

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 13

Câu 1: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh $BC, B'C'$ và P, Q lần lượt là tâm các mặt $ABB'A'$ và $ACC'A'$. Thể tích khối tứ diện $MNPQ$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

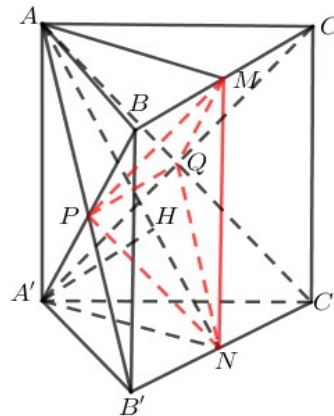
C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

Lời giải

Chọn

C.



Ta có $V_{M.AB'C'} = V_{A'.AB'C'}$.

Dựng $A'H \perp AN \Rightarrow A'H \perp (AB'C') \Rightarrow A'H = d(M, (AB'C')) = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Ta có: $S_{\Delta AB'C'} = \frac{a^2\sqrt{19}}{4} \Rightarrow S_{\Delta NPQ} = \frac{a^2\sqrt{19}}{16}$.

Suy ra: $V_{MNPQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{57}}{19} \cdot \frac{a^2\sqrt{19}}{16} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 2: Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng 4, hình trụ (H) có chiều cao bằng 4 và hai đường tròn đáy nằm trên (S) . Gọi V_1 là thể tích khối trụ (H) và V_2 là thể tích của khối cầu (S) . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{9}{16}$.

B. $\frac{3}{16}$.

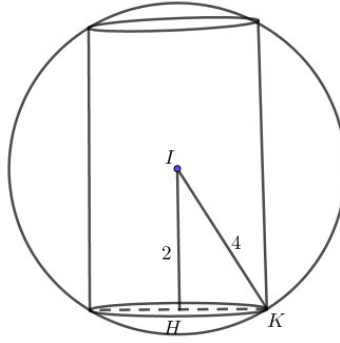
C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn

A.



Ta có $HK^2 = IK^2 - IH^2 = 12$

Thể tích khối trụ $V_1 = \pi r^2 h = \pi \cdot 12 \cdot 4 = 48\pi$.

Thể tích khối trụ $V_1 = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 4^3 = \frac{256\pi}{3}$.

Suy ra $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{16}$.

Câu 3: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y)$?

A. 89.

B. 90.

C. 46.

D. 45.

Lời giải

Chọn

B.

Điều kiện $\begin{cases} x^2 + y > 0 \\ x + y > 0 \end{cases}$. Ta có

$$\log_3(x^2 + y) \geq \log_2(x + y) \Leftrightarrow x^2 + y \geq 3^{\log_2(x + y)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y \geq (x + y)^{\log_2 3} \Leftrightarrow x^2 - x \geq (x + y)^{\log_2 3} - (x + y). \quad (1)$$

(1).

Đặt $x + y = t$ ($t > 0$). Khi đó, (1) trở thành $x^2 - x \geq t^{\log_2 3} - t$ (2).

Với mỗi số nguyên x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn (1).

Suy ra với mỗi số nguyên x có không quá 127 số nguyên dương t ($t \in \mathbb{N}^*$) thỏa mãn (2).

Xét hàm số $f(t) = t^{\log_2 3} - t \Rightarrow f'(t) = (\log_2 3) \cdot t^{(\log_2 3) - 1} - 1 > 0, \forall t \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{N}^*$.

Nếu có quá 127 số nguyên dương t thì $x^2 - x > 128^{\log_2 3} - 128 = 2059$.

Yêu cầu bài toán trở thành

$$x^2 - x \leq 2059 \Leftrightarrow x^2 - x - 2059 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -44 \leq x \leq 45 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x \in \{-44, -43, \dots, 45\}$$

Vậy có 90 số.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Gọi $M(a; b; c) \in (P)$ sao cho $AM = 4$. Tính $a + b + c$.

A. $\frac{2}{3}$.

B. 2.

C. $\frac{8}{3}$.

D. 12.

Lời giải

Chọn A

$$d(A, (P)) = \frac{|2 + 4 + 3 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1}} = 4 = AM$$

Ta có: $\Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của A lên (P) .

$$\Rightarrow M \in (P) \text{ và } \overrightarrow{AM} = (a - 1; b + 2; c - 3) \text{ cùng phương với VTPT của } (P) \vec{n} = (2; -2; 1)$$

$$\begin{cases} 2a - 2b + c + 3 = 0 \\ \frac{a - 1}{2} = \frac{b + 2}{-2} = \frac{c - 3}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{3} \\ b = \frac{2}{3} \\ c = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow a + b + c = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ Tọa độ của M là nghiệm của hệ:

Câu 5: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 16. Tổng các phần tử của S bằng

A. $a - 12$.

B. -2.

C. 16.

D. -16

Lời giải

Chọn D.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$ trên $[0; 3]$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (n) \\ x = -1 & (l) \end{cases}$$

Ta có

$$\text{Khi đó } \begin{cases} f(0) = m \\ f(1) = -2 + m \\ f(3) = 18 + m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max_{x \in [0; 3]} f(x) = 18 + m \\ \min_{x \in [0; 3]} f(x) = -2 + m \end{cases} \quad \text{Ta có } \max_{x \in [0; 3]} f(x) - \min_{x \in [0; 3]} f(x) = 20 < 2 \cdot 16$$

$$\max_{x \in [0; 3]} |x^3 - 3x + m| = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} \max_{x \in [0; 3]} f(x) = 16 \\ \min_{x \in [0; 3]} f(x) = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18 + m = 16 \\ -2 + m = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = -14 \end{cases}$$

Nên

Câu 6: Trên mặt phẳng tọa độ, cho parabol $(P): y = x^2$ và d là đường thẳng đi qua điểm $M(1; 2)$. Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi d và (P) bằng $\frac{4}{3}$. Gọi A, B là giao điểm của d và (P) . Độ dài đoạn thẳng AB thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(4; \frac{9}{2}\right)$

B. $\left(\frac{11}{2}; 6\right)$

C. $\left(5; \frac{11}{2}\right)$

D. $\left(\frac{9}{2}; 5\right)$

Lời giải

Chọn A.

Đường thẳng đi qua điểm $M(1; 2)$ và có hệ số góc k có dạng: $y = k(x - 1) + 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - kx + k - 2 = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 vì $\Delta = k^2 - 4k + 8 > 0, \forall k$.

Ta có:
$$S = \left| \int_{x_1}^{x_2} (x^2 - kx + k - 2) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - k \frac{x^2}{2} + (k - 2)x \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \right| = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left| 2(x_2^3 - x_1^3) - 3k(x_2^2 - x_1^2) + 6(k - 2)(x_2 - x_1) \right| = 8$$

$$\Leftrightarrow |x_2 - x_1| \left| 2(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) - 3k(x_2 + x_1) + 6(k - 2) \right| = 8, \text{ từ đó theo Vi-et ta suy ra}$$

$$\sqrt{k^2 - 4k + 8} \cdot |k^2 + 4k - 8| = 8 \Leftrightarrow k^2 - 4k + 8 = 4 \Rightarrow k = 2.$$

Vậy có thể suy ra: $A(0; 0)$ và $B(2; 4) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$.

Câu 7: Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $(z - 6)(8 - iz)$ là số thực. Biết rằng $|z_1 - z_2| = 6$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1 + 3z_2|$ bằng

A. $-5 + \sqrt{73}$

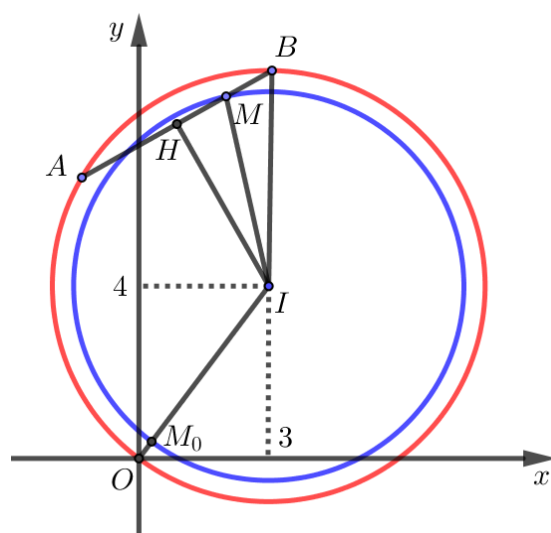
B. $5 + \sqrt{21}$

C. $20 - 2\sqrt{73}$

D. $20 - 4\sqrt{21}$

Lời giải

Chọn C



Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z_1, z_2 . Suy ra $AB = |z_1 - z_2| = 4$.

Ta có:

$$(z - 6)(8 - i\bar{z}) = (x + yi - 6)(8 - i(x - yi)) = (x + yi - 6)(8 - ix - y) \\ = 8x - x^2i - xy + 8yi + xy - y^2i - 48 + 6xi + 6y$$

Do $(z - 6)(8 - i\bar{z})$ là số thực nên ta được $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường tròn tâm $I(3; 4)$ bán kính $r = 5$.

Xét điểm M thuộc đoạn AB thỏa $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OM}$.

Gọi H là trung điểm AB .

Ta có $HA = HB = \frac{AB}{2} = 3$ và $MA = \frac{3}{4}AB = \frac{9}{2} \Rightarrow HM = MA - HA = \frac{3}{2}$.

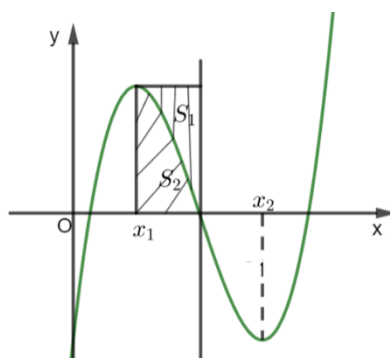
Từ đó $HI^2 = R^2 - HB^2 = 16$, $IM = \sqrt{HI^2 + HM^2} = \frac{\sqrt{73}}{2}$, suy ra điểm M thuộc đường tròn (C') tâm $I(3; 4)$, bán kính $r = \frac{\sqrt{73}}{2}$.

* Ta có $|z_1 + 3z_2| = |\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}| = |4\overrightarrow{OM}| = 4OM$, do đó $|z_1 + 3z_2|$ nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất.

Ta có $OM_{\min} = OM_0 = |OI - r| = 5 - \frac{\sqrt{73}}{2}$.

Vậy $|z_1 + 3z_2|_{\min} = 4OM_0 = 20 - 2\sqrt{73}$.

Câu 8: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình bên. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng:



A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{5}{8}$.

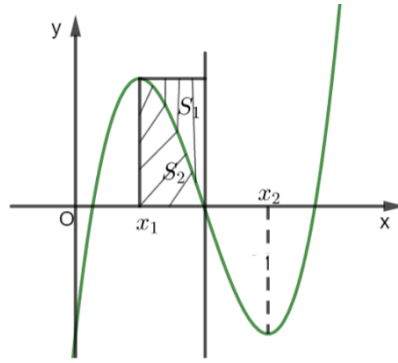
C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Tính tiền điểm uốn về gốc tọa độ, ta được hình vẽ bên dưới.



Khi đó, do $f(x)$ là hàm bậc ba, nhận gốc tọa độ là tâm đối xứng nên $x_1 = -1; x_2 = 1$.

Chọn $f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x$.

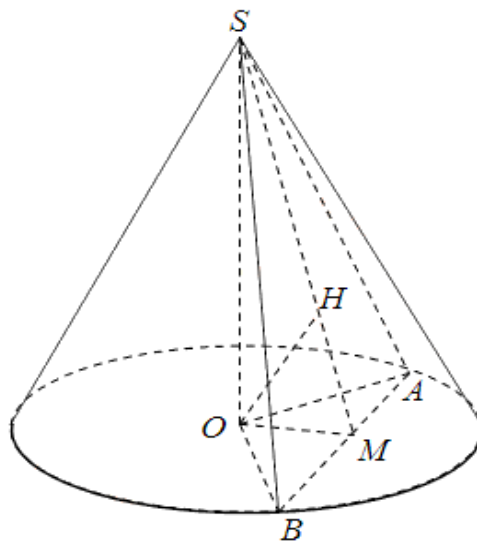
Nên $S_2 = \int_{-1}^0 (x^3 - 3x) dx = \frac{5}{4}; S_1 + S_2 = 2 \Rightarrow S_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{5}$.

Câu 9: Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20(\text{cm})$, bán kính đáy $r = 25(\text{cm})$. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón có khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là $12(\text{cm})$. Tính diện tích của thiết diện đó.

A. $S = 400(\text{cm}^2)$ B. $S = 500(\text{cm}^2)$ C. $S = 406(\text{cm}^2)$ D. $S = 300(\text{cm}^2)$

Lời giải.

Chọn B



Gọi thiết diện đi qua đỉnh của hình nón là tam giác SAB và O là tâm của đường tròn đáy; M là trung điểm AB . Hạ OH là đường cao trong tam giác SOM . Khi đó khoảng cách từ tâm đáy đến mặt phẳng (SAB) chính là đoạn OH .

Áp dụng hệ thức lượng ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} \Leftrightarrow \frac{1}{12^2} = \frac{1}{20^2} + \frac{1}{OM^2} \Leftrightarrow OM = 15(\text{cm})$$

Có:

$$SM^2 = SO^2 + OM^2 \Rightarrow SM = 25(cm)$$

$$AB = 2.AM = 2.\sqrt{OA^2 - OM^2} = 2.\sqrt{25^2 - 15^2} = 40(cm)$$

Vậy diện tích của thiết diện SAB là: $\frac{1}{2}.SM.AB = \frac{1}{2}.25.40 = 500(cm^2)$

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-8)(x^2-9)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 6x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 8. B. 5. C. 6. D. 7.

Lời giải

Chọn D.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = \pm 3 \end{cases} \text{ và } g'(x) = \frac{(3x^2 + 6)(x^3 + 6x)}{|x^3 + 6x|} f'(|x^3 + 6x| + m)$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ |x^3 + 6x| = 8 - m \quad (1) \\ |x^3 + 6x| = 3 - m \quad (2) \\ |x^3 + 6x| = -3 - m \quad (\text{loại}), \text{ vì } m > 0 \end{cases}$$

Cho

Ta có: $g(-x) = g(x) \Rightarrow g(x)$ là hàm số chẵn

$g(x) = f(|x^3 + 6x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow g(x)$ có 1 cực trị dương

$\Rightarrow (1)$ hoặc (2) có ít nhất 1 nghiệm dương.

Xét hàm số $u = |x^3 + 6x|$ có BBT như hình dưới

x	$-\infty$	0	$+\infty$
u'	$-$	0	$+$
u	$+\infty$	0	$+\infty$

Từ BBT, để phương trình (1) hoặc (2) có ít nhất 1 nghiệm dương thì $8 - m > 0 \Leftrightarrow m < 8$.

Vì $m > 0$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{1; 2; 3; \dots; 7\}$.

! HẾT