

Bài 1: (4,0 điểm).

1) Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

a) Rút gọn biểu thức A. $\frac{2}{1-x}$

b) Tìm x để $A > 0$. $x < \frac{1}{2}$ và $x \neq -1$ và $x \neq \frac{1}{2}$

2) Cho đa thức: $P(x) = x^{2012} - 2011x^{2011} - 2011x^{2010} - \dots - 2011x^2 - 2011x + 1$

Tính $P(2012)$ $\checkmark = 2013$

Bài 2: (4,0 điểm).

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + xy - 2x + 1 = x + y$ $\checkmark (1, 2) (1, 0)$

b) Cho x, y là các số thực khác 0 thỏa mãn: $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 5 = 0$

Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{xy + x + y + 13}{4xy}$ $\checkmark = 1$

Bài 3: (4,0 điểm).

a) Giải phương trình: $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ $\checkmark (-1, 1) (-1, 0) x = 2, -1$

b) Cho a, b nguyên dương và a+1 và b+2007 đều chia hết cho 6.

Chứng minh rằng: $4^a + a + b$ chia hết cho 6 $\checkmark$

Bài 4: (6,0 điểm).

Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy một điểm M bất kỳ trên cạnh AC. Từ C đường thẳng vuông góc với tia BM tại D và cắt BA tại E.

a) Chứng minh: $EA \cdot EB = EC \cdot ED$ $\checkmark$

b) Cho góc $BMC = 120^\circ$ và $S_{AED} = 36 \text{ cm}^2$. Tính S_{EBC} $\checkmark = 144$

c) Chứng minh $BM \cdot BD + CM \cdot CA = BC^2$ $\checkmark$

Bài 5: (2,0 điểm).

Cho hai số dương a và b thỏa mãn: $a + b = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{ab} + 40(a^4 + b^4)$ $\checkmark$

$\text{Min } P = 9 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

HẾT

Sơ lược bài giải

Câu 1:

1) Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

a/ Rút gọn A

b/ Tìm x để $A > 0$

Giải:

a) Rút gọn A: ĐKXĐ: $x \neq \pm 1; x \neq \frac{1}{2}$

$$A = \left(\frac{1+x+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2} \right) \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} = \frac{-2}{1-x^2} \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} = \frac{2}{1-2x}$$

b) $A > 0$

$$\frac{2}{1-2x} > 0, \text{ mà } 2 > 0 \text{ nên } 1-2x > 0 \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

KL:

2) $P(x) = x^{2012} - 2011x^{2011} - 2011x^{2010} - \dots - 2011x^2 - 2011x + 1$

$$P(x) = x^{2012} - 2012x^{2011} + x^{2011} - 2011x^{2010} - \dots + x^3 - 2012x^2 + x^2 - 2012x + x + 1$$

$$P(x) = x^{2011}(x - 2012) + x^{2010}(x - 2012) + \dots + x^2(x - 2012) + x(x - 2012) + x + 1$$

$$\text{ nên } P(2012) = 2012 + 1 = 2013$$

Bài 2:

a) Ta có $x^2 + xy - 2x + 1 = x + y \Leftrightarrow (x-1)^2 + y(x-1) - (x-1) = 1$
 $\Leftrightarrow (x-1)(x-1+y-1) = 1$
 $\Leftrightarrow (x-1)(x+y-2) = 1$

Giải ra ta được $x = 0; y = 1$

$x = 2; y = 1$ là hai nghiệm của PT

Có thể giải cách 2: $x^2 + xy - 2x + 1 = x + y \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - x = y(1-x)$

$$\Leftrightarrow y = \frac{(1-x)^2 - x}{1-x} = 1 - x - \frac{x}{1-x} = 1 - x + \frac{1-x+1}{1-x}$$

$$y = 1 - x + 1 + \frac{1}{1-x}$$

Vì y là số nguyên nên $x-1$ là ước của 1 từ đó tìm được x, y tương ứng

b) Ta có $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-y-1)^2 + (y-2)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

Vì $(x-y-1)^2 \geq 0$ và $(y-2)^2 \geq 0$ Suy ra được

Thay vào ta tính được $P = 1$

Bài 3: a) Giải PT: $x^6 - 7x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^6 + x^3 - 8x^3 - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow x^3(x^3+1) - 8(x^3+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3-8)(x^3+1) = 0$$

Giải ra ta được $S = \{-1; 2\}$ là tập nghiệm của PT

b) Theo gt $a+1$ và $b+2017$ chia hết cho 6 nên a và b đều là các số lẻ
do đó $4^a + a + b$ chia hết cho 2 (1)

Vì $a+1$ và $b+2017$ chia hết cho 6 nên $a+b+2008$ chia hết cho 3

$\Leftrightarrow (a+b+1) + 2007$ chia hết cho 3 mà $2007 : 3$ nên $a+b+1 : 3$

Ta lại có $4^a + a + b = 4^a - 1 + a + b + 1$

trong đó $(4^a - 1) : (4 - 1)$ hay $(4^a - 1) : 3$ và theo trên $(a+b+1) : 3$ nên $(4^a + a + b) : 3$ (2)

từ (1); (2) và (2,3)=1 nên ta có điều cần c/m

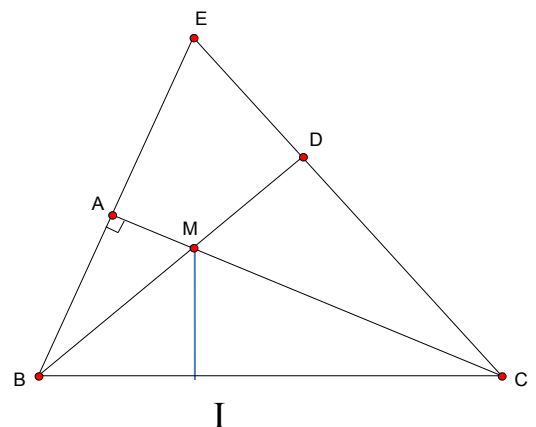
Bài 4

Cho tam giác ABC vuông tại A, lấy M là điểm bất kỳ trên AC. Từ C vẽ đường vuông góc với BM tại D và cắt BA tại E

a) c/m $EA \cdot EB = EC \cdot ED$

b) Cho góc $BMC = 120^\circ$, và $S_{ADE} = 36 \text{ cm}^2$ tính S_{EBC}

c) Chứng minh $BM \cdot BD + CM \cdot CA = BC^2$



a) Chứng minh $EA \cdot EB = ED \cdot EC$. Chứng minh $\triangle EBD$ đồng dạng với $\triangle ECA$ (g-g)

- Từ đó suy ra $\frac{EB}{EC} = \frac{ED}{EA} \Rightarrow EA \cdot EB = ED \cdot EC$

b) Theo đ/l tổng số đo các góc của tứ giác suy ra được $\angle BEC = 60^\circ$

do đó $\angle ACE = 30^\circ$ suy ra $AE = \frac{1}{2} EC$

C/M $\triangle EAD$ đồng dạng với $\triangle ECB$ (c-g-c)

tỉ số đồng dạng $k = \frac{EA}{EC} = \frac{1}{2}$ suy ra $\frac{S_{EAD}}{S_{ECB}} = k^2 = \frac{1}{4}$

hay $S_{ECB} = 4 S_{EAD} = 36 \cdot 4 = 144 \text{ cm}^2$

c) Kẻ MI vuông góc với BC ($I \in BC$). Ta có $\triangle BIM$ đồng dạng với $\triangle BDC$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BI}{BD} \Rightarrow BM \cdot BD = BI \cdot BC$ (1)

Tương tự: $\triangle ACB$ đồng dạng với $\triangle ICM$ (g-g) $\Rightarrow \frac{CM}{BC} = \frac{CI}{CA} \Rightarrow CM \cdot CA = CI \cdot BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BM \cdot BD + CM \cdot CA = BI \cdot BC + CI \cdot BC = BC(BI + CI) = BC^2$ (không đổi)

