

CD8_181-210 _ CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHÂN SỐ_Phuong Minh

Người làm: Phương Minh

Zalo: Phương Minh - số dt zalo: 0989606390

Email: phuongminh0503@gmail.com

CD8: CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHÂN SỐ

Dạng 1. Tìm phân số thỏa mãn điều kiện cho trước:

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Kim Thành, năm học 2017 - 2018)

Cho $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2017}; B = \frac{1}{2016} + \frac{2}{2015} + \frac{3}{2014} + \dots + \frac{2015}{2} + \frac{2016}{1}$.

Tính $\frac{A}{B}$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2016} + \frac{2}{2015} + \frac{3}{2014} + \dots + \frac{2015}{2} + \frac{2016}{1} \\ &= \left(\frac{1}{2016} + 1 \right) + \left(\frac{2}{2015} + 1 \right) + \left(\frac{3}{2014} + 1 \right) + \dots + \left(\frac{2015}{2} + 1 \right) + 1 \\ &= \frac{2017}{2016} + \frac{2017}{2015} + \frac{2017}{2014} + \dots + \frac{2017}{2} + \frac{2017}{1} \\ &= 2017 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2017} \right) \\ \text{Do đó } \frac{A}{B} &= \frac{1}{2017} \end{aligned}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Việt Yên, năm học 2018 - 2019)

Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{37.38}$ và $B = \frac{1}{20.38} + \frac{1}{21.37} + \dots + \frac{1}{38.20}$

Chứng minh rằng $\frac{A}{B}$ là một số nguyên.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{37.38} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{37} - \frac{1}{38} \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{37} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{38} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{38} \right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{38} \right) \\ &= \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{38} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{1}{20.38} + \frac{1}{21.37} + \dots + \frac{1}{38.20} \\
 \Rightarrow 58B &= \frac{1}{20} + \frac{1}{38} + \frac{1}{21} + \frac{1}{37} + \dots + \frac{1}{38} + \frac{1}{20} \\
 &= 2 \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{38} \right) = 2A \\
 B &= \frac{2}{58} A \\
 \Rightarrow \frac{A}{B} &= \frac{58}{2} = 29 \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Dạng 2. Chứng minh phân số đã cho tối giản

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Dạng 3. Tìm điều kiện để phân số là phân số tối giản:

Dạng 4. Tìm số tự nhiên n để phân số rút gọn được

Dạng 5. Một số bài toán có lời văn

Dạng 6. Các bài toán về so sánh

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Hiệp Đức, năm học 2018 - 2019)

Chứng tỏ rằng $S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$ không là số tự nhiên với mọi $n \in \mathbb{N}, n > 2$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2} \\
 &= \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \frac{4^2 - 1}{4^2} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2} \\
 &= 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + 1 - \frac{1}{4^2} + \dots + 1 - \frac{1}{n^2} = (1 + 1 + 1 + \dots + 1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) \\
 \Rightarrow S &< n - 1 \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Nhận xét: } \frac{1}{2^2} &< \frac{1}{1.2}; \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3}; \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3.4}; \dots; \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1).n} \\
 \Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} &< \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} = 1 - \frac{1}{n} < 1 \\
 \Rightarrow - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) &> -1 \Rightarrow (n-1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) > (n-1) - 1 = n-2 \\
 \Rightarrow S &> n-2 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $n-2 < S < n-1$ hay S không là số nguyên

Câu . (HSG 7 trường Thanh Thùy, năm học 2018 - 2019)

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}} < \frac{1}{2}$$

Chứng minh rằng:

Lời giải

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}}$$

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}}$$

$$3B - B = 1 - \frac{1}{3^{2013}} \Rightarrow 2B = 1 - \frac{1}{3^{2013}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2013}} < \frac{1}{2}$$

Vậy $B < \frac{1}{2}$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>