VMO preparation 3

Từ Nguyễn Thái Sơn

Ngày 25 tháng 10 năm 2010

1

Cho a là một số thực không đổi thỏa mãn $\frac{9}{4} \leq a \leq 9$.Gọi x, y, z lần lượt là các số thực không âm có tổng bằng 1 và M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$xy + yz + zx - axyz$$

Chứng minh rằng $M + m$ có giá trị không phụ thuộc vào a.

Lời giải:

Giá trị nhỏ nhất:
$P = xy + yz + zx - axyz = (x+y+z)(xy+yz+zx) - axyz \geq (9-a)xyz \geq 0$
Mặt khác với $x = y = 0, z = 1$ thì $P = 0$ nên $m = 0$.

Giá trị lớn nhất:
Đặt $q = xy + yz + zx$
Theo bất đẳng thức Schur ta có $(x+y+z)^3 + 9xyz \geq 4(x+y+z)(xy+yz+zx)$
$\Longrightarrow xyz \geq max\left\{0; \frac{4(xy + yz + zx) - 1}{9}\right\}$
Nếu $4(xy + yz + zx) - 1 \leq 0$ ta có $P \leq (xy + yz + zx) \leq \frac{1}{4}$
Nếu $(xy + yz + zx) \geq \frac{1}{4}$
$\Longrightarrow (xy + yz + zx) - axyz \leq q - a\frac{4(q-1)}{9}$

Ta chứng minh $VP \leq \frac{1}{4} \iff q(9-4a) \leq \frac{9-4a}{4}$
Chú ý $9-4a \leq 0$ nên điều này tương đương với $q \geq \frac{1}{4}$(đúng).
Mặt khác với $x=0, y=z=\frac{1}{2}$ thì $P=\frac{1}{4}$ do đó $M=\frac{1}{4}$
Vậy ta có $M+m=\frac{1}{4}$ không phụ thuộc a.

2

Hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên R. Biết rằng với mọi x thuộc R ta đều có:
1) $|f(x)| \leq 2$
2) $f(x).f'(x) \geq \sin x$ Chứng minh rằng không tồn tại giới hạn của $f(x)$ khi x dần đến $+\infty$

Lời giải:

Đặt $g(x)=\frac{(f(x))^2}{2}+\cos x$.Ta có $g(x) \leq 1+2=3\ \forall x \in R$
$g'(x)=f(x).f'(x)-\sin x \geq 0\ \forall x \in R$. Do đó $g(x)$ là hàm tăng và bị chặn trên suy ra tồn tại giới hạn :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x)$$

Giả sử tồn tại giới hạn

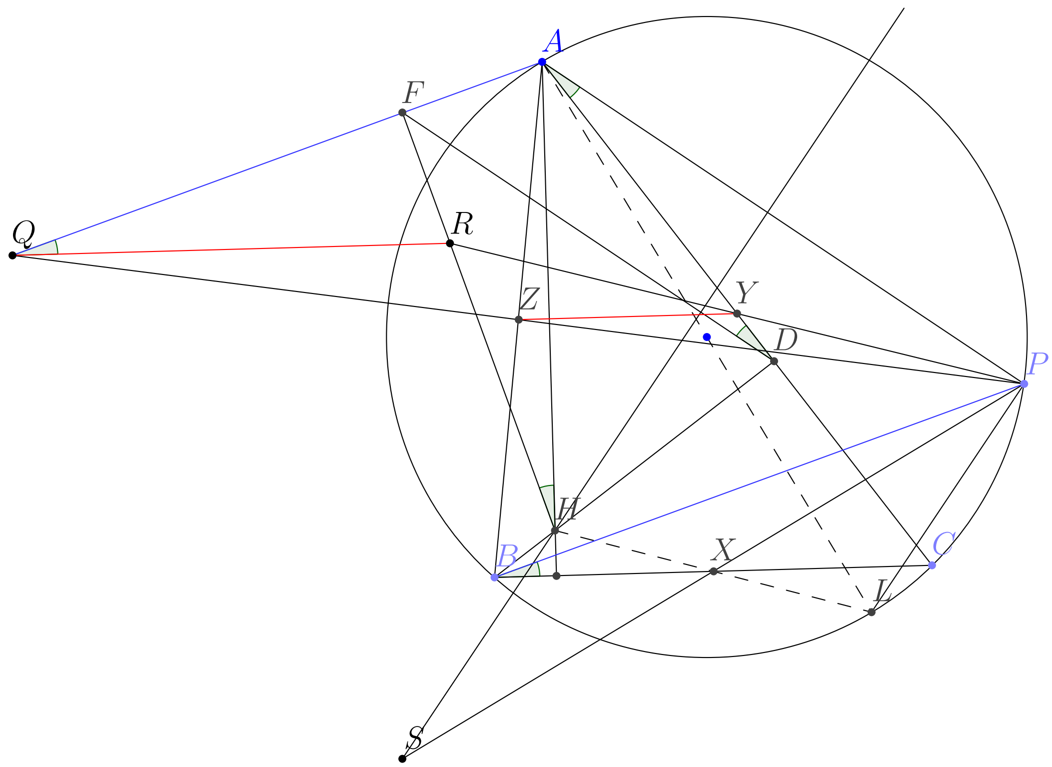
$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

Từ $g(x)=\frac{(f(x))^2}{2}+\cos x \implies$ tồn tại giới hạn hàm $l(x)=\cos x$ khi $x \longrightarrow \infty$.Rõ ràng đây là điều vô lý vì hàm $y=\cos x$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π.
Vậy không tồn tại giới hạn của $f(x)$ khi x dần đến $+\infty$

3

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm, D là chân đường cao xuất phát từ đỉnh B của tam giác ABC;P là một điểm tùy ý trên

(O) và Q, R, S tương ứng là các điểm đối xứng với P qua trung điểm của các cạnh AB, AC, BC. Hai đường thẳng AQ và HR cắt nhau tại giao điểm F. Chứng minh rằng các đường thẳng DF và HS vuông góc với nhau.



Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm BC, CA, AB.Gọi L là điểm đối xứng của H qua X,theo kết quả quen thuộc ta có $L \in (O)$ và $\overline{A, O, L}$.
TA có $HSLP$ là hình bình hành, do đó $PL \parallel HS$, mặt khác do $\overline{A, O, L}$ nên $PA \perp PL \Longrightarrow HS \perp PA$.
Một cách tương tự ta có $HR \perp BP$, $HQ \perp PC$.
Ta có $AQBP$ là hính bình hành nên $AQ \parallel BP \Longrightarrow HR \perp AQ$
Suy ra tứ giác $AFHD$ nội tiếp $\Longrightarrow \measuredangle ADF = \measuredangle AHF$
Ta có $YZ \parallel QR \Longrightarrow QR \perp AH$ nên R là trực tâm tam giác AQH do đó $\measuredangle ADF = \measuredangle AHF = \measuredangle AQR = \measuredangle PBC = \measuredangle PAC \Longrightarrow PA \parallel DF$
Mà $PA \perp HS$ nên $DF \perp HS$ (đpcm).

4

Cho a, b là các số thực thoả mãn điều kiện $a^n + b^n$ là số nguyên với mọi $n = 1, 2, 3, 4$. Chứng minh rằng $a^n + b^n$ là số nguyên với mọi n thuộc N. Mệnh đề có đúng không nếu chỉ có $a^n + b^n$ nguyên với $n = 1, 2, 3$?.

Lời giải:

Bổ đề: Nếu x thỏa mãn $2x \in Z$ và $2x^2 \in Z$ thì $x \in Z$
Thật vậy,giả sử x không nguyên,từ $2x \in Z$ ta suy ra $x = \dfrac{m+1}{2}$ với $m \in Z$
$\Longrightarrow 2x^2 = \dfrac{m^2 + 2m + 1}{2} \notin Z$ vô lý, vậy $x \in Z$.
Quay lại bài toán, từ $a + b \in Z \Longrightarrow (a + b)^2 \in Z \Longrightarrow 2ab \in Z(1)$.
$(a^2 + b^2)^2 \in Z \Longrightarrow 2a^2b^2 \in Z(2)$
Từ (1) và (2) kết hợp bổ đề ta có $ab \in Z$.Mặt khác ta có đẳng thức sau :

$$a^{n+1} + b^{n+1} = (a^n + b^n)(a + b) - ab(a^{n-1} + b^{n-1})$$

Mà $a + b$; ab ; $a^2 + b^2$; $a^3 + b^3 \in Z \Longrightarrow a^n + b^n \in Z\ \forall n \in N^*$.
Nếu chỉ có $a^n + b^n$ nguyên với $n = 1, 2, 3$ thì mệnh đề không còn đúng nữa, ví dụ lấy $(a; b) = \left(\dfrac{6-\sqrt{2}}{2}; \dfrac{6+\sqrt{2}}{2}\right)$ thì $a + b$; $a^2 + b^2$; $a^3 + b^3 \in Z$ nhưng $a^4 + b^4 \notin Z$.

5

Cho 1000 số nguyên dương $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$ sao cho $1 \leq a_k \leq k$ với mọi $k = 1, 2, \ldots, 1000$ và tổng $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{1000}$ là một số chẵn. Chứng minh rằng có thể chia 1000 số này thành 2 nhóm có tổng bằng nhau.
Lời giải:

Ta sẽ chứng minh mệnh đề: "Cho $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ là n số nguyên dương sao cho $1 \leq a_k \leq k$ với mọi $k = 1, 2, ..., n$. Đặt $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ khi đó với mọi l nuyên dương $\leq S_n$ luôn tồn tại tập $X \subset S$ sao cho $S(X) = l$ với $S(A)$ là tổng các phần tử của A.

Thật vậy, với $n = 2$ ta dễ dàng kiểm tra mệnh đề đúng.
Giả sử mệnh đề đúng với n nguyên dương.
Xét mệnh đề với $n+1$, đặt $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$.Xét số l tùy ý $l \leq S_n + a_{n+1} \leq S_n + n + 1$

Nếu $l \leq S_n$ thì theo giả thiết quy nạp ta có đpcm.
Nếu $S_n + 1 \leq l \leq S_n + n + 1$ thì $l - a_{n+1} \leq S_n$ và $l - a_{n+1} \geq S_n - n$
Ta có $S_n \geq n$ xét 2 trường hợp:

1) $S_n - n \geq 1$ khi đó $l - a_{n+1}$ là một số nguyên dương nhỏ hơn S_n và như vậy theo giả thiết quy nạp ta có tồn tại tập A chứa một hoặc một số phần tử a_i với $i \leq n$ để $S(A) = l - a_{n+1}$ lấy $B = A \cup \{a_{n+1}\}$ ta có $S(B) = l$ (đpcm).

2) $S_n = n$ khi đó $a_i = 1\ \forall i = 1, 2...n$,với mọi $n + 1 \leq l \leq n + a_{n+1}$ ta chỉ cần lấy tập C gồm a_{n+1} và $l - a_{n+1} \geq 0$ số 1 là có $S(C) = l$.
Theo nguyên lý quy nạp ta có mệnh đề đúng với mọi n nguyên dương.

Quay lại bài toán,đặt $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{1000} = 2k$ áp dụng mệnh đề trên ta có tồn tại tập E với E gồm một số các phần tử a_i mà $S(E) = k$, suy ra tập F gồm tất cả các số còn lại sau khi bỏ đi E cũng có $S(F) = k$. Vậy E vả F là 2 nhóm có tổng bằng nhau.