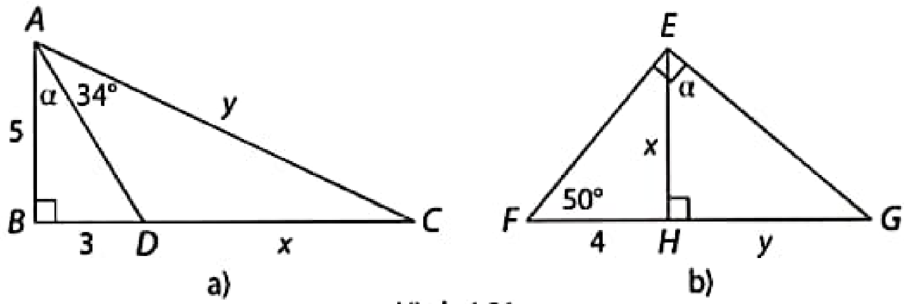
a) Ban đầu khoảng cách từ chân thang đến tường là $BC = 1{,}3$ m và góc tạo bởi thang và phương nằm ngang là $\widehat{ACB} = 66°$, tính độ dài của thang.

b) Nếu đầu A của thang bị trượt xuống 40 cm đến vị trí D thì góc DEB tạo bởi thang và phương nằm ngang khi đó bằng bao nhiêu?



Hình 4.30

4.17. Tính số đo góc α và các độ dài x, y trong mỗi trường hợp ở *Hình 4.31*.

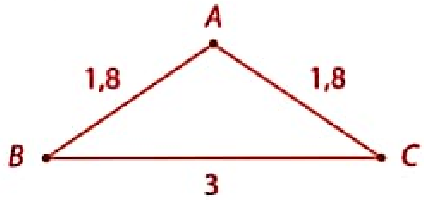


Hình 4.31

4.18. Trong *Hình 4.32*, mặt tiền mái nhà có chiều rộng $BC = 3$ m và hai bên mái AB, AC cùng bằng 1,8 m.

a) Tính chiều cao AH của mái nhà.

b) Tính góc BAC tạo bởi hai mép của mái nhà.



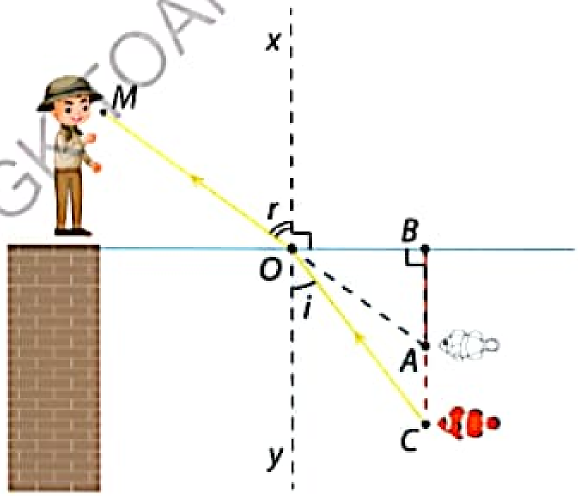
Hình 4.32

4.19. Khi tia sáng được truyền qua mặt phân cách giữa không khí và nước thì đường đi tia sáng sẽ bị lệch đi do hiện tượng khúc xạ ánh sáng. Góc tới i và góc khúc xạ r như *Hình 4.33* liên hệ với nhau theo công thức $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{3}{4}$.

Một con cá bơi ở vị trí C. Do ánh sáng bị khúc xạ nên Minh đứng trên bờ nhìn xuống nước với góc $r = 54°$ thì thấy con cá ở vị trí A thẳng hàng với O, M và cách mặt nước một đoạn $AB = 71$ cm.

a) Tính góc tới i.

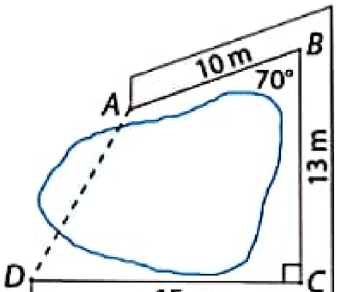
b) Tính độ sâu BC từ mặt nước đến vị trí thực sự mà con cá đang bơi.



Hình 4.33

4.20. Người ta làm một con đường gồm có ba đoạn AB, BC, CD bao quanh hồ nước như *Hình 4.34*. Tính khoảng cách AD.

Gợi ý: Từ điểm A, kẻ đường vuông góc AH xuống BC và AK xuống CD.



Hình 4.34

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

4.21. Cho tam giác vuông có góc nhọn α. Tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề của góc α là

A. $\sin\alpha$. B. $\cos\alpha$.

C. $\tan\alpha$. D. $\cot\alpha$.

4.22. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = 10$ cm, $BC = 15$ cm. Khi đó $\sin B$ bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

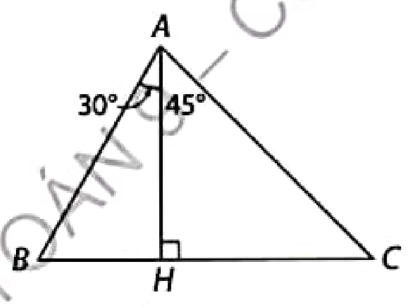
C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{5}{3}$.

4.23. Góc nhọn α có $\cot\alpha = \sqrt{3}$. Số đo của góc α là

A. $30°$. B. $60°$.

C. $45°$. D. $75°$.

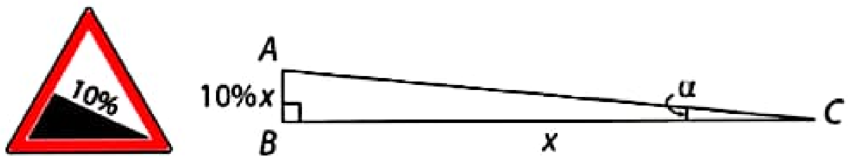
4.24. Trong *Hình 4.35*, tỉ số $\frac{BC}{AH}$ bằng



Hình 4.35

A. $\frac{\sqrt{3}}{3} + 1$. B. $\sqrt{3} + 1$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$. D. $\sqrt{2} + 1$.

4.25. Trong các biển báo dốc nguy hiểm, độ nghiêng của dốc thường được ghi ở dạng phần trăm. Chẳng hạn độ nghiêng 10% nghĩa là dốc có chiều cao AB bằng 10% độ dài BC (*Hình 4.36*). Dốc 10% có góc nghiêng α so với phương nằm ngang (làm tròn đến đơn vị độ) là



Hình 4.36

A. $12°$. B. $10°$. C. $8°$. D. $6°$.

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

Chọn một trong hai mục để thực hành trải nghiệm.

1 SỬ DỤNG GEOGEBRA ĐỂ VẼ VÀ GIẢI TAM GIÁC VUÔNG

Mục tiêu: Sử dụng GeoGebra để vẽ và giải tam giác vuông.

Yêu cầu chuẩn bị: Máy tính có cài đặt phần mềm GeoGebra Classic phiên bản từ 5.0 về sau hoặc kết nối Internet để vào trang *https://www.geogebra.org/classic?lang=vi.*

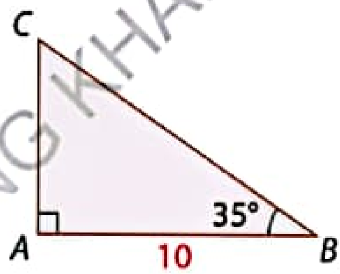
Tổ chức hoạt động:

HOẠT ĐỘNG 1

Vẽ và giải tam giác vuông khi biết độ dài một cạnh và một góc nhọn

Học sinh làm việc cá nhân.

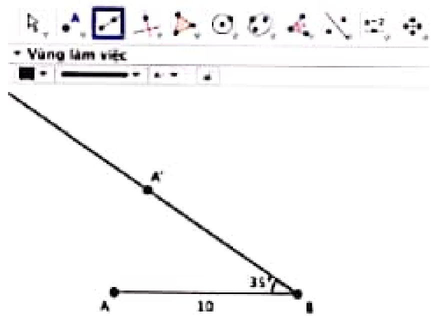
Ví dụ: Vẽ và giải tam giác vuông có một cạnh góc vuông bằng 10 và góc nhọn bằng 35°.



Bước 1 Sử dụng bấm vào một điểm trong vùng làm việc và nhập độ dài 10 vào hộp thoại để vẽ đoạn thẳng $AB = 10$.

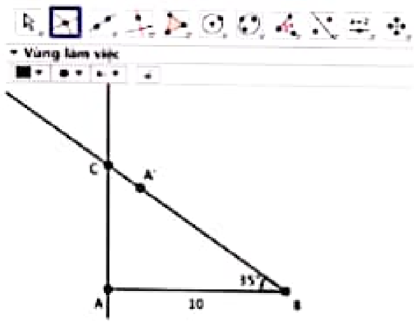
Bước 2 Sử dụng bấm lần lượt vào các điểm A, B và nhập số đo góc 35° cùng lựa chọn "Cùng chiều kim đồng hồ" để xác định điểm A' sao cho $\widehat{ABA'} = 35°$.

Sử dụng để vẽ tia BA'.

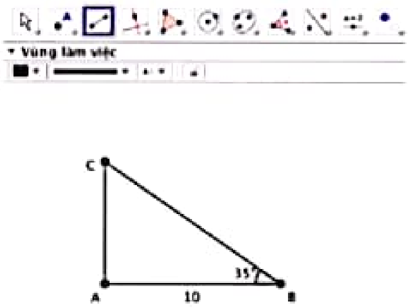


Bước 3 Sử dụng bấm vào điểm A và đoạn thẳng AB để vẽ đường thẳng đi qua A vuông góc AB.

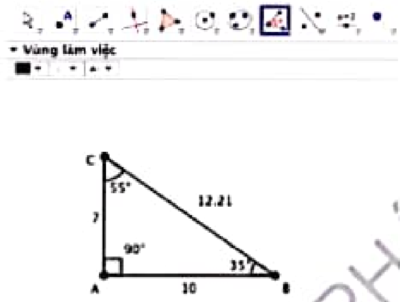
Sử dụng để xác định giao điểm C của đường thẳng vừa vẽ và BA'.



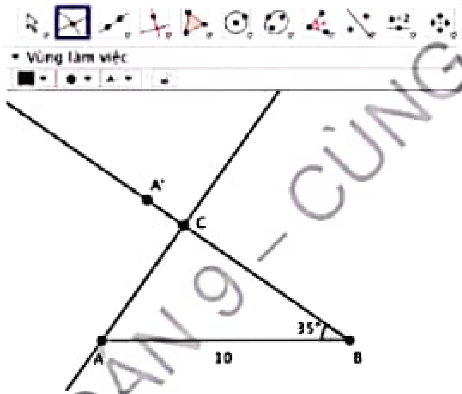
Bước 4 Ẩn các đường và điểm phụ, sử dụng [icon] để vẽ cạnh AC, BC.



Bước 5 Hiển thị độ dài các cạnh, sử dụng [icon] để hiển thị số đo các góc của ΔABC.



Lưu ý: Ở Bước 3, nếu vẽ đường thẳng qua A vuông góc $A'B$ thay vì AB thì ta được tam giác ABC vuông tại C có góc nhọn $\widehat{B} = 35°$ và cạnh huyền $AB = 10$.

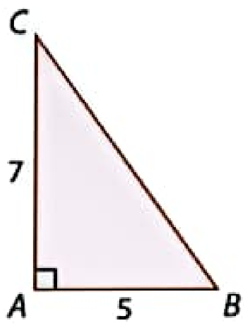


HOẠT ĐỘNG 2

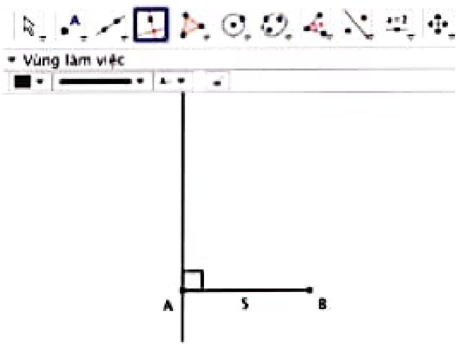
Vẽ và giải tam giác vuông khi biết độ dài hai cạnh

Học sinh làm việc cá nhân.

Ví dụ: Vẽ và giải tam giác vuông có hai cạnh góc vuông lần lượt bằng 5 và 7.

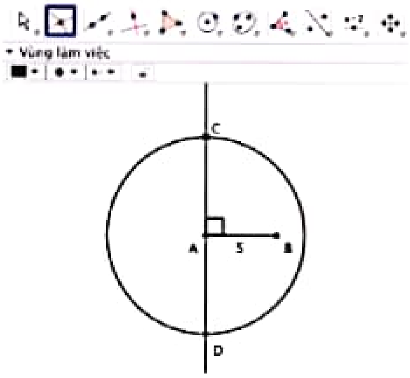


Bước 1 Sử dụng [icon] và [icon] để vẽ đoạn thẳng AB có độ dài bằng 5 và đường thẳng qua A vuông góc AB.



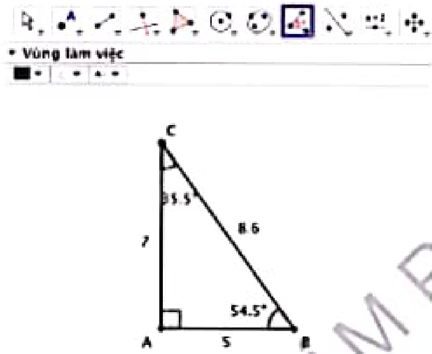
Bước 2 Sử dụng bấm vào A và nhập bán kính 7 để vẽ đường tròn tâm A bán kính 7.

Sử dụng để xác định giao điểm của đường tròn vừa vẽ và đường thẳng vẽ được ở Bước 1.

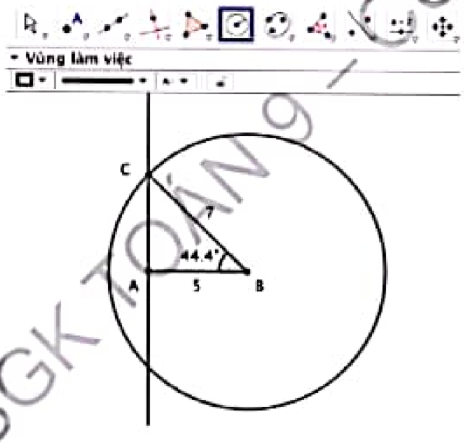


Bước 3 Ẩn các đường và điểm phụ, sử dụng để vẽ cạnh AC và BC.

Hiển thị độ dài các cạnh và sử dụng để hiển thị số đo các góc của ΔABC.



Lưu ý: Ở Bước 2, nếu vẽ đường tròn có bán kính 7 cm với tâm ở B thay vì ở A thì ta được tam giác vuông ABC với cạnh góc vuông $AB = 5$ và cạnh huyền $BC = 7$.



HOẠT ĐỘNG 3

Trò chơi bảng lượng giác

Lớp được chia thành nhiều nhóm, mỗi nhóm có 4 thành viên. Mỗi nhóm vẽ một bảng có 9 ô trống như *Bảng 4.2* vào giấy, sau đó lựa chọn 9 ô trong số các ô ở *Bảng 4.1* để điền vào bảng của mình.

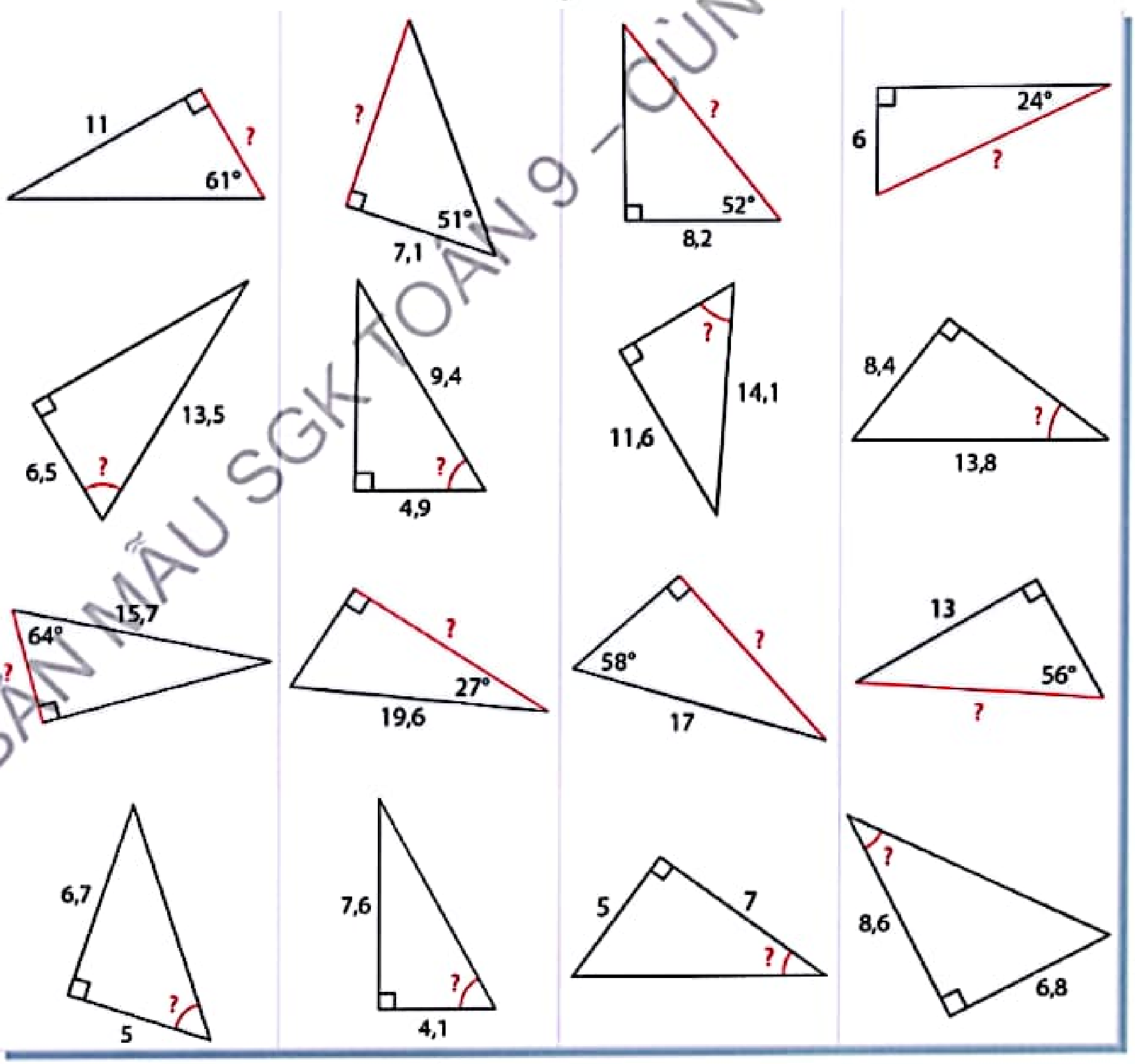
Bảng 4.1

67,1°	53,5°	35,5°	38,3°
58,6°	61,2°	55,4°	37,5°
8,8 cm	6,1 cm	13,5 cm	14,8 cm
17,5 cm	6,9 cm	14,4 cm	15,7 cm

Bảng 4.2

Giáo viên lần lượt cho một trong các hình vẽ ở *Bảng 4.3*. Trong vòng 3 phút, các nhóm thực hiện vẽ hình trên GeoGebra và tìm đáp số. Nếu đáp số có ở ô nào đó trong bảng của mình thì đánh dấu "X" vào ô đó. Nhóm đánh dấu được toàn bộ các ô trong bảng của mình sớm nhất sẽ là nhóm chiến thắng.

Bảng 4.3



2 ĐO CHIỀU CAO CỦA CỘT CỜ BẰNG GIÁC KẾ

Mục tiêu: Tự làm giác kế đứng và sử dụng để đo chiều cao cột cờ.

Yêu cầu chuẩn bị:

- Thước đo độ, ống hút, dụng cụ đục lỗ, keo dán;
- Giấy, bút, máy tính.

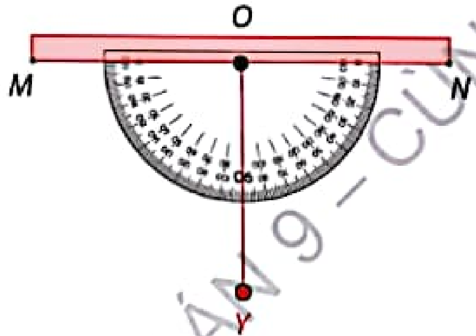
Tổ chức hoạt động: Học sinh thực hiện theo nhóm, mỗi nhóm có 4 – 6 bạn.

HOẠT ĐỘNG 1

Làm giác kế đứng

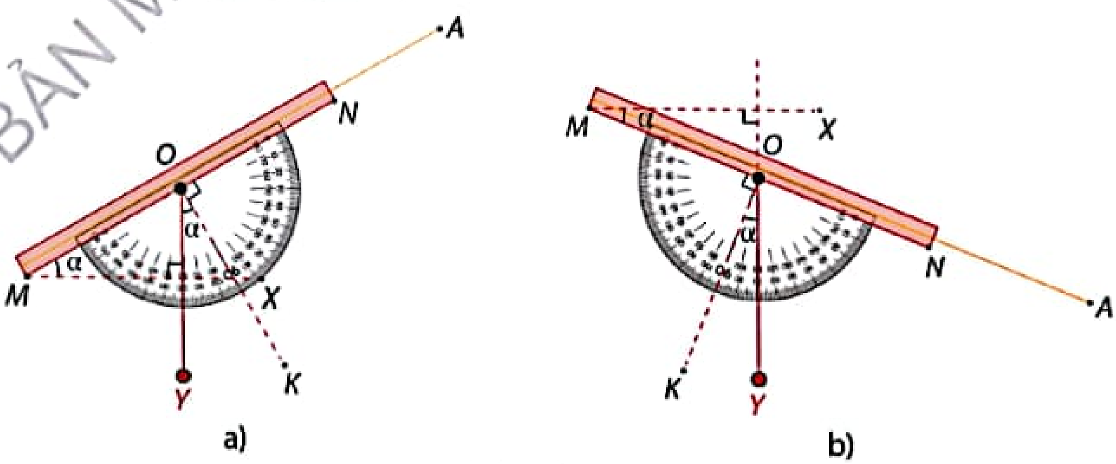
Học sinh thực hiện tại lớp hoặc chuẩn bị ở nhà.

Ở gốc O của thước đo độ, đục lỗ và gắn một sợi dây nhẹ. Đầu còn lại treo một vật Y đủ nặng để dây OY luôn vuông góc mặt đất (OY được gọi là dây dọi). Xẻ một đoạn trên thân ống hút MN đủ để gắn thước đo độ vào ống để làm ống ngắm như *Hình 4.37*.



Hình 4.37

Câu hỏi: Khi sử dụng giác kế đứng, người ta đặt mắt ở vị trí M và hướng ống ngắm MN về phía điểm A cần quan sát như trong *Hình 4.38*. Góc AMX giữa hướng nhìn và phương ngang được gọi là *góc nâng* của A (so với M) nếu hướng nhìn xiên lên trên (*Hình 4.38a*) hoặc gọi là *góc hạ* của A (so với M) nếu hướng nhìn xiên xuống dưới (*Hình 4.38b*). Vì sao góc AMX luôn bằng góc KOY tạo bởi dây dọi và tia OK đi qua vạch 90°?

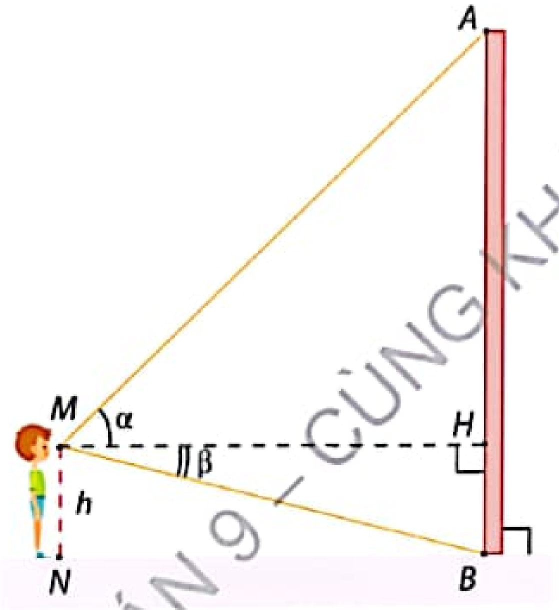


Hình 4.38

HOẠT ĐỘNG 2

Chứng minh công thức tính chiều cao cột cờ sử dụng chiều cao của người quan sát và góc nâng, góc hạ

Học sinh thực hiện và trình bày tại lớp lời giải cho bài toán sau: Trong *Hình 4.39*, chiều cao từ mắt đến mặt đất của bạn học sinh là $MN = h$ (m), góc nâng của đỉnh cột A là α và góc hạ của chân cột B là β. Giải thích vì sao $AB = h\left(1 + \dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}\right)$.



Hình 4.39

HOẠT ĐỘNG 3

Đo chiều cao cột cờ

Học sinh thực hiện ngoài trời và trình bày kết quả trước cả lớp.

- Sử dụng giác kế và thước để đo góc nâng α của đỉnh cột cờ, góc hạ β của chân cột cờ và chiều cao h tính từ mắt bạn quan sát đến mặt đất.
- Điền các kết quả đo được vào *Bảng 4.4* và tính chiều cao cột AB bằng công thức có được từ Hoạt động 2.
- Thực hiện nhiều lần với nhiều bạn khác nhau và vị trí quan sát khác nhau. So sánh các kết quả tính và nhận xét.

Bảng 4.4

Số thứ tự	Góc nâng α	Góc hạ β	Độ cao h	Chiều cao cột cờ
1	...	...	...	...

Chương 5 Đường tròn

Trống đồng Đông Sơn là một trong những hình ảnh tiêu biểu và là niềm tự hào của nền văn hoá dân tộc Việt Nam. Mặt trống hình tròn và được chia thành nhiều vành bằng các đường tròn đồng tâm. Mỗi vành được chạm trổ tinh xảo với các hoa văn mô tả hình ảnh muông thú, con người và các hoạt động sinh động thường ngày của người Việt cổ.

Cùng tìm hiểu

- Tâm đối xứng, trục đối xứng của đường tròn;
- Mối liên hệ giữa độ dài của đường kính và dây;
- Vị trí tương đối của hai đường tròn và của đường thẳng với đường tròn;
- Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn và tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau;
- Khái niệm góc ở tâm, góc nội tiếp và mối liên hệ giữa số đo của chúng với số đo của cung chắn bởi chúng;
- Độ dài cung và diện tích hình quạt tròn, hình vành khuyên.

Bài 1 ĐƯỜNG TRÒN

Từ khoá: đường tròn, tâm đối xứng, trục đối xứng, đường kính, dây.

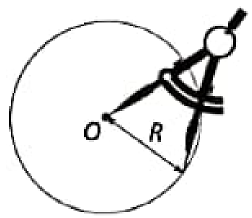
Khi được chụp từ trên xuống, mặt của một ổ bánh mì có dạng hình tròn. Bánh mì được cắt thành nhiều lát như trong *Hình 5.1*. Đường cắt nào là dài nhất?

Hình 5.1

1 TÂM ĐỐI XỨNG VÀ TRỤC ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Ta có định nghĩa của đường tròn như sau:

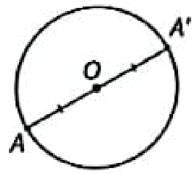
Đường tròn tâm O, bán kính R ($R > 0$) là hình gồm tất cả các điểm trên mặt phẳng cách O một khoảng bằng R. Đường tròn tâm O, bán kính R được kí hiệu là $(O; R)$ hoặc (O).



Hình 5.2

HOẠT ĐỘNG 1

Lấy điểm A bất kì trên đường tròn và xác định điểm A' sao cho O là trung điểm của đoạn thẳng AA' (*Hình 5.3*). Điểm A' có nằm trên đường tròn không? Vì sao?



Hình 5.3

Hai điểm được gọi là đối xứng nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó. Ta quy ước điểm đối xứng với điểm O qua O cũng chính là O.
Điểm O được gọi là *tâm đối xứng* của hình $\mathcal{H}$ nếu điểm đối xứng của mỗi điểm thuộc hình $\mathcal{H}$ cũng thuộc hình $\mathcal{H}$.

Từ Hoạt động 1, ta có tính chất sau về tính đối xứng tâm của đường tròn.

Đường tròn là hình có tâm đối xứng. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.

VÍ DỤ 1

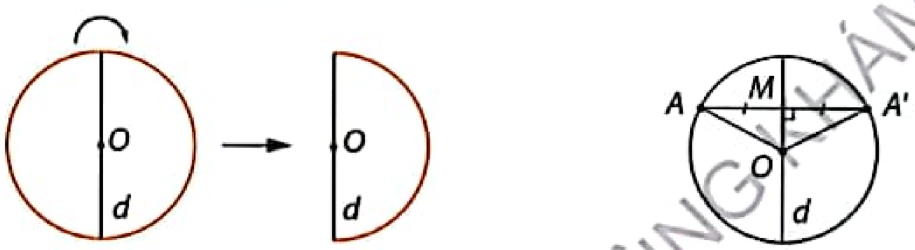
Tâm đối xứng của đường tròn trong *Hình 5.3* chính là tâm O của đường tròn. Điểm đối xứng của điểm A qua tâm O là điểm A'.

LUYỆN TẬP 1

Đường tròn có đường kính *AB*. Xác định tâm đối xứng của đường tròn.

HOẠT ĐỘNG 2

1. Cắt một hình tròn có tâm *O* bằng giấy và kẻ một đường kính *d* bất kì. Gấp đôi hình tròn theo đường kính vừa vẽ (*Hình 5.4a*). Hai nửa đường tròn có chồng khít lên nhau không?
2. Lấy điểm *A* bất kì trên đường tròn và xác định điểm *A'* sao cho đường kính *d* là đường trung trực của đoạn thẳng *AA'*. So sánh *OA* với *OA'* và cho biết điểm *A'* có nằm trên đường tròn không?



a) b)

Hình 5.4

Hai điểm được gọi là đối xứng nhau qua đường thẳng *d* nếu *d* là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó. Ta quy ước nếu điểm *A* nằm trên đường thẳng *d* thì điểm đối xứng của *A* qua đường thẳng *d* chính là *A*.

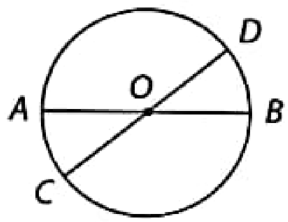
Đường thẳng *d* được gọi là *trục đối xứng* của hình $\mathcal{H}$ nếu điểm đối xứng của mỗi điểm thuộc hình $\mathcal{H}$ qua đường thẳng *d* cũng thuộc hình $\mathcal{H}$.

Từ Hoạt động 2, ta có tính chất sau về tính đối xứng trục của đường tròn:

Đường tròn là hình có trục đối xứng. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.

VÍ DỤ 2

Trong *Hình 5.5*, *AB* và *CD* là hai trục đối xứng của đường tròn (*O*).



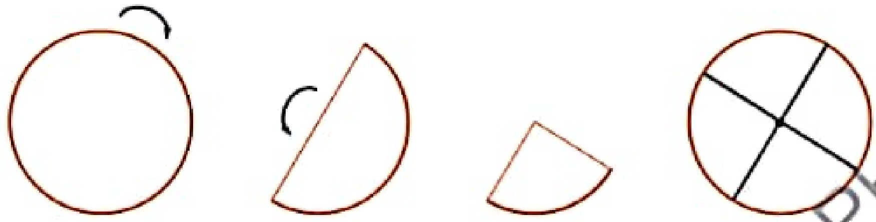
Hình 5.5

LUYỆN TẬP 2

Vẽ đường tròn (*O*) và vẽ bốn trục đối xứng khác nhau của (*O*). Đường tròn (*O*) có bao nhiêu trục đối xứng?

VẬN DỤNG 1

Bạn An gấp đôi tờ giấy hình tròn sao cho mép của hai nửa hình tròn trùng lên nhau, sau đó tiếp tục gấp đôi để xác định trung điểm của đường gấp đầu tiên (*Hình 5.6*). Bạn An khẳng định rằng giao điểm của các đường gấp sau khi mở giấy chính là tâm của hình tròn ban đầu. Em hãy giải thích vì sao?



Hình 5.6

2 ĐƯỜNG KÍNH VÀ DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

HOẠT ĐỘNG 3

Trong *Hình 5.7*, khung cửa sổ có dạng hình tròn. Đầu mút của thanh song cửa *AB* nằm trên đường nào?

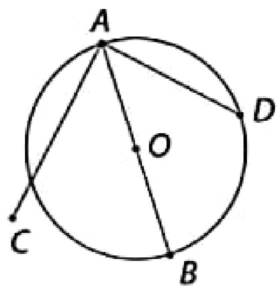
Hình 5.7

Các song cửa sổ trong *Hình 5.7* cho ta hình ảnh các dây của một đường tròn.
Đoạn thẳng nối hai điểm phân biệt của đường tròn được gọi là một *dây* của đường tròn đó.

Lưu ý: Đường kính cũng là một dây của đường tròn.

VÍ DỤ 3

Trong *Hình 5.8*, *AB* và *AD* là hai dây của đường tròn (*O*), *AC* không là dây của đường tròn (*O*).



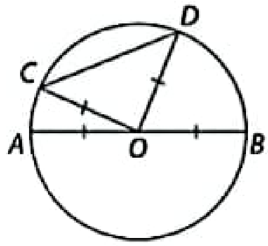
Hình 5.8

LUYỆN TẬP 3

Trên đường tròn (*O*), lấy bốn điểm *M*, *N*, *P*, *Q* phân biệt. Vẽ và nêu tên tất cả các dây của (*O*) có đầu mút là hai trong số bốn điểm trên.

HOẠT ĐỘNG 4

Trong *Hình 5.9*, lần lượt so sánh độ dài dây CD, đường kính AB với tổng độ dài $OC + OD$, em hãy cho biết trong hai dây AB và CD, dây nào dài hơn.



Hình 5.9

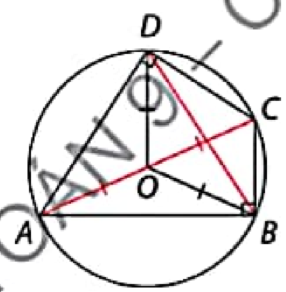
Ta có định lí sau về mối liên hệ giữa độ dài đường kính và độ dài dây của một đường tròn:

Trong các dây của một đường tròn, đường kính là dây lớn nhất.

VÍ DỤ 4

Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{B}$ và $\widehat{D}$ là các góc vuông. Chứng minh rằng $BD \leq AC$.

Bài giải



Hình 5.10

Gọi O là trung điểm của AC.

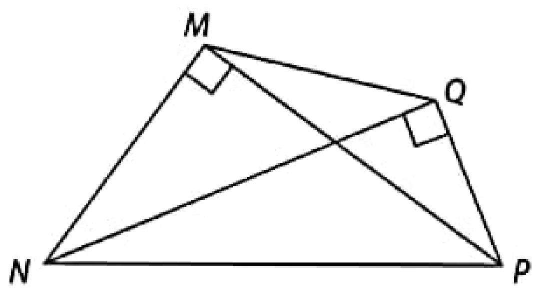
Vì ΔABC và ΔADC có cùng cạnh huyền là AC và BO, DO lần lượt là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $OB = OA = OC = OD$ (tính chất trung tuyến ứng với cạnh huyền).

Suy ra B, D thuộc đường tròn đường kính AC (*Hình 5.10*).

Suy ra $BD \leq AC$ (liên hệ độ dài đường kính và dây).

LUYỆN TẬP 4

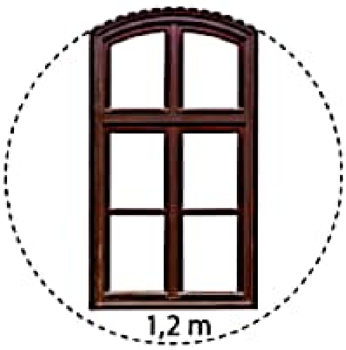
So sánh độ dài hai cạnh MQ và NP trong *Hình 5.11*.



Hình 5.11

VẬN DỤNG 2

Cửa sổ được thiết kế với phần vòm bên trên là một phần của một đường tròn (*Hình 5.12*). Nếu chiều rộng cửa là 1,2 m thì bán kính của đường tròn nói trên ít nhất bằng bao nhiêu mét?



Hình 5.12

BÀI TẬP

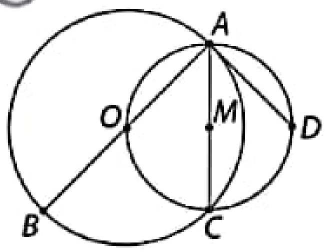
5.1. Hai đường tròn có bao nhiêu trục đối xứng chung nếu chúng:

a) Có cùng tâm?

b) Không cùng tâm?

5.2. Vận động viên X chạy trên một đường chạy có dạng đường tròn bán kính 50 m xuất phát từ vị trí A. Khoảng cách lớn nhất từ vận động viên đến điểm A là bao nhiêu mét?

5.3. Sắp xếp các đoạn thẳng AB, AC và AD trong *Hình 5.13* theo thứ tự tăng dần về độ dài và giải thích.



Hình 5.13

5.4. Cho đường tròn tâm O và AB là một dây không đi qua tâm của (O). Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

a) Chứng minh rằng OM vuông góc với AB.

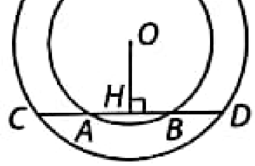
b) Biết bán kính của đường tròn (O) là 10 cm và $OM = 6$ cm, tính độ dài dây AB.

5.5. Trong *Hình 5.14*, cho hai đường tròn có cùng tâm O, các điểm A, B, C, D thẳng hàng và $OH \perp AB$ ($H \in AB$).

a) Chứng minh rằng H là trung điểm của AB và CD.

b) Chứng minh rằng $AC = BD$.

c) Biết bán kính đường tròn lớn là 10 cm, $CD = 16$ cm và $AB = 8$ cm. Tính bán kính đường tròn nhỏ.

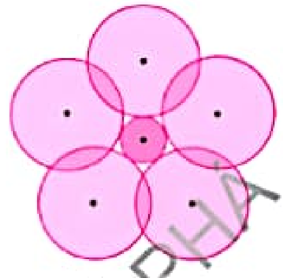


Hình 5.14

Bài 2 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Từ khoá: hai đường tròn cắt nhau, hai đường tròn tiếp xúc nhau, hai đường tròn không giao nhau.

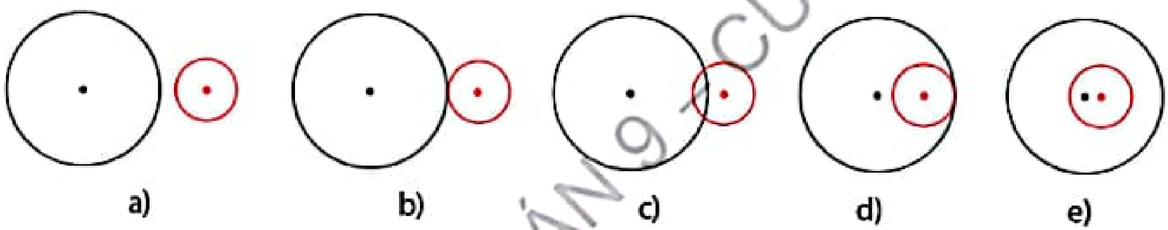
Trong *Hình 5.15*, mẫu trang trí hoa đào được tạo hình từ sáu đường tròn. Vị trí của cánh hoa so với nhuỵ hoa và so với các cánh hoa khác có thể được mô tả thế nào?



Hình 5.15

HOẠT ĐỘNG

Hình 5.16 thể hiện các vị trí tương đối khác nhau của hai đường tròn khi đường tròn nhỏ di chuyển từ ngoài vào phía trong đường tròn lớn. Nêu số điểm chung của hai đường tròn trong mỗi trường hợp.



Hình 5.16

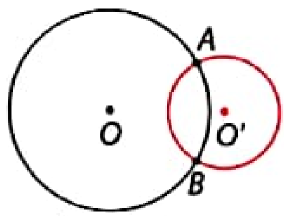
Hai đường tròn được gọi là *cắt nhau* nếu chúng có đúng hai điểm chung.
Hai đường tròn được gọi là *tiếp xúc nhau* nếu chúng có đúng một điểm chung.
Hai đường tròn được gọi là *không giao nhau* nếu chúng không có điểm chung nào.

Lưu ý:

- Điểm chung của hai đường tròn cắt nhau được gọi là *giao điểm*. Điểm chung của hai đường tròn tiếp xúc nhau được gọi là *tiếp điểm*.
- Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau và một đường tròn nằm trong đường tròn còn lại thì hai đường tròn gọi là *tiếp xúc trong*, ngược lại ta nói hai đường tròn *tiếp xúc ngoài*.

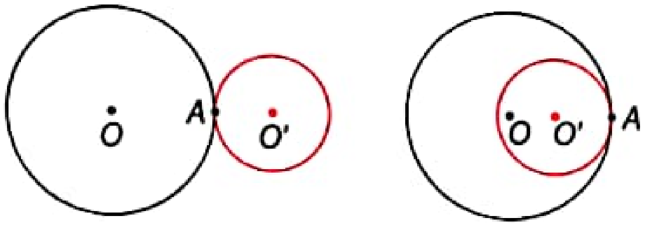
VÍ DỤ 1

Trong *Hình 5.17*, hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai giao điểm là A và B.



Hình 5.17

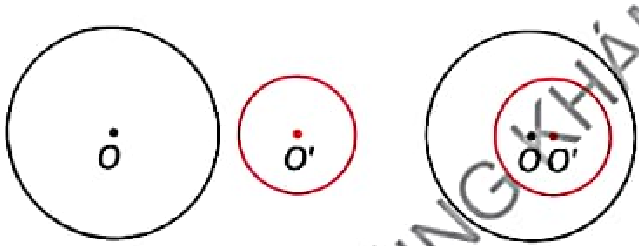
Trong hai trường hợp ở *Hình 5.18*, hai đường tròn tiếp xúc nhau tại tiếp điểm A. Trong *Hình 5.18a*, hai đường tròn tiếp xúc ngoài. Trong *Hình 5.18b*, hai đường tròn tiếp xúc trong.



a) b)

Hình 5.18

Trong hai trường hợp ở *Hình 5.19*, hai đường tròn không giao nhau. Trong *Hình 5.19a*, hai đường tròn nằm ngoài nhau. Trong *Hình 5.19b*, đường tròn (O') được đựng trong đường tròn (O).

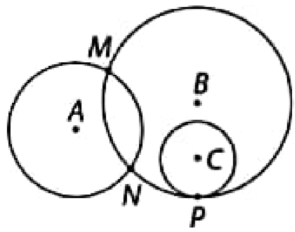


a) b)

Hình 5.19

LUYỆN TẬP 1

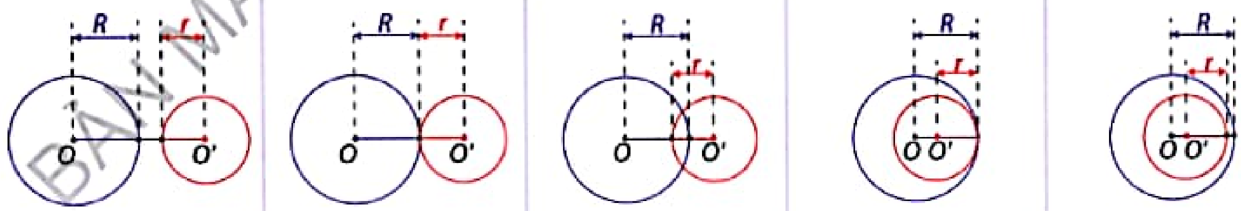
Chỉ ra các cặp đường tròn cắt nhau, tiếp xúc nhau và không giao nhau trong *Hình 5.20*.



Hình 5.20

Lưu ý:

Cho hai đường tròn phân biệt $(O; R)$, $(O'; r)$ và $d = OO'$. Vị trí tương đối giữa hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; r)$ có thể được xác định dựa vào hệ thức liên hệ giữa R, r và d như trong bảng dưới đây:



$d > R + r$	$d = R + r$	$R + r > d > R - r$	$d = R - r$	$d < R - r$
Ngoài nhau	Tiếp xúc ngoài	Cắt nhau (2 điểm chung)	Tiếp xúc trong	(O) đựng (O')

Hai đường tròn tiếp xúc nhau (1 điểm chung).

Hai đường tròn không giao nhau (không có điểm chung).

Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường thẳng đi qua tâm của hai đường tròn đó.

VÍ DỤ 2

Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn $(A; R)$ và $(B; r)$ trong mỗi trường hợp dưới đây:

a) $AB = 3$ cm, $R = 4$ cm, $r = 7$ cm;

b) $AB = 12$ cm, $R = 5$ cm, $r = 6$ cm;

c) $AB = 5$ cm, $R = 6$ cm, $r = 3$ cm.

Bài giải

a) Vì $R - r = 3$ cm $= AB$ nên hai đường tròn tiếp xúc trong.

b) Vì $R + r = 11$ cm và $AB = 12$ cm nên $AB > R + r$. Do đó hai đường tròn ngoài nhau.

c) Vì $R + r = 9$ cm, $R - r = 3$ cm và $AB = 5$ cm nên $R - r < AB < R + r$. Do đó hai đường tròn cắt nhau.

LUYỆN TẬP 2

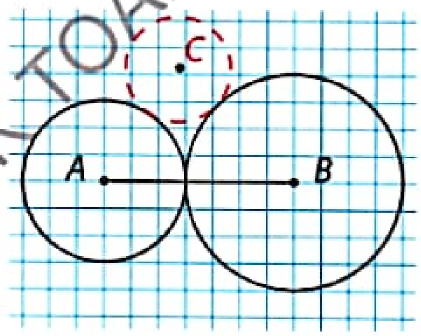
Cho đường tròn bán kính $R = 11$ cm và $r = 7$ cm. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn nếu khoảng cách giữa hai tâm bằng:

a) 2 cm; b) 4 cm; c) 21 cm;

d) 18 cm; e) 15 cm.

VẬN DỤNG

Trong *Hình 5.21*, hai đường tròn $(A; 3)$ và $(B; 4)$ tiếp xúc ngoài nhau. Sử dụng compa và thước thẳng để dựng đường tròn $(C; 2)$ tiếp xúc ngoài với cả hai đường tròn (A) và (B).



Hình 5.21

BÀI TẬP

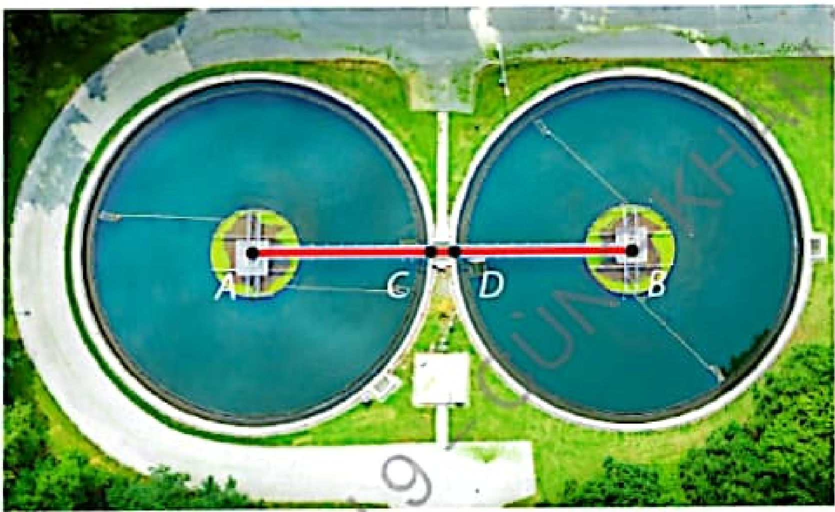
5.6. Thay các ô [?] trong bảng dưới đây bằng một độ dài hoặc một khẳng định thích hợp:

Bán kính của (O)	Bán kính của (I)	OI	Vị trí tương đối của (O) và (I)
12 cm	7 cm	[?]	(O) và (I) tiếp xúc trong
6 cm	5 cm	10 cm	[?]
8 cm	[?]	15 cm	(O) và (I) tiếp xúc ngoài
18 cm	11 cm	30 cm	[?]

5.7. Sử dụng compa và thước đo độ dài, hãy vẽ hai đường tròn bán kính lần lượt là 5 cm và 4 cm tiếp xúc nhau.

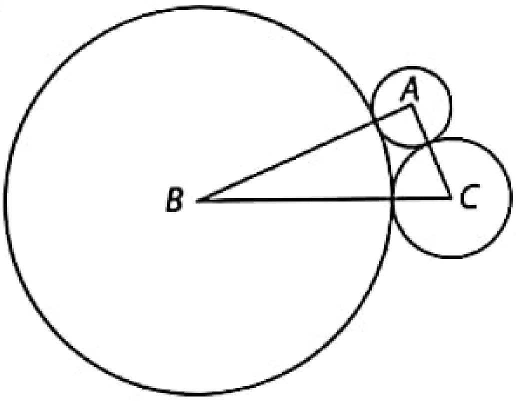
5.8. Xác định vị trí tương đối của hai đường tròn có đường kính lần lượt là 8 cm và 12 cm, biết khoảng cách giữa tâm của hai đường tròn là 10 cm.

5.9. Trong *Hình 5.22*, hai bể xử lí nước có dạng hình tròn có tâm ở hai điểm A, B và bán kính bằng nhau. Chiều dài của chiếc cầu nối hai tâm của hai bể nước là $AB = 20{,}7$ m. Gọi C và D lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng AB với hai đường tròn. Biết $CD = 0{,}7$ m, tính bán kính mỗi bể nước.



Hình 5.22

5.10. Ba đường tròn $(A; 2)$, $(B; 10)$ và $(C; 3)$ đôi một tiếp xúc ngoài nhau như trong *Hình 5.23*. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác vuông.



Hình 5.23

Bài 3

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

Từ khoá: đường thẳng cắt đường tròn, đường thẳng tiếp xúc đường tròn, đường thẳng không giao với đường tròn, cát tuyến, tiếp tuyến, tiếp điểm.

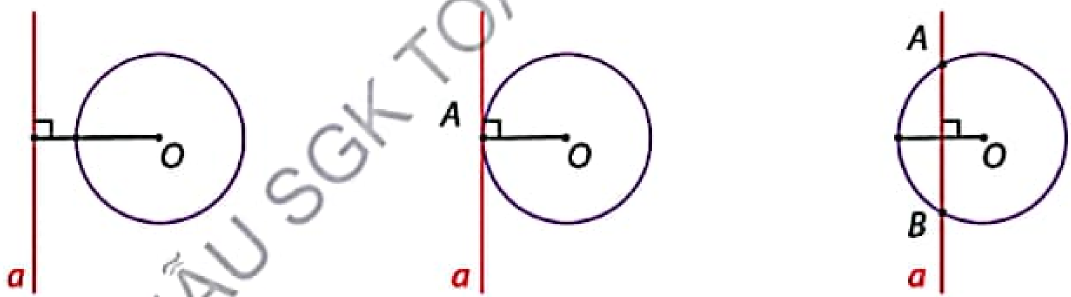
Vị trí của mặt trời so với đường chân trời có gì khác biệt trong các *Hình 5.24a, b* và *c*?

a) b) c)

Hình 5.24

HOẠT ĐỘNG

Hình 5.25 thể hiện các vị trí tương đối khác nhau của đường thẳng *a* và đường tròn (*O*) khi đường thẳng *a* di chuyển từ ngoài về phía gần tâm *O* của đường tròn. Nêu số điểm chung của đường thẳng *a* và đường tròn (*O*) trong mỗi trường hợp.



a) b) c)

Hình 5.25

Đường thẳng và đường tròn được gọi là *cắt nhau* nếu chúng có đúng hai điểm chung phân biệt.

Đường thẳng và đường tròn được gọi là *tiếp xúc nhau* nếu chúng có đúng một điểm chung.

Đường thẳng và đường tròn được gọi là *không giao nhau* nếu chúng không có điểm chung nào.

Lưu ý:

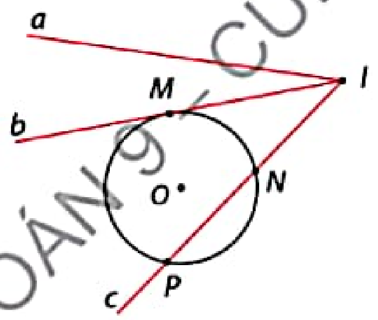
- Nếu đường thẳng cắt đường tròn thì nó được gọi là *cát tuyến* của đường tròn. Điểm chung của đường tròn và cát tuyến được gọi là *giao điểm* của chúng.
- Khi đường thẳng tiếp xúc với đường tròn thì điểm chung của chúng được gọi là *tiếp điểm* và đường thẳng được gọi là tiếp tuyến của đường tròn tại điểm đó.

VÍ DỤ 1

- Trong *Hình 5.25a*, đường thẳng a và đường tròn (O) không giao nhau.
- Trong *Hình 5.25b*, đường thẳng a và đường tròn (O) tiếp xúc nhau tại điểm A (đường thẳng a là tiếp tuyến của đường tròn (O), tiếp điểm là A).
- Trong *Hình 5.25c*, đường thẳng a và đường tròn (O) cắt nhau tại hai điểm A và B (đường thẳng a là cát tuyến của (O), giao điểm là A và B).

LUYỆN TẬP 1

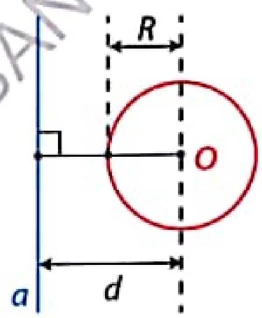
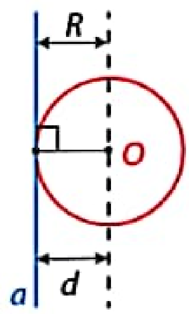
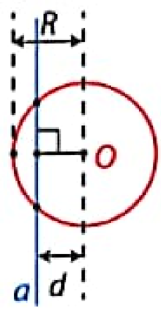
Xác định vị trí tương đối của đường tròn (O) với các đường thẳng a, b và c trong *Hình 5.26*. Chỉ ra tiếp điểm, giao điểm của chúng (nếu có).



Hình 5.26

Lưu ý:

Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng a. Đặt d là khoảng cách từ O đến đường thẳng a. Vị trí tương đối của đường thẳng a và đường tròn $(O; R)$ có thể được xác định dựa vào mối quan hệ giữa R và d như trong bảng dưới đây:

 $d > R$	 $d = R$	 $d < R$
Đường thẳng a và đường tròn (O) không giao nhau.	Đường thẳng a và đường tròn (O) tiếp xúc nhau.	Đường thẳng a và đường tròn (O) cắt nhau.

VÍ DỤ 2

Khoảng cách d từ tâm O của đường tròn đến đường thẳng a bằng 5 cm. Xác định vị trí tương đối của a và (O) trong các trường hợp bán kính R của đường tròn bằng:

a) 3 cm; b) 6 cm; c) 5 cm.

Bài giải

a) Vì $R = 3$ cm và $d = 5$ cm nên $d > R$. Do đó d và (O) không giao nhau.

b) Vì $R = 6$ cm và $d = 5$ cm nên $d < R$. Do đó d và (O) cắt nhau.

c) Vì $R = 5$ cm và $d = 5$ cm nên $d = R$. Do đó d và (O) tiếp xúc nhau.

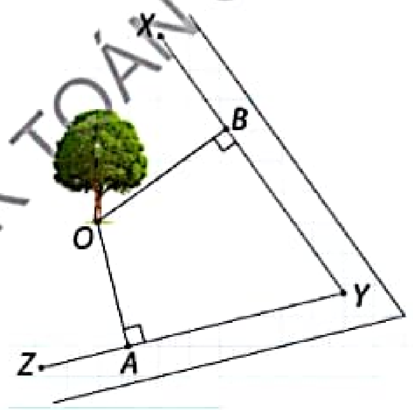
LUYỆN TẬP 2

Xác định vị trí tương đối của đường thẳng a đến đường tròn $(O; 7\text{ cm})$ nếu khoảng cách từ O đến a bằng:

a) 4 cm; b) 9 cm; c) 7 cm.

VẬN DỤNG

Trong *Hình 5.27*, mỗi ô vuông tương ứng với độ dài 1 m. Có thể quây một hàng rào tròn bán kính 5 m với tâm tại vị trí cây xanh O mà không cắt vào đường bao XY và YZ không?



Hình 5.27

BÀI TẬP

5.11. Thay các ô ? trong bảng dưới đây bằng một độ dài hoặc một khẳng định thích hợp.

Bán kính của (O)	Khoảng cách từ O đến đường thẳng a	Vị trí tương đối của (O) và (I)
8 cm	5 cm	?
15 cm	?	(O) và a tiếp xúc
9 cm	12 cm	?

5.12. Trên mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho điểm $M(2; 5)$. Xác định:

a) Vị trí tương đối của đường tròn tâm *M*, bán kính 3 với hai trục *Ox* và *Oy*;

b) Bán kính của đường tròn tâm *M* tiếp xúc với trục *Ox*.

5.13. Cho đường tròn (*O*; 12 cm) và điểm *A* cách *O* là 8 cm. Hãy xác định vị trí tương đối của (*O*) và đường thẳng *d* đi qua *A* vuông góc *OA*.

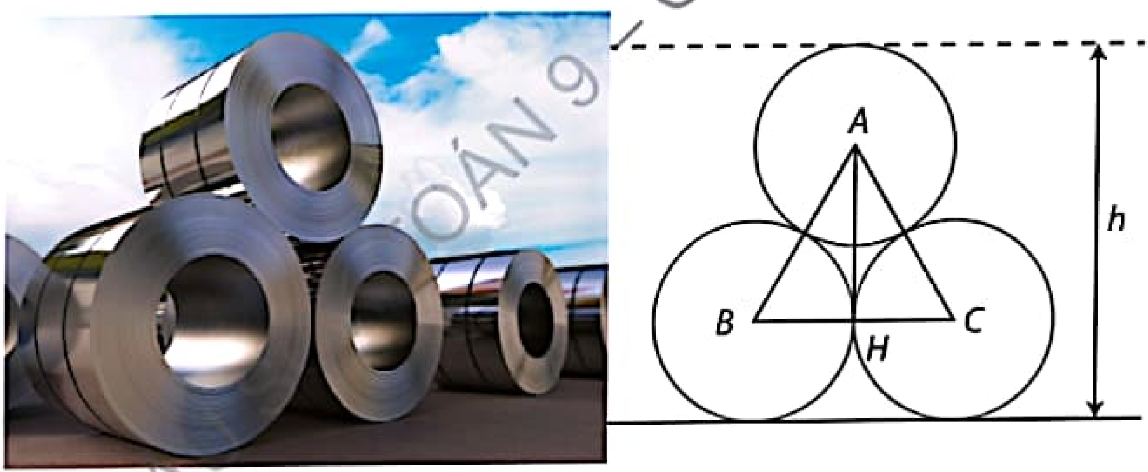
5.14. Cho đường tròn tâm *O* bán kính *R* và một điểm *A* nằm trong (*O*) ($OA < R$). Vẽ đường thẳng *a* bất kì đi qua *A*. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng *a* và đường tròn (*O*).

5.15. Trong *Hình 5.28*, các cuộn thép được đặt chồng lên nhau. Đường kính của mỗi cuộn thép là 1,2 m. Gọi *A*, *B*, *C* lần lượt là tâm của mặt cắt các cuộn thép, *H* là tiếp điểm của hai cuộn thép phía dưới.

a) Chứng minh rằng ΔABC là tam giác đều và tính độ dài *AH*.

b) Tính khoảng cách từ *B* và *C* đến mặt đất.

c) Tính chiều cao *h* của khối ba cuộn thép.

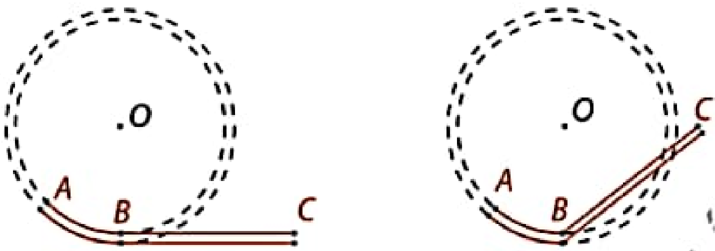


Hình 5.28

Bài 4 TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Từ khoá: tiếp tuyến của đường tròn, đường tròn nội tiếp tam giác, tam giác ngoại tiếp đường tròn.

Trong trường hợp nào ở *Hình 5.29*, đoàn tàu có thể di chuyển từ cung đường ray *AB* sang đường ray thẳng *BC* mà không trật bánh ray? Khi đó đường thẳng *BC* và đường tròn (*O*) có vị trí tương đối như thế nào?

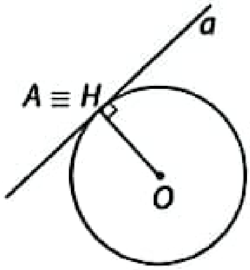


Hình 5.29

1 DẤU HIỆU NHẬN BIẾT TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

HOẠT ĐỘNG 1

Trong *Hình 5.30*, đường thẳng *a* tiếp xúc với đường tròn (*O*; *R*) tại *A* và *H* là chân đường vuông góc kẻ từ *O* xuống *a*. Xác định độ dài *OH*. Giải thích vì sao *A* và *H* trùng nhau, nhận xét về góc tạo bởi tiếp tuyến *a* và bán kính *OA*.



Hình 5.30

Từ Hoạt động 1, ta có nhận xét sau về tiếp tuyến của đường tròn: Tiếp tuyến của đường tròn thì vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

VÍ DỤ 1

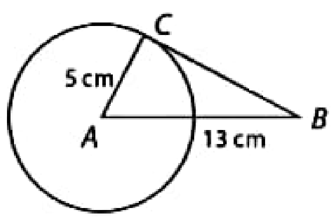
Trong *Hình 5.31*, đường thẳng *BC* là tiếp tuyến của đường tròn (*A*) tại *C*. Tính độ dài *BC*.

Bài giải

Vì đường thẳng *BC* là tiếp tuyến của (*A*) tại tiếp điểm *C* nên $AC \perp BC$.

Do đó $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (định lí Pythagore).

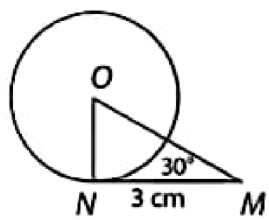
Suy ra $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (cm).



Hình 5.31

LUYỆN TẬP 1

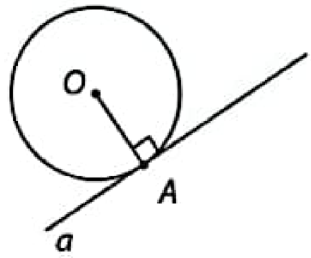
Trong *Hình 5.32*, *MN* là tiếp tuyến của đường tròn (*O*; *R*) tại *N*. Tính *R*.



Hình 5.32

HOẠT ĐỘNG 2

Trong *Hình 5.33*, đường tròn (O) có bán kính R và điểm A nằm trên đường tròn, đường thẳng a vuông góc với OA tại A. So sánh khoảng cách từ O đến đường thẳng a với bán kính R, từ đó xác định vị trí tương đối của a và (O).



Hình 5.33

Ta có định lí sau:

> Nếu một đường thẳng đi qua một điểm thuộc đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng đó là một tiếp tuyến của đường tròn.

VÍ DỤ 2

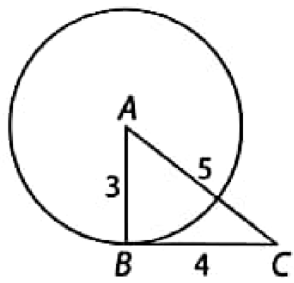
Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $BC = 4$ và $AC = 5$. Chứng minh rằng đường thẳng BC là tiếp tuyến của đường tròn $(A; 3)$.

Bài giải

Ta có $AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = AC^2$ nên ΔABC vuông góc tại B hay $AB \perp BC$ (định lí Pythagore đảo).

Mặt khác, vì $AB = 3$ nên B thuộc đường tròn $(A; 3)$.

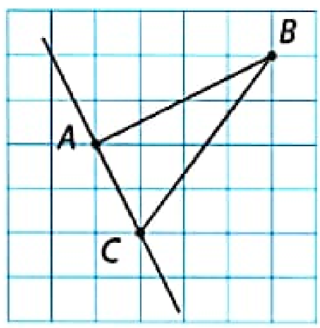
Suy ra BC là tiếp tuyến của đường tròn $(A; 3)$ (*Hình 5.34*).



Hình 5.34

LUYỆN TẬP 2

Trong *Hình 5.35*, cạnh mỗi hình vuông trong lưới ô vuông có độ dài là 1 đơn vị. Chứng minh rằng đường thẳng AC là tiếp tuyến của đường tròn tâm B bán kính BA.



Hình 5.35

2 TÍNH CHẤT CỦA HAI TIẾP TUYẾN CẮT NHAU

HOẠT ĐỘNG 3

Vẽ đường tròn (O) và lấy hai điểm A, B thuộc (O) (AB không là đường kính). Vẽ tiếp tuyến tại A và B cắt nhau tại M. Em hãy đo và so sánh:

a) MA và MB; b) $\widehat{AMO}$ và $\widehat{BMO}$; c) $\widehat{AOM}$ và $\widehat{BOM}$.

Ta có định lí sau:

Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:

1. Điểm đó cách đều hai tiếp điểm;
2. Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến;
3. Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.

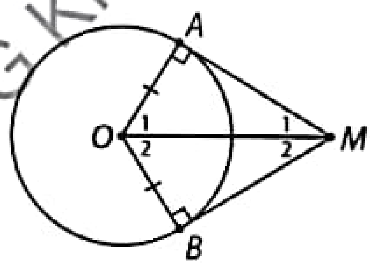
Chứng minh

Gọi M là giao điểm của hai tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) (*Hình 5.36*).
Khi đó $OA \perp AM$ và $OB \perp BM$.
Hai tam giác vuông OAM và OBM có:

- $OA = OB$ (vì cùng là bán kính của đường tròn);
- OM chung.

Do đó $\Delta OAM = \Delta OBM$.
Suy ra:

- $MA = MB$;
- $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ nên MO là tia phân giác của $\widehat{AMB}$;
- $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ nên OM là tia phân giác của $\widehat{AOB}$.



Hình 5.36

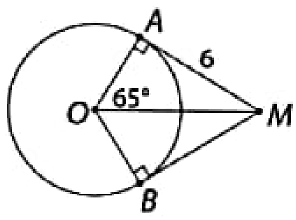
VÍ DỤ 3

Trong *Hình 5.37*, hai điểm A, B thuộc đường tròn (O). Tính số đo $\widehat{AOB}$ và độ dài BM.

Bài giải

Vì A, B thuộc (O) và $MA \perp OA$, $MB \perp OB$ nên MA, MB là hai tiếp tuyến của đường tròn (dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến).
Do đó theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

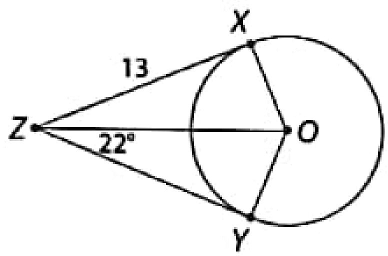
- OM là tia phân giác của $\widehat{AOB}$ nên $\widehat{AOB} = 2\widehat{AOM} = 2 . 65° = 130°$;
- $BM = AM = 6$.



Hình 5.37

LUYỆN TẬP 3

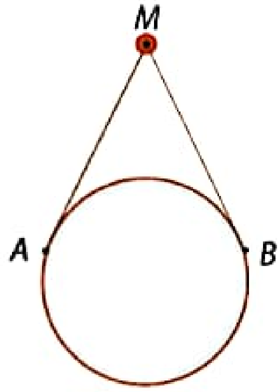
Trong *Hình 5.38*, ZX và ZY là hai tiếp tuyến của đường tròn tâm O với tiếp điểm lần lượt là X và Y. Xác định số đo $\widehat{XOY}$ và độ dài YZ.



Hình 5.38

VẬN DỤNG

Trong *Hình 5.39*, người ta dùng một đoạn dây gắn vào hai điểm *A*, *B* trên viền một chiếc gương tròn để treo gương vào điểm *M*. Biết tổng độ dài dây là 82 cm, $\widehat{AMB} = 52°$ và *MA*, *MB* tiếp xúc với viền gương. Tính đường kính của gương. Làm tròn kết quả đến đơn vị centimét.



Hình 5.39

BÀI TẬP

5.16. Trên mặt phẳng toạ độ, vẽ đường tròn tâm *I*(2; 3) đi qua gốc toạ độ *O*. Vẽ tiếp tuyến của đường tròn tại *O*.

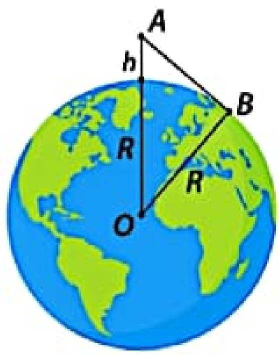
5.17. Cho *A* là một điểm thuộc đường tròn (*O*), *M* là một điểm thuộc tiếp tuyến của (*O*) tại điểm *A* (*M* khác *A*). Đường tròn tâm *M* bán kính *MA* cắt (*O*) tại *B* (*B* khác *A*). Chứng minh rằng *MB* là một tiếp tuyến của (*O*).

5.18. Từ điểm *M* nằm ngoài đường tròn (*O*; 5 cm), *MO* = 13 cm, vẽ hai tiếp tuyến *MA*, *MB* (*A*, *B* là các tiếp điểm).

a) Tính độ dài *MA*, *MB*.

b) Cho *C* là điểm bất kì thuộc đường tròn (*O*) và nằm trong góc *AOB*. Tiếp tuyến tại *C* của đường tròn cắt *MA* tại *N* và cắt *MB* tại *P*. Tính chu vi Δ*MNP*.

5.19. Trong *Hình 5.40*, mặt cắt của Trái Đất có thể xem là đường tròn tâm *O* bán kính *R* = 6 400 km. Từ điểm *A* nằm ở độ cao *h* so với mực nước biển, một người có thể thấy xa nhất đến điểm *B* trên (*O*) sao cho *AB* là tiếp tuyến (*O*). Khoảng cách *AB* khi đó được gọi là tầm nhìn xa từ điểm *A*. Tính *AB* nếu *h* = 20 m.

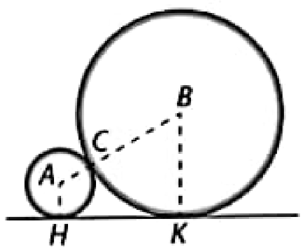


Hình 5.40

5.20. *Hình 5.41* cho thấy mặt cắt của hai ống nước nhựa được đặt sát nhau trên mặt đất. Ống nhỏ có đường kính 6 cm, ống lớn có đường kính 18 cm. Tính:

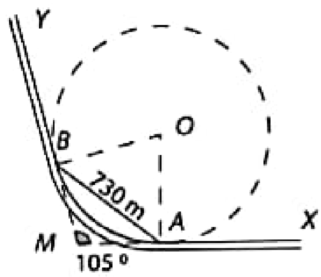
a) Khoảng cách *AB* giữa tâm của hai mặt cắt;

b) Khoảng cách *HK* giữa hai tiếp điểm của mặt cắt hai ống với mặt đất.



Hình 5.41

5.21. Trong *Hình 5.42*, để tàu không trật bánh ray khi chuyển hướng từ đường ray thẳng *XA* sang đường ray thẳng *YB*, đoạn ray nối được thiết kế là một phần của đường tròn (*O*) tiếp xúc với *XA* tại *A* và *BY* tại *B*. Biết góc chuyển hướng của tàu là $\widehat{AMB} = 105°$ và khoảng cách giữa hai điểm *A* và *B* là 730 m. Tính bán kính của đường tròn (*O*). Làm tròn kết quả đến đơn vị mét.



Hình 5.42

Bài 5 GÓC Ở TÂM, CUNG VÀ HÌNH QUẠT TRÒN

Từ khoá: góc ở tâm, cung, hình quạt tròn, độ dài cung, diện tích hình quạt tròn.

Vì sao để chia một chiếc bánh ngọt có mặt hình tròn thành nhiều phần bằng nhau, người ta thường cắt bánh bằng các đường đi qua tâm bánh (*Hình 5.43*)?

Hình 5.43

1 GÓC Ở TÂM VÀ SỐ ĐO CUNG

Trên đường tròn (O), lấy hai điểm A và B. Khi đó (O) được chia thành hai cung có chung đầu mút A và B, cùng được gọi là cung AB và kí hiệu là $\overset{\frown}{AB}$. Để phân biệt hai cung, ta có thể thêm kí tự ở giữa hai đầu mút. Chẳng hạn trong *Hình 5.44a*, ta kí hiệu hai cung là $\overset{\frown}{AmB}$ và $\overset{\frown}{AnB}$, trong *Hình 5.44b* ta kí hiệu $\overset{\frown}{AMB}$ và $\overset{\frown}{ANB}$.

a) b)

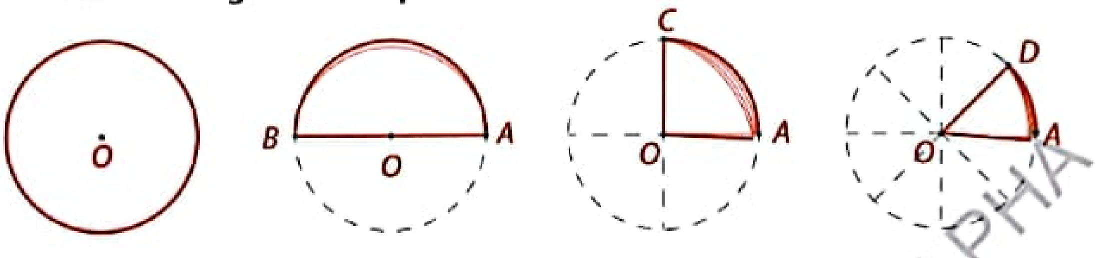
Hình 5.44

HOẠT ĐỘNG 1

Cắt một hình tròn bằng giấy và gấp làm hai, làm tư, làm tám như trong *Hình 5.45*.

1. Cho biết giao điểm O của các đường gấp ở đâu trong hình tròn?

2. Các đường gấp chia hình tròn thành nhiều phần. Trong mỗi trường hợp, hãy:
   a) Cho biết khi đường tròn (O) được gấp lại, các cung của đường tròn nằm trong các phần có chồng khít lên nhau không?
   b) So sánh số đo các góc đỉnh O trong mỗi phần và tính tổng số đo các góc đỉnh O trong tất cả các phần.



Hình 5.45

Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là *góc ở tâm* của đường tròn.

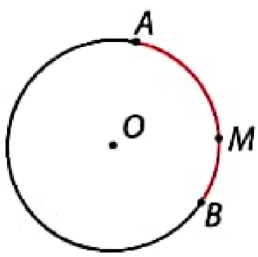
Khi góc ở tâm là góc bẹt thì ta nói góc đó chắn nửa đường tròn.
Khi góc ở tâm có số đo nhỏ hơn 180°, cung nằm trong góc ở tâm được gọi là *cung nhỏ* hoặc *cung bị chắn* bởi góc đó. Cung nằm ngoài góc ở tâm gọi là *cung lớn*.
Chẳng hạn, trong *Hình 5.45*:

- $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm chắn nửa đường tròn;
- $\widehat{AOC}$ là góc ở tâm chắn cung nhỏ AC (cung nhỏ AC bị chắn bởi $\widehat{AOC}$);
- $\widehat{AOD}$ là góc ở tâm chắn cung nhỏ AD (cung nhỏ AD bị chắn bởi $\widehat{AOD}$).

Ta có định nghĩa số đo cung như sau:

Trong đường tròn:
1. Số đo của cung nhỏ là số đo của góc ở tâm chắn cung đó;
2. Số đo của cung lớn là hiệu giữa 360° và số đo của cung nhỏ cùng đầu mút với nó;
3. Số đo của nửa đường tròn là 180°.

Lưu ý: Trong một đường tròn:
- Số đo của cung AB được kí hiệu là sđ $\overset\frown{AB}$;
- Các cung có số đo bằng $n°$ được gọi chung là *cung $n°$*. Mỗi điểm trên đường tròn được xem là một cung 0°, cả đường tròn được xem là cung 360°;
- Tổng số đo hai cung có chung đầu mút là 360°;
- Nếu điểm M thuộc cung AB và chia cung AB thành hai cung AM, MB (*Hình 5.46*) thì ta có sđ $\overset\frown{AB}$ = sđ $\overset\frown{AM}$ + sđ $\overset\frown{MB}$.



Hình 5.46

VÍ DỤ 1

Xác định số đo của các cung *AmB*, *BnC* và *ApC* ở *Hình 5.47.*

Bài giải

Vì $\overset{\frown}{AmB}$ là cung nhỏ bị chắn bởi góc ở tâm *AOB* nên:

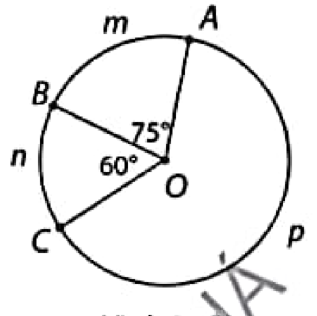
$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AmB} = \widehat{AOB} = 75^\circ.$$

Vì $\overset{\frown}{BnC}$ là cung nhỏ bị chắn bởi góc ở tâm *BOC* nên:

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{BnC} = \widehat{BOC} = 60^\circ.$$

Suy ra sđ $\overset{\frown}{ABC}$ = sđ $\overset{\frown}{AmB}$ + sđ $\overset{\frown}{BnC} = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ$.

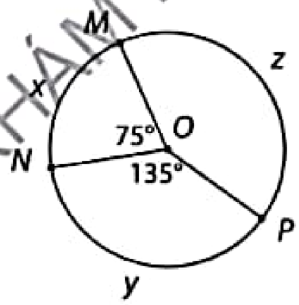
Do đó sđ $\overset{\frown}{ApC} = 360^\circ -$ sđ $\overset{\frown}{ABC} = 360^\circ - 135^\circ = 225^\circ$.



Hình 5.47

LUYỆN TẬP 1

Xác định số đo của các cung *MxN*, *NyP* và *MzP* trong *Hình 5.48.*



Hình 5.48

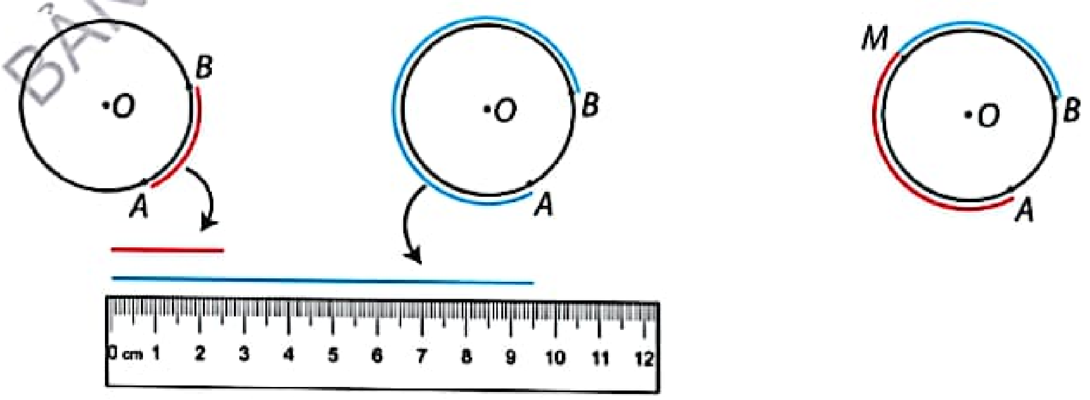
2 ĐỘ DÀI CUNG

HOẠT ĐỘNG 2

Cắt một hình tròn bằng giấy và đánh dấu hai điểm *A*, *B* bất kì trên mép của hình tròn.

a) Sử dụng dây mềm để lần lượt viền theo hai cung *AB* như *Hình 5.49a* và đo độ dài của đoạn dây trong mỗi trường hợp.

b) Lấy một điểm *M* bất kì trên cung *AB*, chia cung *AB* thành hai cung *AM* và *MB*. So sánh tổng độ dài hai đoạn dây được viền theo cung *AB* và *MB* với độ dài đoạn dây được viền theo cung *AB* (*Hình 5.49b*).



a)

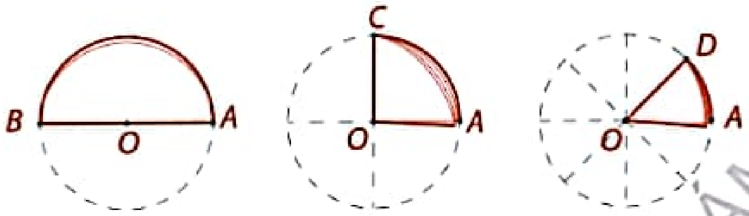
b)

Hình 5.49

Độ dài của đoạn dây viền theo một cung của đường tròn như trong Hoạt động 2 được gọi là độ dài của cung đó.
Nếu điểm M thuộc cung AB và chia cung AB thành hai cung AM, MB thì độ dài cung AB bằng tổng độ dài của hai cung AM và MB.

HOẠT ĐỘNG 3

Quay lại hoạt động gấp hình tròn trong Hoạt động 1.



Hãy xác định các số đo cung và tỉ số trong các ô ? của bảng dưới đây. Em có nhận xét gì?

Cung	Số đo cung	Tỉ số của số đo cung và 360°	Tỉ số của độ dài cung và độ dài đường tròn
$\overset{\frown}{AB}$	?	?	?
$\overset{\frown}{AC}$	?	?	?
$\overset{\frown}{AD}$	?	?	?

Ta thừa nhận công thức độ dài C của đường tròn bán kính R như sau:

$$C = 2\pi R.$$

Trong đó π là số vô tỉ mà ta thường lấy giá trị gần đúng là $\pi \approx 3{,}14$.
Hoạt động 3 góp phần chứng tỏ độ dài của cung tỉ lệ thuận với số đo của nó. Do đó nếu l là độ dài của cung có số đo $n°$ thì:

$$\frac{l}{2\pi R} = \frac{n}{360}.$$

Vậy ta có:

Công thức độ dài cung $n°$ của đường tròn bán kính R:

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

VÍ DỤ 2

Tính độ dài cung 120° của đường tròn bán kính 10 cm.

Bài giải

Ta có $n = 120$ và $R = 10$ cm.

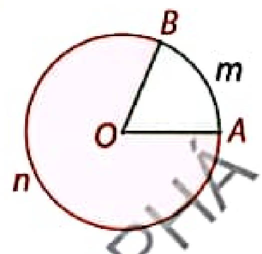
Do đó độ dài cung là $l = \frac{\pi.10.120}{180} = \frac{20}{3}\pi$ (cm).

LUYỆN TẬP 2

Tính độ dài cung 235° của đường tròn bán kính 7 cm.

3 DIỆN TÍCH HÌNH QUẠT TRÒN VÀ HÌNH VÀNH KHUYÊN

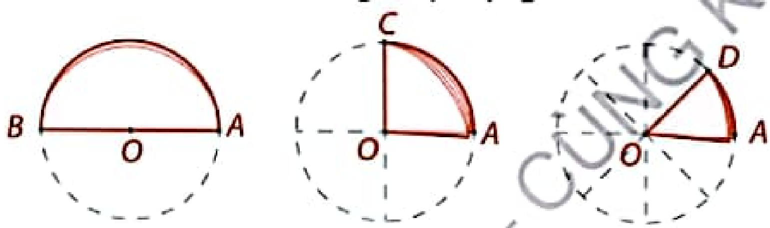
Hình quạt tròn là phần hình tròn bị giới hạn bởi một cung và hai bán kính đi qua các đầu mút của cung đó. Ở *Hình 5.50*, hình tròn tâm *O* được chia thành hai hình quạt tròn: hình quạt tròn tâm *O* cung *AmB* và hình quạt tròn tâm *O* cung *AnB*.



Hình 5.50

HOẠT ĐỘNG 4

Quay lại hoạt động gấp hình tròn trong Hoạt động 1.



Hãy xác định các giá trị trong các ô ? của bảng dưới đây. Em có nhận xét gì?

Cung	Số đo cung	Tỉ số của số đo cung và 360°	Tỉ số của diện tích hình quạt tròn giới hạn bởi cung và diện tích hình tròn
$\overset{\frown}{AB}$	?	?	?
$\overset{\frown}{AC}$	?	?	?
$\overset{\frown}{AD}$	?	?	?

Ta thừa nhận công thức diện tích S_{ht} của hình tròn bán kính *R* như sau:

$$S_{ht} = \pi R^2.$$

Hoạt động 4 góp phần chứng tỏ diện tích của hình quạt tròn tỉ lệ thuận với số đo của cung ứng với nó. Do đó nếu S_q là diện tích của hình quạt tròn bán kính *R* ứng với cung có số đo $n°$ thì:

$$\frac{S_q}{\pi R^2} = \frac{n}{360}.$$

Vậy ta có:

Công thức diện tích hình quạt tròn bán kính *R* ứng với cung $n°$:

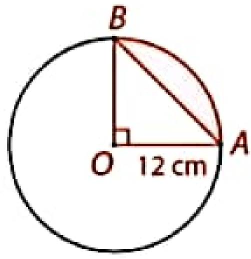
$$S_q = \frac{\pi R^2 n}{360}.$$

VÍ DỤ 3

Cho *Hình 5.51*.

a) Tính diện tích hình quạt tròn tâm O cung nhỏ AB.

b) Tính diện tích hình giới hạn bởi dây AB và cung nhỏ AB (gọi là *hình viên phân* tâm O cung nhỏ AB). Làm tròn kết quả đến hàng phần mười centimét vuông.



Hình 5.51

Bài giải

a) Vì $\widehat{AOB} = 90°$ nên số đo cung nhỏ AB là $90°$. Do đó $S_q = \dfrac{\pi.12^2.90}{360} = 36\pi$ (cm²).

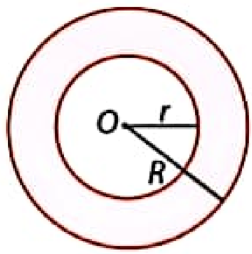
b) Diện tích tam giác vuông ABC là $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}OA.OB = \dfrac{1}{2}\cdot 12.12 = 72$ (cm²).

Suy ra diện tích hình viên phân cung nhỏ AB là $S_{vp} = 36\pi - 72 \approx 41{,}1$ (cm²).

LUYỆN TẬP 3

Tính diện tích của hình quạt tròn bán kính 3 cm ứng với cung 210°.

Hình vành khuyên là hình giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm có bán kính khác nhau (*Hình 5.52*).



Hình 5.52

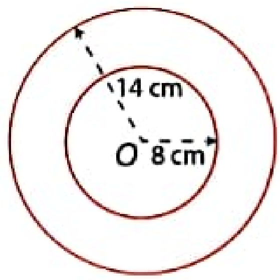
Từ công thức diện tích hình tròn, ta có:

Công thức diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn $(O; R)$ và (O, r) (với $r < R$):

$$S_{vk} = \pi(R^2 - r^2).$$

VÍ DỤ 4

Tính diện tích hình vành khuyên trong *Hình 5.53*.



Hình 5.53

Bài giải

Diện tích hình vành khuyên cần tìm là:

$S_{vk} = \pi(14^2 - 8^2) = 132\pi$ (cm²).

LUYỆN TẬP 4

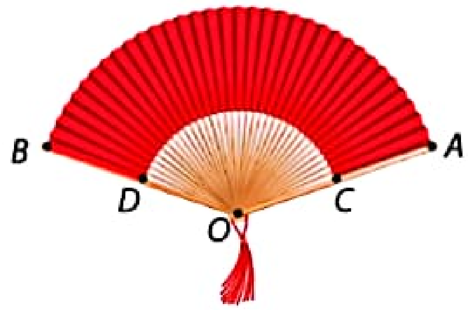
Tính diện tích hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm có bán kính lần lượt là 5 cm và 3 cm.

Lưu ý: Từ công thức diện tích hình quạt tròn và độ dài cung $n°$, bán kính R, ta có công thức liên hệ hai diện tích hình quạt (S_q) với độ dài cung (l) ứng với nó như sau:

$$S_q = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi R n}{180}\cdot\frac{R}{2} = \frac{1}{2}lR.$$

VẬN DỤNG

Trong *Hình 5.54*, chiếc quạt có dạng một hình quạt tròn tâm O cung AB, bán kính $OA = OB = 20$ cm. Giấy được dán trong phần giới hạn bởi cung AB, cung CD, đoạn thẳng AC và BD với $OC = OD = 10$ cm. Biết khi mở rộng tối đa, hai nan quạt ngoài cùng tạo thành một góc $AOB = 140°$. Tính chu vi và diện tích mảnh giấy để dán một mặt quạt (diện tích mép dán không đáng kể).



Hình 5.54

BÀI TẬP

5.22. Vẽ đường tròn (O), sau đó vẽ:

a) Một góc ở tâm của (O) có số đo $50°$;

b) Một cung có số đo $235°$.

5.23. Cho điểm A thuộc đường tròn (O). Trên tiếp tuyến tại A của (O) xác định điểm M sao cho $AM = AO$. Đường thẳng OM cắt (O) tại B và C (B nằm giữa O và M).

a) Tính góc ở tâm BOA.

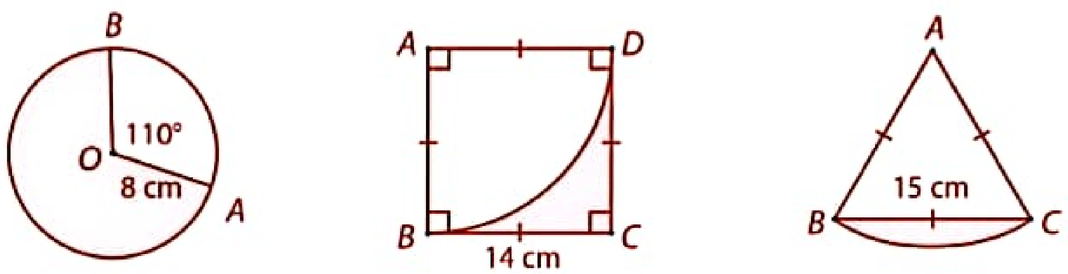
b) Tính số đo cung lớn AC.

5.24. Tiếp tuyến tại hai điểm A và B của đường tròn (O) cắt nhau tại M. Biết rằng MAB là tam giác đều. Tính số đo cung nhỏ và cung lớn AB.

5.25. Trong 20 giây, kim giây của đồng hồ quay được một cung có số đo bằng bao nhiêu (*Hình 5.55*)?

Hình 5.55

5.26. Tính chu vi và diện tích phần được tô màu trong mỗi trường hợp ở *Hình 5.56*. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



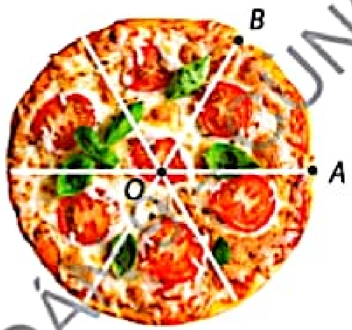
a) b) c)

Hình 5.56

5.27. Trong *Hình 5.57*, bia bắn cung có dạng hình tròn bán kính 20 cm. Bia được chia thành năm phần bởi bốn đường tròn có bán kính lần lượt là 4 cm, 8 cm, 12 cm, 16 cm. Mỗi phần được sơn một màu khác nhau. Tính diện tích mỗi phần.

Hình 5.57

5.28. Trong *Hình 5.58*, bánh pizza có dạng hình tròn tâm *O* được cắt thành sáu phần bằng nhau. Góc *AOB* có số đo bằng bao nhiêu?



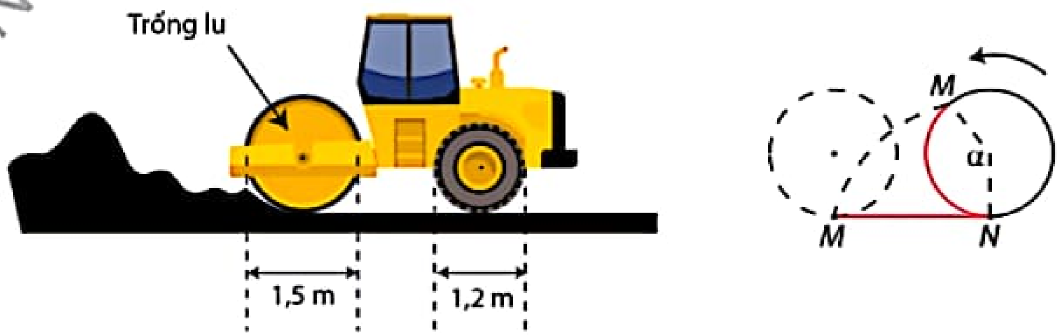
Hình 5.58

5.29. Một chiếc xe lu có đường kính trống lu là 1,5 m và đường kính của bánh sau là 1,2 m (*Hình 5.59*). Khi hoạt động, trống lu quay hết một vòng (360°) trong 5 phút.

a) Trong mỗi phút, trống lu quay được bao nhiêu độ và xe lu cán được bao nhiêu mét đường?

b) Để cán được 1 mét đường thì trống lu phải quay một góc bao nhiêu độ?

c) Để trống lu quay được 1 vòng thì bánh sau phải quay bao nhiêu vòng?



Hình 5.59

Bài 6 GÓC NỘI TIẾP

Từ khoá: góc nội tiếp, số đo góc nội tiếp, cung bị chắn bởi góc nội tiếp.

Góc ở đỉnh của mỗi cánh của lồng đèn ông sao trong *Hình 5.60* có số đo bằng bao nhiêu?

Hình 5.60

1 KHÁI NIỆM GÓC NỘI TIẾP

HOẠT ĐỘNG 1

Quan sát hình ngôi sao năm cánh trong *Hình 5.60*, đỉnh và cạnh của góc *CAD* có liên hệ như thế nào với đường tròn khung của lồng đèn ông sao?

Góc *CAD* của lồng đèn ông sao trong Hoạt động 1 cho ta hình ảnh của một góc nội tiếp của đường tròn. Ta có định nghĩa sau:

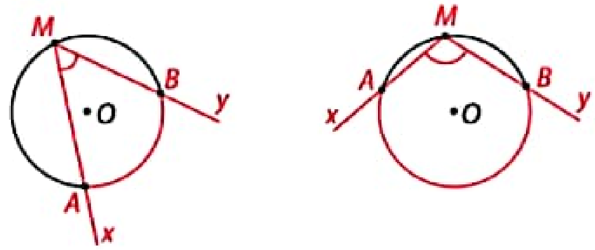
Góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây của đường tròn được gọi là một *góc nội tiếp* của đường tròn.

Lưu ý: Cung bị chắn bởi một góc nội tiếp là cung nằm trong góc nội tiếp đó.

VÍ DỤ 1

Trong *Hình 5.61a*, $\widehat{xMy}$ là góc nội tiếp chắn cung nhỏ *AB* của đường tròn (*O*).

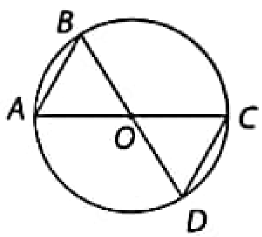
Trong *Hình 5.61b*, $\widehat{xMy}$ là góc nội tiếp chắn cung lớn *AB* của đường tròn (*O*).



Hình 5.61

LUYỆN TẬP 1

Viết tên các góc nội tiếp của đường tròn (*O*) được vẽ trong *Hình 5.62*.



Hình 5.62

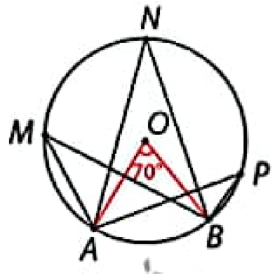
2 LIÊN HỆ GIỮA SỐ ĐO CỦA GÓC NỘI TIẾP VÀ SỐ ĐO CUNG

HOẠT ĐỘNG 2

Trong *Hình 5.63*, $\widehat{AOB} = 70°$.

a) Sử dụng thước đo góc, xác định số đo các góc nội tiếp *AMB*, *ANB*, *APB* chắn cung *AB*.

b) Nhận xét về mối liên hệ giữa số đo các góc nội tiếp trên với số đo cung nhỏ *AB*.



Hình 5.63

Một cách tổng quát, ta có định lí sau:

Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng một nửa số đo cung bị chắn bởi góc đó.

Chứng minh

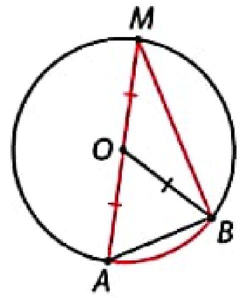
Xét góc nội tiếp $\widehat{AMB}$ của đường tròn (*O*), cung bị chắn là $\overset{\frown}{AB}$. Ta xét ba trường hợp:

- Trường hợp 1: Tâm *O* nằm trên một cạnh của $\widehat{AMB}$, chẳng hạn cạnh *MA* (*Hình 5.64*).

  Ta có $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}(\widehat{AMB} + \widehat{MBO})$ (vì ΔOMB cân tại *O*)

  $= \frac{1}{2}(180° - \widehat{BOM})$ (định lí về tổng ba góc của tam giác)

  $= \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AB}$ ($\widehat{AOB}$ là góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AB}$).



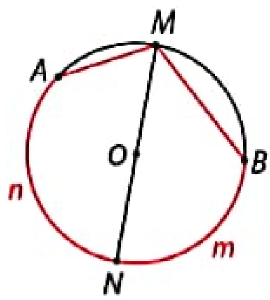
Hình 5.64

- Trường hợp 2: Tâm *O* nằm trong $\widehat{AMB}$. Vẽ đường kính *MN* (*Hình 5.65*). Khi đó ta có tia *MN* nằm trong $\widehat{AMB}$ và *N* nằm trên $\overset{\frown}{AB}$.

  Do đó $\widehat{AMB} = \widehat{AMN} + \widehat{BMN}$

  $= \frac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{AnN}$ + sđ $\overset{\frown}{BmN}$) (áp dụng kết quả ở trường hợp 1)

  $= \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AB}$.



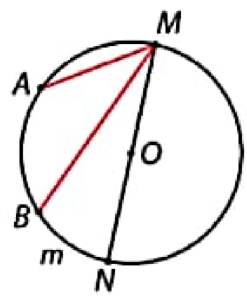
Hình 5.65

- Trường hợp 3: Tâm *O* nằm ngoài $\widehat{AMB}$. Vẽ đường kính *MN* (*Hình 5.66*). Khi đó ta có tia *MB* nằm giữa hai tia *MA*, *MN* và *B* nằm trên $\overset{\frown}{AN}$.

  Do đó $\widehat{AMB} = \widehat{AMN} - \widehat{BMN}$

  $= \frac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{ABN}$ − sđ $\overset{\frown}{BmN}$) (áp dụng kết quả ở trường hợp 1)

  $= \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{AB}$.



Hình 5.66

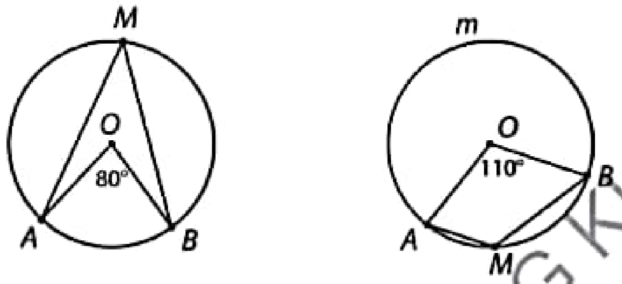
Nhận xét:

Trong một đường tròn:

- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau;
- Góc nội tiếp chắn cung nhỏ có số đo bằng một nửa số đo góc ở tâm cùng chắn một cung;
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

VÍ DỤ 2

Tính số đo các góc *AMB* trong mỗi trường hợp ở *Hình 5.67.*



a) b)

Hình 5.67

Bài giải

a) Xét đường tròn (*O*), có $\widehat{AMB}$ là góc nội tiếp và $\widehat{AOB}$ là góc ở tâm cùng chắn cung nhỏ *AB*.

Do đó $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 80° = 40°$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn một cung).

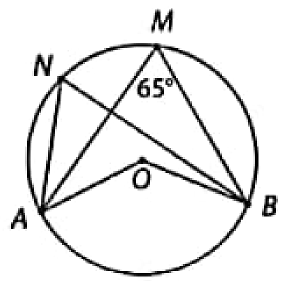
b) $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AmB}$ (liên hệ số đo góc nội tiếp và cung bị chắn)

$= \frac{1}{2}(360° - \text{sđ}\ \overset{\frown}{AMB})$

$= \frac{1}{2}(360° - \widehat{AOB}) = \frac{1}{2}(360° - 110°) = 125°.$

LUYỆN TẬP 2

Tính số đo các góc *ANB*, *AOB* và cung lớn *AB* trong *Hình 5.68.*



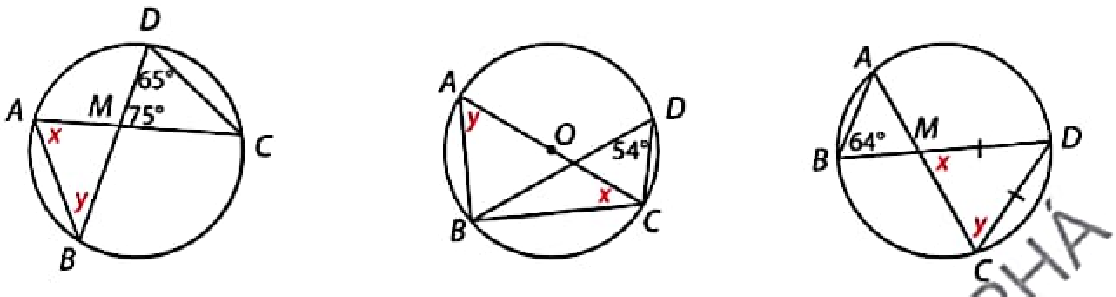
Hình 5.68

VẬN DỤNG

Quay lại bài toán ở phần Khởi động (*Hình 5.60*). Các cung nhỏ *AB*, *BC*, *CD*, *DE* và *AE* của lồng đèn ông sao có số đo bằng nhau. Tính số đo mỗi cung, từ đó tính số đo góc *CAD* của cánh sao.

BÀI TẬP

5.30. Tính các số đo x và y trong mỗi trường hợp ở *Hình 5.69.*



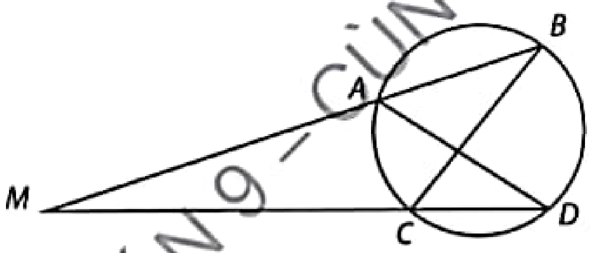
a) b) c)

Hình 5.69

5.31. Trong *Hình 5.70*, hai cát tuyến AB và CD của đường tròn cắt nhau tại M.

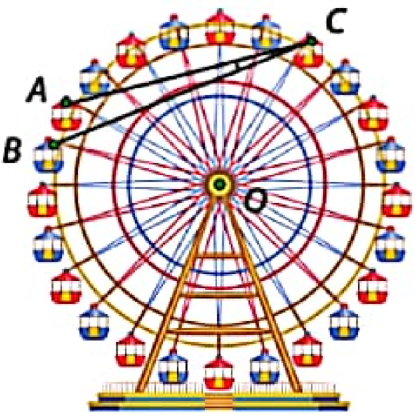
a) Chứng minh rằng $\Delta AMD \backsim \Delta CMB$.

b) Tính MB và MC, biết $MD = 100$, $MA = 70$, $AD = 40$, $BC = 42$.



Hình 5.70

5.32. Trên vòng đu quay tâm O, hai bạn An và Bình ngồi ở hai cabin tại điểm A và B kế tiếp nhau, bạn Cường ngồi trên cabin tại điểm C như *Hình 5.71*. Từ vị trí của mình, bạn Cường đo được $\widehat{ACB} = 7{,}5°$. Tính số đo cung AB, từ đó tính số cabin của vòng đu quay.

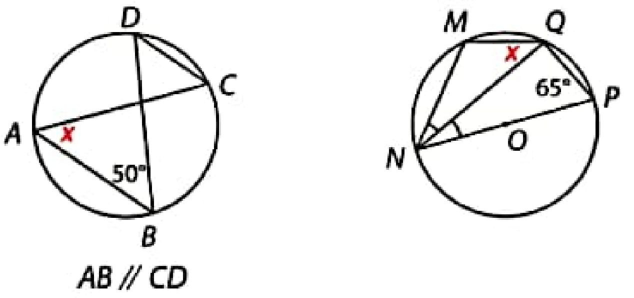


Hình 5.71

ÔN TẬP CHƯƠNG 5

BÀI TẬP TỰ LUẬN

5.33. Tính số đo x trong mỗi trường hợp ở *Hình 5.72*.

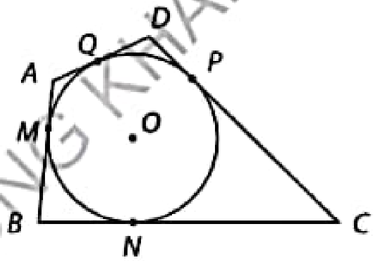


AB // CD

a) b)

Hình 5.72

5.34. Trong *Hình 5.73*, bốn cạnh của tứ giác *ABCD* tiếp xúc đường tròn (*O*). Chứng minh rằng $AD + BC = AB + CD$.

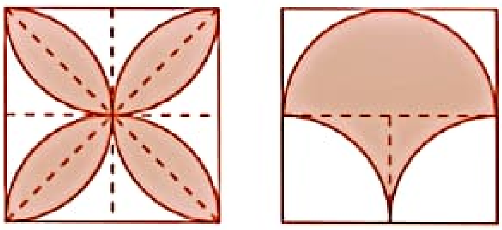


Hình 5.73

5.35. Cho đường tròn $(O; R)$. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn với $MO = 2R$, vẽ hai tiếp tuyến tiếp xúc (*O*) tại *A* và *B*. Viết công thức tính phần diện tích nằm ngoài đường tròn (*O*) của tứ giác *MAOB* theo *R*.

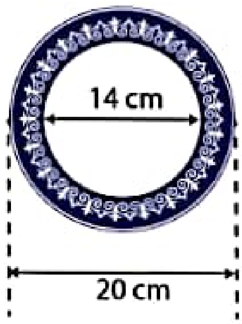
5.36. Cho hai đường tròn tâm *O* và *I* cắt nhau tại *M* và *N*. Vẽ một đường thẳng qua *M* cắt (*O*) tại *A* và cắt (*I*) tại *B*, một đường thẳng qua *N* cắt (*O*) tại *C* và (*I*) tại *D*. Chứng minh rằng *AC // BD*.

5.37. Trong *Hình 5.74*, độ dài cạnh của các hình vuông lớn là 10 cm. Tính diện tích và chu vi của phần được tô màu.



Hình 5.74

5.38. Tính chu vi đĩa sứ và diện tích phần viền tráng men xanh của đĩa sứ trong *Hình 5.75*.



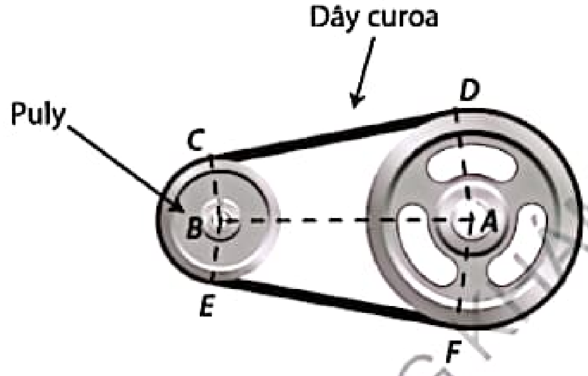
Hình 5.75

5.39. Trong *Hình 5.76*, hai puly có dạng hình tròn tâm A bán kính 12,5 cm và tâm B bán kính 7 cm được nối bằng dây curoa. Khoảng cách giữa tâm của hai puly là $AB = 30$ cm. Đoạn dây CD, EF tiếp xúc với cả hai puly. Tính:

a) Độ dài CD và số đo các góc của tứ giác $ABCD$;

b) Độ dài dây curoa.

Làm tròn độ dài đến hàng phần mười centimét, số đo góc đến phút.

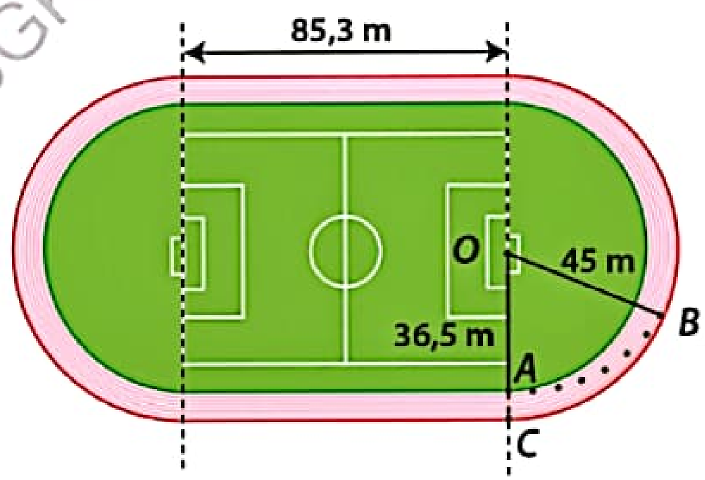


Hình 5.76

5.40. Trong *Hình 5.77*, mỗi làn chạy của sân vận động được thiết kế gồm hai phần là đường chạy thẳng và hai phần có dạng nửa đường tròn. Trong một cuộc thi điền kinh, vận động viên ở làn trong cùng xuất phát từ vị trí điểm A, chạy ngược chiều kim đồng hồ đúng một vòng và về đích ở điểm A.

a) Tính cự li chạy của cuộc thi (tổng quãng đường vận động viên phải chạy).

b) Để đảm bảo cự li chạy như nhau, vận động viên ở làn ngoài cùng không chạy đúng một vòng mà xuất phát từ vị trí điểm B và về đích ở điểm C. Xác định số đo góc COB.



Hình 5.77

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

5.41. Hai đường tròn có bán kính lần lượt là 7 cm và 8 cm. Khoảng cách giữa các tâm của hai đường tròn là 15 cm. Vị trí tương đối của hai đường tròn là

A. Cắt nhau. B. Tiếp xúc trong.

C. Tiếp xúc ngoài. D. Ngoài nhau.

5.42. Đường thẳng *d* tiếp xúc với đường tròn tâm *O* đường kính 8 cm. Khoảng cách từ tâm *O* đến đường thẳng *d* là

A. 4 cm. B. 8 cm.

C. 12 cm. D. 16 cm.

5.43. Từ điểm *M* vẽ tiếp tuyến *MA* đến đường tròn (*O*; 6 cm) (*A* là tiếp điểm). Nếu $MO = 10$ cm thì độ dài *MA* bằng

A. 6 cm. B. 7 cm.

C. 8 cm. D. 9 cm.

5.44. Cho *MA* và *MB* là hai tiếp tuyến của đường tròn (*O*; *R*) (*A*, *B* là hai tiếp điểm) sao cho ΔMAB là tam giác đều. Khoảng cách *OM* bằng

A. $\frac{1}{2}R$. B. R.

C. $2R$. D. $R\sqrt{2}$.

5.45. Góc nội tiếp chắn cung nhỏ *AB* có số đo 55°. Số đo của cung lớn *AB* là

A. 55°. B. 110°.

C. 205°. D. 250°.

5.46. Độ dài cung 30° của đường tròn bán kính 6 cm là

A. $\frac{\pi}{2}$ cm. B. π cm.

C. 2π cm. D. 3π cm.

5.47. Hình quạt tròn bán kính *R* (cm) ứng với cung 240° có diện tích bằng 6π cm^2. Bán kính *R* bằng

A. 3 cm. B. 6 cm.

C. 9 cm. D. 12 cm.

5.48. Diện tích của hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn tâm *O* là 240π cm^2. Nếu đường tròn nhỏ có bán kính 17 cm thì đường tròn lớn có bán kính là

A. 21 cm. B. 22 cm.

C. 23 cm. D. 24 cm.

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH VÀ TRẢI NGHIỆM

KIẾN TRÚC SƯ VÀ NHÀ THIẾT KẾ TƯƠNG LAI

Lưu ý: Trong bài có hướng dẫn các hoạt động dựng hình trực tiếp bằng thước và compa. Các thao tác dựng hình này có thể được thực hiện trên phần mềm GeoGebra theo các bước hoàn toàn tương tự.

Mục tiêu: Nắm được cách dựng một số đường cơ bản bằng thước, compa và sử dụng được chúng để dựng hình, chắp nối trơn các đường và thực hiện thiết kế đơn giản.

Yêu cầu chuẩn bị:

- Giấy;
- Thước thẳng, compa, bút chì, bút màu.

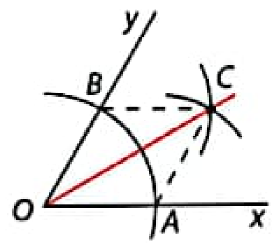
Tổ chức hoạt động: Học sinh thực hiện theo nhóm. Mỗi nhóm gồm 4 – 6 bạn.

HOẠT ĐỘNG 1

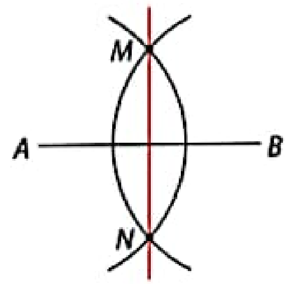
Dựng một số đường cơ bản bằng thước thẳng và compa

Dựng đường phân giác góc *xOy*:

- Vẽ đường tròn tâm *O* cắt hai cạnh của góc *xOy* tại *A* và *B*;
- Vẽ hai đường tròn tâm *A* và *B* có cùng bán kính cắt nhau tại điểm *C* khác *O*. Khi đó tia *OC* là tia phân giác của góc *xOy*.

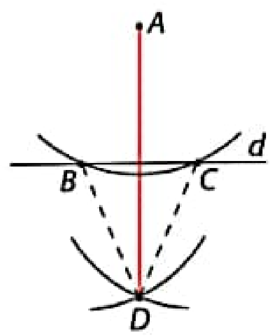


Dựng đường trung trực của đoạn thẳng *AB*: Vẽ hai đường tròn tâm *A* và tâm *B* có cùng bán kính lớn hơn $\frac{1}{2}AB$ cắt nhau tại hai điểm *M*, *N*. Khi đó *MN* là đường trung trực của *AB*.



Dựng đường thẳng qua điểm *A* và vuông góc đường thẳng *d*:

- Vẽ đường tròn tâm *A* cắt *d* tại hai điểm *B* và *C*;
- Vẽ hai đường tròn tâm *B* và *C* có cùng bán kính cắt nhau tại điểm *D* khác *A*. Khi đó *AD* là đường thẳng cần dựng.



Câu hỏi: Vì sao các cách dựng trên cho ta đường phân giác, đường trung trực và đường thẳng vuông góc cần dựng?

HOẠT ĐỘNG 2

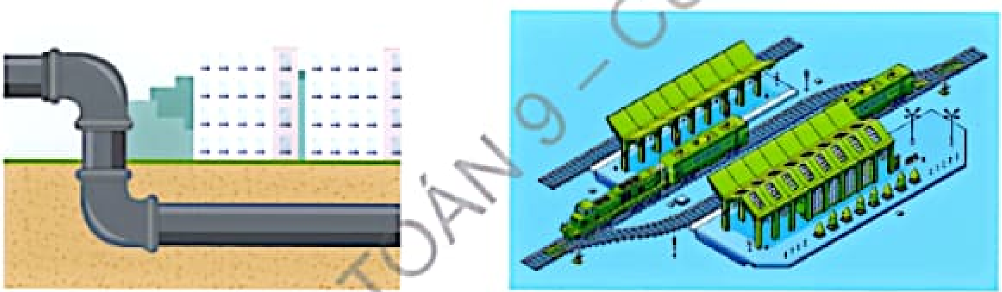
Giới thiệu về vẽ chắp nối trơn

Trong thiết kế kĩ thuật và đồ hoạ, ta thường gặp các trường hợp các chi tiết được chắp nối với nhau bằng các cung của đường tròn. Các đường tròn này thường tiếp xúc với các chi tiết được nối với chúng sao cho đường đi không bị "gãy" (*Hình 5.78a*) mà được "trơn" tại điểm nối (*Hình 5.78b*). Khi đó ta nói các chi tiết được chắp nối trơn với nhau.

a) Đường đi bị gãy tại điểm nối A *b) Đường đi trơn tại điểm nối B*

Hình 5.78

Chẳng hạn, trong *Hình 5.79*, các đoạn ống nước hay đường ray thẳng được chắp nối trơn với nhau bằng các cung của đường tròn. Điều này giúp cho các dòng lưu thông có thể được vận hành một cách trơn tru.

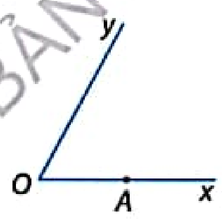


Hình 5.79

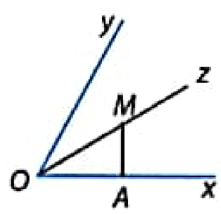
Thực hành 1: Em hãy tìm thêm các hình ảnh về các chi tiết được chắp nối trơn trên thực tế.

HOẠT ĐỘNG 3

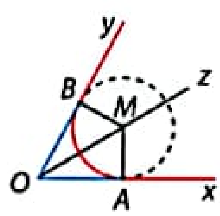
Vẽ chắp nối trơn hai đường thẳng



Vẽ chắp nối trơn hai tia *Ox* và *Oy* tại điểm *A* thuộc *Ox*.



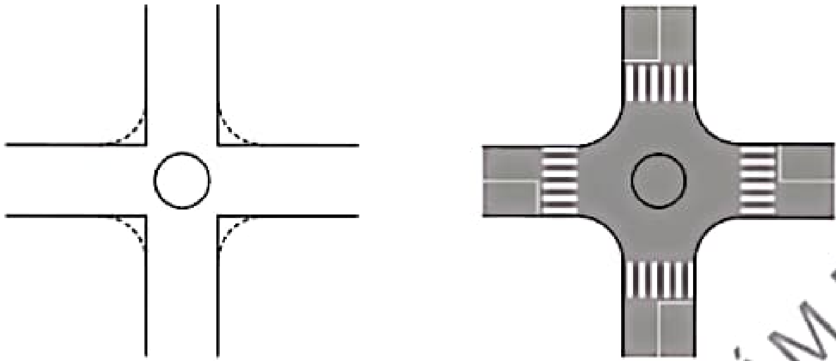
Bước 1 Dựng đường phân giác *Oz* của góc *xOy* và đường thẳng qua *A* vuông góc *Ox*. Hai đường thẳng cắt nhau tại *M*.



Bước 2 Dựng đường thẳng qua *M* vuông góc *Oy* cắt tia *Oy* tại *B*.
Vẽ đường tròn tâm *M* đi qua *A* ta được cung *AB* nối trơn hai tia *Ox* và *Oy*.

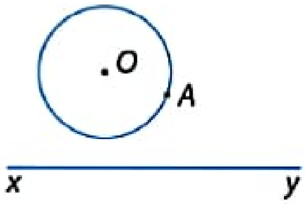
Câu hỏi: Vì sao với cách dựng như trên thì đường tròn (*M*; *MA*) tiếp xúc cả hai tia *Ox* và *Oy*?

Thực hành 2: Sử dụng phương pháp nối trơn hai đường thẳng để hoàn thiện phác thảo bên trái và trang trí thành bản vẽ thiết kế ngã tư đường như trong *Hình 5.80*.

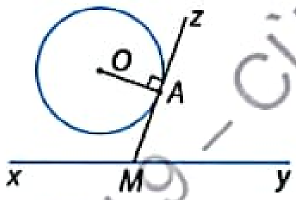


Hình 5.80

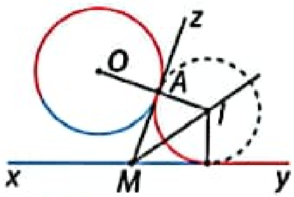
HOẠT ĐỘNG 4



Nối trơn đường thẳng *xy* và đường tròn (*O*) tại điểm *A* thuộc (*O*).

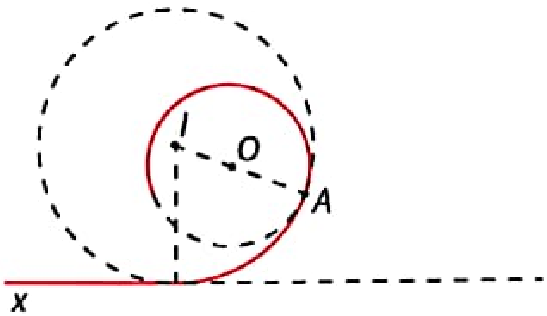


Bước ① Vẽ tiếp tuyến của đường tròn (*O*) tại *A*, cắt *xy* tại điểm *M*.



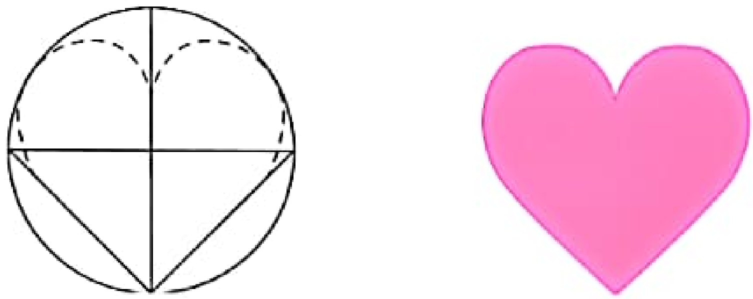
Bước ② Nối trơn tiếp tuyến *Mz* và tia *My* tại điểm *A* theo các bước như ở Hoạt động 2, ta được đường nối cần dựng.

Lưu ý: Ở Bước 2, ta cũng có thể nối trơn đường tròn (*O*) với tia *Mx*.



Câu hỏi: Vì sao với cách dựng như trên thì đường tròn (*I*; *IA*) tiếp xúc đường tròn (*O*) và đường thẳng *xy*? Trong trường hợp nào hai đường tròn (*O*) và (*I*) tiếp xúc ngoài, trong trường hợp nào hai đường tròn tiếp xúc trong?

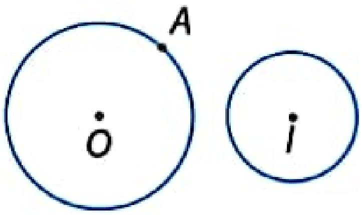
Thực hành 3: Sử dụng phương pháp nối trơn đường thẳng với đường tròn để hoàn thiện phác thảo bên trái và tô màu thành hoa văn hình trái tim như trong *Hình 5.81*.



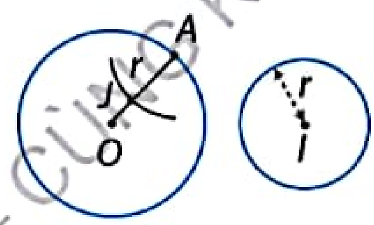
Hình 5.81

HOẠT ĐỘNG 5

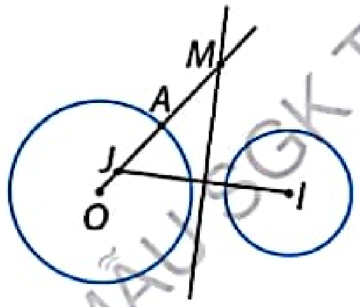
Vẽ chắp nối trơn hai đường tròn



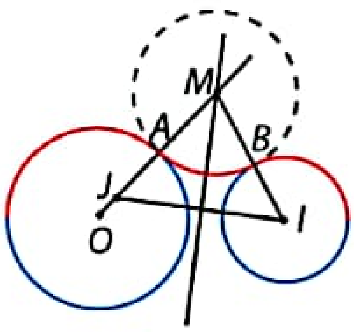
Nối trơn hai đường tròn (*O*) và (*I*) từ điểm *A* thuộc (*O*).



Bước 1 Xác định điểm *J* trên bán kính *OA* sao cho *AJ* bằng bán kính của (*I*).



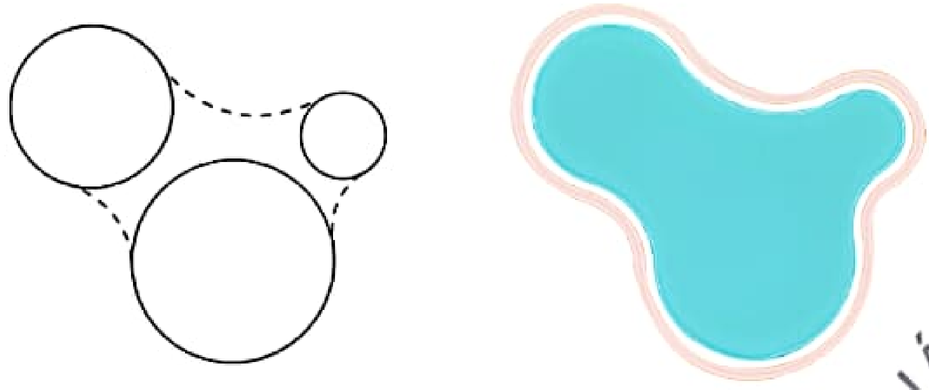
Bước 2 Dựng đường trung trực của *IJ* cắt đường thẳng *OA* tại *M*.



Bước 3 Xác định giao điểm *B* của *MI* và đường tròn (*I*). Vẽ đường tròn tâm *M* đi qua *A*, ta được cung *AB* là đường nối trơn cần dựng.

Câu hỏi: Vì sao với cách dựng như trên thì *MA* = *MB* và đường tròn (*M*; *MA*) tiếp xúc cả hai đường tròn (*O*) và (*I*)?

Thực hành 4: Sử dụng phương pháp nối trơn đường tròn với đường tròn ở trên để hoàn thiện phác thảo bên trái và trang trí thành thiết kế hồ bơi trong *Hình 5.82*.



Hình 5.82

Thực hành 5: Sử dụng các phương pháp dựng hình và chắp nối trơn như trên để thực hiện một thiết kế hoặc mẫu hoa văn trang trí tuỳ ý. Trình bày ý tưởng và mẫu thiết kế trước lớp.

EM CÓ BIẾT

Quy củ

Trong từ vựng Hán Việt, "quy" (規) là dụng cụ dùng để vẽ đường tròn hay là cái compa, "củ" (矩) là thước để vẽ góc vuông hay là thước ê ke. Đây là hai dụng cụ cơ bản và không thể thiếu trong việc xây dựng và thiết kế vì nếu không có chúng thì các hình thiết kế không thể chuẩn xác. Trong cuộc sống hằng ngày, từ "quy củ" mang nghĩa "những quy định nhằm làm cho một việc làm nào đó thành có trật tự, có tổ chức".
(Theo *Từ điển tiếng Việt*, Viện Ngôn ngữ học)

BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ

B

Bất đẳng thức	29
Bất phương trình	37
Bất phương trình bậc nhất một ẩn	39

C

Căn bậc ba	66
Căn bậc hai	51
Căn thức bậc ba	69
Căn thức bậc hai	59
Cạnh đối	75
Cạnh kề	75
Cát tuyến của đường tròn	108
Côsin của góc	76
Côtang của góc	76
Cung bị chắn	116
Cung lớn	116
Cung $n°$	116
Cung nhỏ	116

D

Dây	100

Đ

Điều kiện xác định của phương trình chứa ẩn ở mẫu	4
Đưa thừa số ra ngoài dấu căn	56
Đưa thừa số vào trong dấu căn	56
Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	107
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau	107
Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau	107

G

Giải tam giác vuông	85
Giao điểm của đường thẳng và đường tròn	108
Giao điểm của hai đường tròn	103
Góc hạ	95
Góc nâng	95
Góc nội tiếp	123
Góc ở tâm	116

H

Hai biểu thức liên hợp với nhau	63
Hai đường tròn cắt nhau	103
Hai đường tròn không giao nhau	103
Hai đường tròn tiếp xúc ngoài	103
Hai đường tròn tiếp xúc nhau	103
Hai đường tròn tiếp xúc trong	103
Hai góc phụ nhau	78
Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn x và y	11
Hình quạt tròn	119
Hình vành khuyên	120
Hình viên phân	120

N

Nghiệm của bất phương trình	38
Nghiệm của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn	11

P

Phương trình bậc nhất hai ẩn x và y	8
Phương trình chứa ẩn ở mẫu	4

S

Sin của góc	76

T

Tang của góc	76
Tâm đối xứng	98
Tỉ số lượng giác	76
Tiếp điểm của đường thẳng và đường tròn	108
Tiếp điểm của hai đường tròn	103
Tiếp tuyến của đường tròn	108
Trục căn thức ở mẫu	63
Trục đối xứng	99

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

Thuật ngữ	Giải thích
Bất đẳng thức	Hệ thức dạng $a < b$ (hoặc $a > b$, $a \le b$, $a \ge b$).
Bất phương trình	Cho $A(x)$, $B(x)$ là hai biểu thức của biến x. Khi cần tìm x sao cho $A(x) > B(x)$ (hoặc $A(x) < B(x)$, $A(x) \ge B(x)$, $A(x) \le B(x)$), ta nói $A(x) > B(x)$ (hoặc $A(x) < B(x)$, $A(x) \ge B(x)$, $A(x) \le B(x)$) là một bất phương trình ẩn x.
Bất phương trình bậc nhất một ẩn	Bất phương trình có dạng $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b < 0$, $ax + b \ge 0$, $ax + b \le 0$), trong đó $a \ne 0$.
Căn bậc ba	Căn bậc ba của một số thực a là số x sao cho $x^3 = a$.
Căn bậc hai	Căn bậc hai của một số thực a không âm là số x sao cho $x^2 = a$.
Căn thức bậc ba	Với A là một biểu thức đại số, ta gọi $\sqrt[3]{A}$ là căn thức bậc ba của A.
Căn thức bậc hai	Với A là một biểu thức đại số, ta gọi $\sqrt{A}$ là căn thức bậc hai của A.
Cạnh đối	Cho tam giác ABC vuông tại A. Cạnh AC được gọi là cạnh đối của góc B.
Cạnh kề	Cho tam giác ABC vuông tại A. Cạnh AB được gọi là cạnh kề của góc B.
Cát tuyến của đường tròn	Đường thẳng mà cắt đường tròn đó.

Côsin của góc	Cho tam giác vuông có góc nhọn α. Côsin của α là tỉ số giữa cạnh kề của α và cạnh huyền.
Côtang của góc	Cho tam giác vuông có góc nhọn α. Côtang của α là tỉ số giữa cạnh kề và cạnh đối của α.
Cung bị chắn	• Cung bị chắn bởi góc ở tâm: cung nằm trong góc ở tâm. • Cung bị chắn bởi góc nội tiếp: cung nằm trong góc nội tiếp.
Cung lớn	Trong hai cung có cùng đầu mút, cung có độ dài lớn hơn được gọi là cung lớn.
Cung nhỏ	Trong hai cung có cùng đầu mút, cung có độ dài nhỏ hơn được gọi là cung nhỏ.
Dây	Một dây của đường tròn là đoạn thẳng nối hai điểm phân biệt của đường tròn đó.
Điều kiện xác định của phương trình chứa ẩn ở mẫu	Là điều kiện của ẩn để tất cả các mẫu trong phương trình đều khác 0.
Đưa thừa số ra ngoài dấu căn	Là cách biến đổi: $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ khi $a \geq 0, b \geq 0$; $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$ khi $a < 0, b \geq 0$.
Đưa thừa số vào trong dấu căn	Là cách biến đổi: $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$ khi $a \geq 0, b \geq 0$; $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2b}$ khi $a < 0, b \geq 0$.
Đường thẳng và đường tròn cắt nhau	Đường thẳng và đường tròn có đúng hai điểm chung phân biệt.
Đường thẳng và đường tròn không giao nhau	Đường thẳng và đường tròn không có điểm chung nào.
Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau	Đường thẳng và đường tròn có đúng một điểm chung.
Giải tam giác vuông	Là bài toán xác định số đo tất cả các góc và độ dài tất cả các cạnh của một tam giác vuông.
Giao điểm của hai đường tròn	Điểm chung của hai đường tròn cắt nhau.

Góc nội tiếp	Góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn.
Góc ở tâm	Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn.
Hai biểu thức liên hợp với nhau	$\sqrt{A}+B$ và $\sqrt{A}-B$ là hai biểu thức liên hợp với nhau. $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ và $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ là hai biểu thức liên hợp với nhau.
Hai đường tròn cắt nhau	Hai đường tròn có đúng hai điểm chung.
Hai đường tròn không giao nhau	Hai đường tròn không có điểm chung nào.
Hai đường tròn tiếp xúc ngoài	Hai đường tròn tiếp xúc nhau và nằm ngoài nhau.
Hai đường tròn tiếp xúc nhau	Hai đường tròn có đúng một điểm chung.
Hai đường tròn tiếp xúc trong	Hai đường tròn tiếp xúc nhau và một đường tròn nằm trong đường tròn còn lại.
Hai góc phụ nhau	Là hai góc có tổng số đo bằng 90°.
Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn x và y	Là hệ gồm hai phương trình bậc nhất hai ẩn x và y.
Hình quạt tròn	Phần hình tròn bị giới hạn bởi một cung và hai bán kính đi qua đầu mút của cung đó.
Hình vành khuyên	Hình giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm khác bán kính.
Hình viên phân	Hình giới hạn bởi một cung của đường tròn và dây nối hai đầu mút của cung đó.
Nghiệm của bất phương trình	Nếu khi thay giá trị $x = x_0$ vào hai vế của bất phương trình ẩn x mà được một khẳng định đúng thì ta nói $x = x_0$ là một nghiệm của bất phương trình đó.
Nghiệm của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn	Là nghiệm chung của hai phương trình trong hệ.
Phương trình bậc nhất hai ẩn x và y	Là phương trình có dạng $ax + by = c$, trong đó a, b, c là các số đã biết ($a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$).
Phương trình chứa ẩn ở mẫu	Là phương trình có biểu thức chứa ẩn ở mẫu.

Sin của góc	Cho tam giác vuông có góc nhọn α. Sin của α là tỉ số giữa cạnh đối của α và cạnh huyền.
Tang của góc	Cho tam giác vuông có góc nhọn α. Tang của α là tỉ số giữa cạnh đối và cạnh kề của α.
Tỉ số lượng giác	Là các tỉ số sin, côsin, tang, côtang.
Tiếp điểm của đường thẳng và đường tròn	Điểm chung của đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau.
Tiếp điểm của hai đường tròn	Điểm chung của hai đường tròn tiếp xúc nhau.
Tiếp tuyến của đường tròn	Đường thẳng tiếp xúc đường tròn.
Trục căn thức ở mẫu	Là phép biến đổi các biểu thức chứa căn thức về dạng không còn căn thức ở mẫu.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC HUẾ
07 Hà Nội, Phường Vĩnh Ninh, Thành phố Huế, Tỉnh Thừa Thiên Huế
Điện thoại: (0234) 3834486
Email: nxbdhhue@hueuni.edu.vn - Website: http://huph.hueuni.edu.vn

TOÁN 9_TẬP 1 *(Bản mẫu)*
LÊ THỊ HOÀI CHÂU *(Tổng Chủ biên)*, **PHẠM THỊ THU THUỶ** *(Chủ biên)*, **TRẦN TRÍ DŨNG, LÊ ĐẠI DƯƠNG**

Chịu trách nhiệm xuất bản: Giám đốc Trần Bình Tuyên
Chịu trách nhiệm nội dung: Quyền Tổng biên tập Nguyễn Chí Bảo
Biên tập viên: Trương Thị Mỹ Vân
Trình bày bìa: Nguyễn Diễm Quỳnh, Trần Thị Thuyên
Sửa bản in: Lại Thị Kiều Vi, Trịnh Thái Phượng, Đàm Huỳnh Phương Thảo, Chương Ái Đào, Nguyễn Hương Quỳnh, Trịnh Khánh Vy, Nguyễn Đoan Trang, Nguyễn Văn Vĩnh, Nguyễn Vũ Khánh Linh, Trần Thị Thu Nguyệt
Đối tác liên kết: Công ty TNHH Education Solutions Việt Nam
Địa chỉ: Tầng 1, toà nhà Vietphone Building, 64 Nguyễn Đình Chiểu, Phường Đa Kao, Quận 1, Thành phố Hồ Chí Minh
Bản quyền hình ảnh từ Shutterstock.

In cuốn, khổ 19 × 26.5 (cm) tại

Địa chỉ:

Số xác nhận đăng kí xuất bản:

Quyết định xuất bản số:
Kí ngày / /2023
In và nộp lưu chiểu năm 2023.
Mã số sách tiêu chuẩn quốc tế - ISBN:

Toán 9

Tập 1

Phương trình quy về phương trình bậc nhất một ẩn.
Phương trình và hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Bất đẳng thức.
Bất phương trình bậc nhất một ẩn

Căn thức

Hệ thức lượng trong tam giác vuông

Đường tròn

DTP
Education Solutions