

Chương I. PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

Chuyên đề 4. HẰNG ĐẲNG THỨC MỞ RỘNG

A. Kiến thức cần nhớ

1. Bình phương của một đa thức

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \dots + 2a_1a_n \\ + 2a_2a_3 + 2a_2a_4 + \dots + 2a_2a_n + \dots + \dots + 2a_{n-1}a_n$$

Đặc biệt ta có :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

2. Bảng khai triển hệ số: $(a + b)^n$

Với $n = 0$: 1

Với $n = 1$: 1 1

Với $n = 2$: 1 2 1

Với $n = 3$: 1 3 3 1

Với $n = 4$: 1 4 6 4 1

Với $n = 5$: 1 5 10 10 5 1

.....
Mỗi dòng đều bắt đầu bằng 1 và kết thúc bằng 1

Mỗi số ở một dòng kể từ dòng thứ hai đều bằng số liền trên cộng với số bên trái của số liền trên.

Bảng trên đây được gọi là tam giác Pa-xcan, cho ta biết hệ số khi khai triển $(a + b)^n$. Chẳng hạn cho n các giá trị từ 0 đến 5 ta được:

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Chú ý: Khi khai triển $(a - b)^n$ ta vẫn làm như trên và các số hạng chứa b với lũy thừa lẻ thì mang dấu trừ đằng trước

3. Khai triển nhị thức $a^n - b^n$ và $a^n + b^n$ (n lẻ)

$$a)a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$b)a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^5)$$

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a + b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \dots + a^2b^{2k-2} - ab^{2k-1} + b^{2k})$$

4. Đẳng thức bậc ba

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

Đặc biệt:

- Nếu $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$
- Nếu $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ thì $a + b + c = 0$ hoặc $a = b = c$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tính giá trị biểu thức $M = a^4 + b^4 + c^4$

Giải

Tìm cách giải. Để tạo ra kết luận, ta cần xuất phát từ $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ và bình phương hai vế. Tuy nhiên khi đó lại xuất hiện $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ và cần tính biểu thức này. Để tính biểu thức đó ta cần tính được $ab + bc + ca$. Suy luận tự nhiên ta cần bình phương $a + b + c = 0$. Bằng cách phân tích, lập luận như trên ta đã tìm ra cách giải.

Trình bày lời giải

$$\text{Từ } a + b + c = 0 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 0$$

$$\text{Mà } a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow ab + bc + ca = -\frac{1}{2} \Rightarrow (ab + bc + ca)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2ab^2c + 2bc^2a + 2ca^2b = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) = \frac{1}{4} \Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{Từ } a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 1^2 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 1$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}$$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức:

$$A = (x + y + z + t)^2 + (x + y - z - t)^2 + (x + z - y - t)^2 + (x + t - y - z)^2$$

Giải

Khai triển ta có:

$$(x + y + z + t)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 2yz + 2yt + 2zt$$

$$(x + y - z - t)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2xy - 2xz - 2xt - 2yz - 2yt + 2zt$$

$$(x + z - y - t)^2 = x^2 + z^2 + y^2 + t^2 - 2xy + 2xz - 2xt - 2yz + 2yt - 2zt$$

$$(x + t - y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2xy - 2xz + 2xt + 2yz - 2yt - 2zt$$

Cộng từng vế lại ta được:

$$(x + y + z + t)^2 + (x + y - z - t)^2 + (x + z - y - t)^2 + (x + t - y - z)^2 = 4(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)$$

Nhận xét. Ngoài ra, ta có thể vận dụng đẳng thức $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ để giải. Thật vậy:

$$(x + y + z + t)^2 + (x + y - z - t)^2 = 2[(x + y)^2 + (z + t)^2]$$

$$(x - y + z - t)^2 + (x - y - z + t)^2 = 2[(x - y)^2 + (z - t)^2]$$

$$\text{Suy ra } A = (x + y + z + t)^2 + (x + y - z - t)^2 + (x + z - y - t)^2 + (x + t - y - z)^2$$

$$= 2[(x + y)^2 + (x - y)^2 + (z + t)^2 + (z - t)^2]$$

$$= 2[2(x^2 + y^2) + 2(z^2 + t^2)] = 4(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)$$

Ví dụ 3: Cho a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng:

$$2(a^5 + b^5 + c^5) = 5abc(a^2 + b^2 + c^2)$$

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy $a^5 = a^3 \cdot a^2$, nên để xuất hiện vế phải chúng ta cần thay thế $3abc = a^3 + b^3 + c^3$ vào vế phải, sau đó khai triển. Khi khai triển xong, chúng ta cần biến đổi phần còn lại không phải là $a^5 + b^5 + c^5$ trở thành một phần của kết luận là xong.

Trình bày lời giải

$$\text{Vì } a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\text{Xét : } 3abc(a^2 + b^2 + c^2) = (a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= a^5 + b^5 + c^5 + a^3(b^2 + c^2) + b^3(c^2 + a^2) + c^3(a^2 + b^2) \quad (1)$$

$$\text{Xét } b + c = -a \Rightarrow b^2 + c^2 + 2bc = a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2 - 2bc$$

$$\text{Tương tự } c^2 + a^2 = b^2 - 2ac; a^2 + b^2 = c^2 - 2ab$$

Thay vào (1) suy ra :

$$3abc(a^2 + b^2 + c^2) = a^5 + b^5 + c^5 + a^3(a^2 - 2bc) + b^3(b^2 - 2ac) + c^3(c^2 - 2ab)$$

$$= 2(a^5 + b^5 + c^5) - 2abc(a^2 + b^2 + c^2)$$

Hay $2(a^5 + b^5 + c^5) = 5abc(a^2 + b^2 + c^2)$

Nhận xét. Nếu đặt $a = x - y, b = y - z, c = z - x$ thì ta có bài toán sau. Chứng minh rằng:

$$\frac{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}{2} \cdot \frac{(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3}{3} \cdot \frac{(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5}{5}$$

Ví dụ 4: Xét các số thực x, y, z thỏa mãn $2(y^2 + yz + z^2) + 3x^2 = 36$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $A = x + y + z$

(Thi tuyển sinh lớp 10, trường THPT chuyên Nam Định, năm học 2014-2015)

Giải

Tìm cách giải. Giả thiết cho về trái là đa thức bậc hai, mà kết luận là tìm cực trị đa thức bậc nhất. Do vậy để vận dụng được giả thiết ta cần xét A^2 , sau đó khéo léo tách đa thức đó để vận dụng triệt để giả thiết.

Trình bày lời giải

Ta có :

$$A^2 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$A^2 = 2(y^2 + z^2 + yz) + 3x^2 - (x^2 - 2xy + y^2) - (x^2 - 2xz + z^2)$$

$$A^2 = 36 - (x - y)^2 - (x - z)^2 \leq 36$$

Suy ra $\max A = 6$ tại $x = y = z = 2$

$\min A = -6$ tại $x = y = z = -2$

Ví dụ 5: Với a, b, c là các số thực thỏa mãn:

$$(3a + 3b + 3c)^3 = 24 + (3a + b - c)^3 + (3b + c - a)^3 + (3c + a - b)^3$$

Chứng minh rằng: $(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a) = 1$

(Tuyển sinh lớp 10, trường THPT chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, năm học 2015-2016)

Giải

Tìm cách giải. Quan sát kĩ đề bài, ta nhận thấy khai triển hai vế rồi phân tích thành nhân tử là quá dài, phức tạp và có thể dẫn đến sai lầm. Do vai trò như nhau của giả thiết, kết luận và giảm bớt sự khai triển ta có thể đổi biến:

$$x = 3a + b - c, y = 3b + c - a, z = 3c + a - b$$

Khi đó giả thiết có dạng: $(x + y + z)^3 = 24 + x^3 + y^3 + z^3$

Vì vế trái của kết luận có dạng là nhân tử nên ta dùng đẳng thức

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x).$$

Từ đó ta có lời giải sau :

Trình bày lời giải

Đặt $x = 3a + b - c, y = 3b + c - a, z = 3c + a - b$

$$\Rightarrow x + y + z = 3a + 3b + 3c$$

Từ giả thiết, ta suy ra : $(x + y + z)^3 = 24 + x^3 + y^3 + z^3$

Theo hằng đẳng thức, ta có : $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x)$.

Suy ra $3(x + y)(y + z)(z + x) = 24$

$$\Rightarrow (2a + 4b)(2b + 4c)(2c + 4a) = 8$$

$$\Rightarrow (a + 2b)(b + 2c)(c + 2a) = 1$$

Điều phải chứng minh

C. Bài tập vận dụng

4.1. Rút gọn $(a + b + c)^2 (a - b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (b + c - a)^2$

Hướng dẫn giải – đáp số

Khai triển ta có :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$$

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac$$

$$(b + c - a)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca.$$

Cộng từng vế ta được :

$$(a + b + c)^2 + (a - b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (b + c - a)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$$

Nhận xét : Ta có thể vận dụng đẳng thức $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$ để giải, thật vậy:

$$(a + c + b)^2 + (a + c - b)^2 = 2[(a + c)^2 + b^2];$$

$$(b + a - c)^2 + (b - a + c)^2 = 2[b^2 + (a - c)^2].$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra : } & (a + b + c)^2 + (a - b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (b + c - a)^2 \\ &= 2[(a + c)^2 + (a - c)^2 + 2b^2] = 2[2(a^2 + c^2) + 2b^2] = 4(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

4.2. Tìm hệ số x^3 của đa thức sau khi khai triển :

$$a) A = (x + 3)^3 + (x + 4)^4 + (x + 5)^5$$

$$b) B = (x - 2)^3 + (x + 3)^4 + (x - 4)^5$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$$\begin{aligned} a) A &= x^3 + 9x^2 + 27x + 27 + x^4 + 16x^3 + 96x^2 + 256x + 256 + x^5 + 25x^4 + 250x^3 + 1250x^2 + 3125x + 3125 \\ &= x^5 + 26x^4 + 267x^3 + 1355x^2 + 3408x + 3408 \end{aligned}$$

Vậy hệ số của x^3 là 267

$$\begin{aligned}b) B &= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x \\&= 81 + x^5 - 20x^4 + 160x^3 - 640x^2 + 1280x - 1024 \\&= x^5 - 19x^4 + 173x^3 - 592x^2 + 1400x - 951\end{aligned}$$

Vậy hệ số của x^3 là 173

4.3. Một tam giác có ba cạnh là a, b, c thỏa mãn điều kiện:

$$(a+b+c)^2 = 3(ab+bc+ca). \text{ Hỏi tam giác đó là tam giác gì ?}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có :

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 3(ab+bc+ca) \\&\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0 \\&\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0\end{aligned}$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $a=b=c$, tức là tam giác đó là tam giác đều.

4.4. Cho $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=2$. Tính $a^4+b^4+c^4$

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ $a+b+c=0$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 0$$

$$\text{Mà } a^2 + b^2 + c^2 = 2 \Rightarrow ab + bc + ca = -1 \Rightarrow (ab+bc+ca)^2 = 1$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2ab^2c + 2bc^2a + 2ca^2b = 1$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c) = 1 \Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 1$$

Từ $a^2+b^2+c^2=2$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2^2 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 4$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2.1 = 4 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 2$$

4.5. Cho $x+y+z=0$ và $xy+yz+zx=0$. Tính giá trị của biểu thức :

$$B = (x-1)^{2015} + y^{2016} + (z+1)^{2017}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{Từ } x+y+z=0 \Rightarrow (x+y+z)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+zx) = 0$$

Mà $xy+yz+zx=0$ nên $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ do đó $x=y=z=0$

$$\text{Vậy } B = (0-1)^{2015} + 1^{2016} + (0+1)^{2017} = 1$$

4.6. Cho $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2$ với $abc \neq 0$. Chứng minh rằng : $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

Hướng dẫn giải – đáp số

Từ giả thiết ta có :

$$\begin{aligned} & a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2 \\ &= a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2acxz + 2bcyz \\ &\Leftrightarrow a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 + a^2z^2 - 2acxz + c^2x^2 + b^2z^2 - 2bcyz + c^2y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = 0 \end{aligned}$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} ay - bx = 0 \\ az - cx = 0 \\ bz - cy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ay = bx \\ az = cx \\ bz = cy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \\ \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \\ \frac{z}{c} = \frac{y}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

4.7. Cho $a + b + c = 2$; $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ và $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

Chứng minh rằng: $xy + yz + zx = 0$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{Từ } a + b + c = 2 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 4$$

$$\text{Mà } a^2 + b^2 + c^2 = 4 \text{ nên } ab + bc + ca = 0$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \Rightarrow x = ak; y = bk; z = ck$$

$$\text{Xét } xy + yz + zx = abk^2 + bck^2 + cak^2 = (ab + bc + ca)k^2 = 0$$

Điều phải chứng minh

4.8. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $F(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{Ta có : } F(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$$

$$= (x^2 - x + 1)^2 + 1 = \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right]^2 + 1 \geq \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16}$$

$$\text{Suy ra } F(x) \geq \frac{25}{16}. \text{ Vậy } \min F(x) = \frac{25}{16} \text{ tại } x = 0,5$$

4.9. Cho a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Tính giá trị của biểu thức $A = a^n + b^n + c^n$ với n là số tự nhiên lẻ

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng hằng đẳng thức : $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$

$$\Leftrightarrow 1 = 1 + 3(a+b)(b+c)(c+a) \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

Vậy, có một số bằng số đối của một số khác

Giả sử $a+b=0 \Leftrightarrow c=1 \Leftrightarrow A=1$

Tương tự, nếu $b+c=0$ hoặc $c+a=0$, ta cũng được $A=1$

4.10. Chứng minh hằng đẳng thức sau : $x^4 + y^4 + (x+y)^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2$

Hướng dẫn giải – đáp số

Biến đổi vế trái:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + (x+y)^4 &= x^4 + y^4 + x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\ &= 2(x^4 + y^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3) = 2(x^4 + y^4 + x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3) \\ &= 2(x^2 + y^2 + xy)^2 \end{aligned}$$

Vế trái bằng vế phải, điều phải chứng minh

4.11. Cho a, b, c thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh rằng :

$$a)a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

$$b)a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab + bc + ca)^2$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) \text{ Từ giả thiết } a+b+c=0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + ac + bc)$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + 8abc(a+b+c)$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \text{ (vì } a+b+c=0) \text{ (1)}$$

$$b) \text{ Mặt khác } 2(ab + ac + bc)^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + 4abc(a+b+c).$$

$$\Rightarrow 2(ab + ac + bc)^2 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \text{ (vì } a+b+c=0) \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab + ac + bc)^2.$$

4.12. Cho x, y, z thỏa mãn $x+y+z=0$. Chứng minh rằng :

$$a) 5(x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2) = 6(x^5 + y^5 + z^5)$$

$$b) x^7 + y^7 + z^7 = 7xyz(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$

$$c) 10(x^7 + y^7 + z^7) = 7(x^2 + y^2 + z^2)(x^5 + y^5 + z^5)$$

Hướng dẫn giải – đáp số

$$a) \text{ Ta có xét vế trái: } 5(x^3 + y^3 + z^3)(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$=5x^5+5y^5+5z^5+5x^3(y^2+z^2)+5y^3(x^2+z^2)+5z^3(x^2+y^2) \quad (1)$$

$$\text{Từ } x+y+z=0 \Rightarrow x+y=-z \Rightarrow x^2+y^2+2xy=z^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=z^2-2xy$$

$$\text{Tương tự: } y^2+z^2=x^2-2yz; z^2+x^2=y^2-2zx$$

Thay vào (1) ta có:

$$\begin{aligned} &5(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2) \\ &=5x^5+5y^5+5z^5+5x^3(x^2-2yz)+5y^3(y^2-2zx)+5z^3(z^2-2xy) \\ &=10x^5+10y^5+10z^5-10xyz(x^2+y^2+z^2) \end{aligned} \quad (2)$$

Mặt khác: $x^3+y^3+z^3=3xyz$ nên $xyz=\frac{x^3+y^3+z^3}{3}$, thay vào (2) ta có :

$$\begin{aligned} &5(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)=10(x^5+y^5+z^5)-\frac{10(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)}{3} \\ &\Leftrightarrow 15(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)=30(x^5+y^5+z^5)-10(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2) \\ &\Leftrightarrow 25(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)=30(x^5+y^5+z^5) \\ &\Leftrightarrow 5(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)=6(x^5+y^5+z^5) \text{ (điều phải chứng minh).} \end{aligned}$$

b) Ta có : $x^4+y^4+z^4=2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$ và $x^3+y^3+z^3=3xyz$

$$\text{Nên } 7xyz(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=\frac{7(x^3+y^3+z^3)(x^4+y^4+z^4)}{3} \cdot \frac{2}{2} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &\text{Xét } (x^3+y^3+z^3)(x^4+y^4+z^4) \\ &=x^7+y^7+z^7+x^3(y^4+z^4)+y^3(x^4+z^4)+z^3(x^4+y^4) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{Từ } x+y+z=0 \Rightarrow x+y=-z \Rightarrow x^2+y^2+2xy=z^2 \Rightarrow x^2+y^2=z^2-2xy$$

$$\Rightarrow x^4+y^4+2x^2y^2=z^4+4x^2y^2-4xy^2z$$

$$\text{Suy ra } x^4+y^4=z^4+2y^2z^2-4x^2yz$$

$$\text{Tương tự ta có: } y^4+z^4=x^4+2y^2z^2-4x^2yz; z^4+x^4=y^4+2z^2x^2-4xy^2z$$

Thay vào (4) ta có:

$$\begin{aligned} &(x^3+y^3+z^3)(x^4+y^4+z^4)=x^7+y^7+z^7+x^3(x^4+2y^2z^2-4x^2yz) \\ &\quad +y^3(y^4+2z^2x^2-4xy^2z)+z^3(z^4+2x^2y^2-4xyz^2) \\ &=2(x^7+y^7+z^7)+2x^2y^2z^2(x+y+z)-4xyz(x^4+y^4+z^4) \\ &=2(x^7+y^7+z^7)-\frac{4(x^3+y^3+z^3)(x^4+y^4+z^4)}{3} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 3(x^3 + y^3 + z^3)(x^4 + y^4 + z^4) = 6(x^7 + y^7 + z^7) - 4(x^3 + y^3 + z^3)(x^4 + y^4 + z^4)$$

$$\Leftrightarrow 7(x^3 + y^3 + z^3)(x^4 + y^4 + z^4) = 6(x^7 + y^7 + z^7)$$

Thay vào (3) ta có : $7xyz(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = x^7 + y^7 + z^7$

Điều phải chứng minh

c) Xét $(x^2 + y^2 + z^2)(x^5 + y^5 + z^5)$

$$= x^7 + y^7 + z^7 + x^5(y^2 + z^2) + y^5(z^2 + x^2) + z^5(x^2 + y^2) \quad (5)$$

Từ $x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = z^2$

Suy ra $x^2 + y^2 = z^2 - 2xy$;

Tương tự $y^2 + z^2 = x^2 - 2yz$; $x^2 + z^2 = y^2 - 2zx$

Thay vào (5) ta có :

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x^5 + y^5 + z^5) = x^7 + y^7 + z^7 + x^5(x^2 - 2xy) + y^5(y^2 - 2xz) + z^5(z^2 - 2xy)$$

$$= 2(x^7 + y^7 + z^7) - 2xyz(x^4 + y^4 + z^4)$$

$$= 2(x^7 + y^7 + z^7) - \frac{2(x^3 + y^3 + z^3)(x^4 + y^4 + z^4)}{3} \quad (6)$$

Theo câu b, ta có: $(x^3 + y^3 + z^3)(x^4 + y^4 + z^4) = \frac{6(x^7 + y^7 + z^7)}{7}$

Thay vào (6) ta có:

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x^5 + y^5 + z^5) = 2(x^7 + y^7 + z^7) - \frac{4(x^7 + y^7 + z^7)}{7}$$

$$\Leftrightarrow 77(x^2 + y^2 + z^2)(x^5 + y^5 + z^5) = 10(x^7 + y^7 + z^7)$$

Điều phải chứng minh.