

Câu 1 (6,5 điểm). a) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + m^4$ (1), m là tham số thực.

Tìm tham số m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 2, trong đó $C(0; -1)$.

b) Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} (xy + 3x)\sqrt{y+2} - \sqrt{x}(2x+1) = \sqrt{x^5} - (y+3)\sqrt{y+2} \\ \sqrt[4]{x^4 - 13y + m} + y + 1 = 0 \end{cases}$$

(x, y thuộc $\mathbb{R}$, m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm.

Câu 2 (5,0 điểm)

a) Có 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên 6 thẻ rồi ghép thành một số tự nhiên gồm 6 chữ số. Tính xác suất để rút được 6 thẻ và ghép thành một số tự nhiên có 6 chữ số chia hết cho 9.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f'(x) = (x-2)(x+5)(x+1)$ và $f(-5) = f(2) = 1$. Xét tính đơn điệu của hàm số $g(x) = [f(x^2)]^2$.

Câu 3 (4,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AC = 2a, BD = 4a$. Tính theo a thể tích hình chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC .

Câu 4 (2,5 điểm) Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi A, B, C là ba góc của tam giác ABC và α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi OA, OB, OC với mặt phẳng (ABC) . Chứng minh rằng:

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\sin 2A} = \frac{\cos^2 \beta}{\sin 2B} = \frac{\cos^2 \gamma}{\sin 2C}.$$

Câu 5 (2,0 điểm). Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^3}}$.

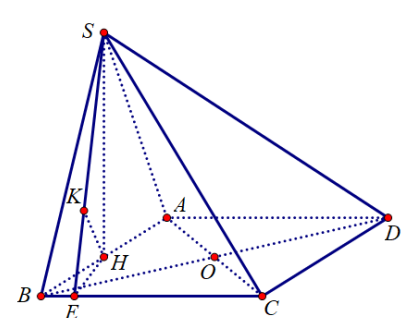
..... Hết

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ THANG ĐIỂM

Câu 1. a) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + m^4$ (1), m là tham số thực. Tìm tham số m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 2, trong đó $C(0; -1)$.	3,5
Tập xác định: $\mathbb{R}$ Ta có $y' = 3x^2 - 6mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2m$. Đồ thị có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m \neq 0$ (*)	1,0
Các điểm cực trị của đồ thị là $A(0; m^4); B(2m; m^4 - 4m^3)$.	0,5
Suy ra $AC = m^4 + 1 = m^4 + 1$; $C \in Oy \Rightarrow d(B, AC) = 2 m$. Do đó $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot d(B, AC) = m (m^4 + 1)$; $S_{ABC} = 2 \Leftrightarrow m (m^4 + 1) = 2$.	1,0
Đặt $m = t > 0$ ta được $t^5 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^4 + t^3 + t^2 + t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ Do đó $m = \pm 1$ (thỏa mãn điều kiện (*)). Vậy $m = \pm 1$.	1,0
b) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (xy + 3x)\sqrt{y + 2} - \sqrt{x}(2x + 1) = \sqrt{x^5} - (y + 3)\sqrt{y + 2}, (1) \\ \sqrt[4]{x^4 - 13y + m} + y + 1 = 0, (2) \end{cases}$	3,0
Điều kiện xác định: $x \geq 0, y \geq -2, x^4 - 13y + m \geq 0$. (1) $\Leftrightarrow (xy + 3x)\sqrt{y + 2} - \sqrt{x}(2x + 1) - \sqrt{x^5} + (y + 3)\sqrt{y + 2} = 0$ $\Leftrightarrow (xy + 3 + y + 3x)\sqrt{y + 2} - \sqrt{x}(2x + 1) - x^2\sqrt{x} = 0$ $\Leftrightarrow (x + 1)(y + 3)\sqrt{y + 2} - (x^2 + 2x + 1)\sqrt{x} = 0$ $\Leftrightarrow (x + 1)[(y + 3)\sqrt{y + 2} - (x + 1)\sqrt{x}] = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 (l) \\ (y + 3)\sqrt{y + 2} = (x + 1)\sqrt{x} (*) \end{cases}$	0,5
(*) $\Leftrightarrow (\sqrt{y + 2})^3 + \sqrt{y + 2} = \sqrt{x^3} + \sqrt{x}$. Xét hàm đặc trưng $f(t) = t^3 + t$, trên $[0; +\infty)$. Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ Do đó (*) $\Leftrightarrow \sqrt{y + 2} = \sqrt{x} \Rightarrow y = x - 2$	0,5
Thế $y = x - 2$ vào pt (2) ta có : $\sqrt[4]{x^4 - 13x + 26 + m} + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4 - 13x + 26 + m} = 1 - x$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ -4x^3 + 6x^2 + 9x - 25 = m, (3) \end{cases}$	0,5
Hệ phương trình đã cho có nghiệm khi phương trình (3) có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$. Xét hàm số $g(x) = -4x^3 + 6x^2 + 9x - 25$ trên đoạn $[0; 1]$.	1,0

có $g'(x) = -12x^2 + 12x + 9; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \notin [0;1] \\ x = -\frac{1}{2} \notin [0;1] \end{cases}$ Ta có: $g(0) = -25; g(1) = -14. \Rightarrow -25 \leq g(x) \leq -14$	
Suy ra (3) có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$ khi $-25 \leq m \leq -14$. Hay hệ phương trình đã cho có nghiệm khi $-25 \leq m \leq -14$.	0,5
a) Có 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên 6 thẻ rồi ghép thành một số tự nhiên gồm 6 chữ số. Tính xác suất để rút được 6 thẻ và ghép thành một số tự nhiên có 6 chữ số chia hết cho 9.	3,0
* Mỗi cách rút 6 thẻ rồi ghép thành một số là một chỉnh hợp chập 6 của 9. Gọi Ω là không gian mẫu ta có $n(\Omega) = A_9^6 = 60480$.	1,0
* Gọi biến cố A= “ghép thành số chia hết cho 9”. Ta có tổng các số ghi trên 9 thẻ là 45 chia hết cho 9, do đó số bộ gồm 6 số có tổng chia hết cho 9 bằng số bộ 3 số mà tổng của chúng chia hết cho 9. Các bộ 3 số có tổng chia hết cho 9 là $\{1;2;6\}, \{1;3;5\}, \{1;8;9\}, \{2;3;4\}, \{2;7;9\}, \{3;6;9\}, \{3;7;8\}, \{4;5;9\}, \{4;6;8\}; \{5;6;7\}$. Như vậy sẽ có 10 bộ 3 số mà tổng của chúng chia hết cho 9. Mỗi bộ lập được $6! = 720$ số nên $n(A) = 7200$.	1,5
* Vậy, xác suất biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{7200}{60480} = \frac{5}{42}$.	0,5

b) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f'(x) = (x-2)(x+5)(x+1)$ và $f(-5) = f(2) = 1$. Xét tính đơn điệu của hàm số $g(x) = [f(x^2)]^2$.	2,0																										
Từ giả thiết ta có $f'(x) = (x-2)(x+5)(x+1) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -5 \\ x = -1 \end{cases}$ Bảng biến thiên của $y = f(x)$ <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-5</td><td>-1</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td></td><td></td><td>$f(-1)$</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table> Từ BBT suy ra $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.	x	$-\infty$	-5	-1	2	$+\infty$	$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$f(x)$	$+\infty$			$f(-1)$			1		$+\infty$	0,5
x	$-\infty$	-5	-1	2	$+\infty$																						
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$																			
$f(x)$	$+\infty$			$f(-1)$			1		$+\infty$																		
Xét hàm số $g(x) = [f(x^2)]^2$ $g'(x) = \left([f(x^2)]^2 \right)' = 4x \cdot f'(x^2) f(x^2) = 4x(x^2-2)(x^2+5)(x^2+1) f(x^2)$ Do $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x^2) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$	0,5																										

Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$																							
BBT của $g(x)=\left[f\left(x^2\right)\right]^2$ <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\sqrt{2}$</td><td>0</td><td>$\sqrt{2}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>$+\infty$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$	$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$g(x)$	$+\infty$						$+\infty$	0,5
x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$																		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$																
$g(x)$	$+\infty$						$+\infty$																
Từ bản biến thiên của hàm số $g(x)$ ta suy ra Hàm số $g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\sqrt{2}; 0); (\sqrt{2}; +\infty)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -\sqrt{2}); (0; \sqrt{2})$	0,5																						
Câu 3 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AC = 2a, BD = 4a$. Tính theo a thể tích hình chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC .	4,0																						
Ta có: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC.BD = \frac{1}{2} 2a.4a = 4a^2$ $SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$ $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3} 4a^2 . \frac{a\sqrt{15}}{2} = \frac{2\sqrt{15}a^3}{3}$ 	2,0																						
* Gọi $O = AC \cap BD$, H là trung điểm của AB , suy ra $SH \perp AB$. Do $AB = (SAB) \cap ABCD$ và $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$ Ta có $OA = \frac{AC}{2} = \frac{2a}{2} = a$, $OB = \frac{BD}{2} = \frac{4a}{2} = 2a$. $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$. * Vì $BC \parallel AD$ nên $AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(AD, SC) = d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC))$. Do H là trung điểm của AB và $B = AH \cap (SBC)$ nên $d(A, (SBC)) = 2d(H, (SBC))$. Kẻ $HE \perp BC, H \in BC$, do $SH \perp BC$ nên $BC \perp (SHE)$. Kẻ $HK \perp SE, K \in SE$, ta có $BC \perp HK \Rightarrow HK \perp (SBC) \Rightarrow HK = d(H, (SBC))$.	0,5																						
$HE = \frac{2S_{BCH}}{BC} = \frac{S_{ABC}}{BC} = \frac{S_{ABCD}}{2.AB} = \frac{4a^2}{2a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.	0,5																						
$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{5}{4a^2} + \frac{4}{15a^2} = \frac{91}{60a^2} \Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{91}} = \frac{2a\sqrt{1365}}{91}$ Vậy $d(AD, SC) = 2HK = \frac{4a\sqrt{1365}}{91}$.	0,5																						

Câu 4: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi A, B, C là ba góc của tam giác ABC và α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi OA, OB, OC với mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng: $\frac{\cos^2 \alpha}{\sin 2A} = \frac{\cos^2 \beta}{\sin 2B} = \frac{\cos^2 \gamma}{\sin 2C}$	2,5
Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC) (phải có hình) $\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác ABC. $\Rightarrow OAH = \alpha; OBH = \beta; OCH = \gamma$ Gọi AK là đường cao của tam giác ABC. Ta có: $\cos^2 \alpha = \frac{AH^2}{OA^2} = \frac{AH^2}{AH \cdot AK} = \frac{AH}{AK}$ (1)	0,75
Mặt khác: $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{2OA^2}{2AB \cdot AC} > 0$ Tương tự: $\cos B, \cos C > 0$ nên tam giác ABC nhọn.	0,5
- Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có: $\frac{BC}{\sin A} = 2R ; \sin A = \sin BHC \Rightarrow \frac{BC}{\sin BHC} = 2R \Rightarrow R \text{ cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác } BHC.$ - Trong tam giác ABH: $AH = 2R \cdot \sin ABH = 2R \cdot \cos A$ Nên: $\sin 2A = 2 \sin A \cdot \cos A = 2 \cdot \frac{BC}{2R} \cdot \frac{AH}{2R} = \frac{BC \cdot AH}{R^2}$ (2)	0,5
Từ (1) và (2) ta có: $\frac{\cos^2 A}{\sin 2A} = \frac{R^2}{S_{\triangle ABC}}$ Chứng minh tương tự ta cũng có: $\frac{\cos^2 B}{\sin 2B} = \frac{R^2}{S_{\triangle ABC}} ; \frac{\cos^2 C}{\sin 2C} = \frac{R^2}{S_{\triangle ABC}}$ Vậy ta có ĐPCM.	0,75
Câu 5: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^3}}.$	2,0

Áp dụng Cô-si, ta có $1+x^3=(1+x)(1-x+x^2)\leq\frac{(1+x+1-x+x^2)^2}{4}=\frac{(2+x^2)^2}{4}$ Tương tự $\frac{1}{\sqrt{1+y^3}}\geq\frac{2}{2+y^2};\frac{1}{\sqrt{1+z^3}}\geq\frac{2}{2+z^2}$	0,5
Vậy $P=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^3}}\geq\frac{2}{2+x^2}+\frac{2}{2+y^2}+\frac{2}{2+z^2}$	0,5
Áp dụng kết quả $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geq 9$, ta được: $P\geq\frac{18}{x^2+y^2+z^2+6}\geq 1$ Dấu ‘=’ xảy ra khi $x=y=z=2$ Vậy GTNN của biểu thức là $P=1$.	1,0

Lưu ý: Trên đây là hướng dẫn chấm sơ bộ, thí sinh cần trình bày lập luận chặt chẽ chi tiết đầy đủ, đúng mới cho điểm tối đa,

(Thí sinh giải cách khác, theo thang điểm như hướng dẫn để chấm)