SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH ĐỊNH

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 9 THCS
KHOÁ NGÀY 18 – 3 – 2017

Đề chính thức

Môn thi: **TOÁN**
Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian phát đề)
Ngày thi: **18/3/2017**

Bài 1 *(6,0 điểm).*

1. Cho biểu thức: P = $\dfrac{2m+\sqrt{16m}+6}{m+2\sqrt{m}-3}+\dfrac{\sqrt{m}-2}{\sqrt{m}-1}+\dfrac{3}{\sqrt{m}+3}-2$

a) Rút gọn P.
b) Tìm giá trị tự nhiên của m để P là số tự nhiên.

2. Cho biểu thức: P = (a + b)(b + c)(c + a) – abc với a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu a + b + c chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4.

Bài 2 *(5,0 điểm).*

a) Chứng minh rằng: với mọi số thực x, y dương, ta luôn có: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{4}{x+y}$

b) Cho phương trình: $2x^2+3mx-\sqrt{2}=0$ (m là tham số). Có hai nghiệm x_1 và x_2.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: M = $(x_1-x_2)^2+\left(\dfrac{1+x_1^2}{x_1}-\dfrac{1+x_2^2}{x_2}\right)^2$

Bài 3 *(2,0 điểm)*

Cho x, y, z là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2+yz}+\frac{1}{y^2+xz}+\frac{1}{z^2+xy}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$$

Bài 4 *(7,0 điểm).*

1. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. M là một điểm di động trên cung nhỏ BC của đường tròn đó.

a) Chứng minh MB + MC = MA

b) Gọi H, I, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB, BC, CA. Gọi S, S’ lần lượt là diện tích của tam giác ABC, MBC. Chứng minh rằng: Khi M di động ta luôn có đẳng thức:

$$MH + MI + MK = \frac{2\sqrt{3}(S+2S')}{3R}$$

2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. AD, BE, CF là các đường cao. Lấy M trên đoạn FD, lấy N trên tia DE sao cho $\widehat{MAN}=\widehat{BAC}$. Chứng minh MA là tia phân giác của góc $\widehat{NMF}$

ĐÁP ÁN

Bài 1 *(6,0 điểm).*

1a) Rút gọn được P = $\frac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-1}$ (với m $\geq$ 0, m $\neq$ 1)

1b)

P = $\frac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{m}-1}$

Ta có: P $\in$ N $\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{m}-1} \in N \Leftrightarrow \sqrt{m}-1$ là ước dương của 2 $\Rightarrow$ m $\in \{4; 9\}$ (TMĐK)

Vậy m = 4; m = 9 là giá trị cần tìm.

2) a + b + c $\vdots$ 4 (a, b, c $\in$ Z)

Đặt a + b + c = 4k (k $\in$ Z) $\Rightarrow$ a + b = 4k – c ; b + c = 4k – a ; a + c = 4k – b

Ta có: P = (a + b)(b + c)(c + a) – abc = (4k – c)(4k – a)(4k – b) – abc

$= \left(16k^2 - 4ak - ack + ac\right)\left(4k - b\right) - abc$

$= 64k^3 - 16bk^2 - 16ak^2 + 4abc - 16ck^2 + 4bck + 4ack - abc - abc$

$= 4\left(16k^3 - 4bk^2 - 4ak^2 + abk - 4ck^2 + bck + ack\right) - 2abc$ (*)

Giả sử a, b, c đều chia 2 dư 1 $\Rightarrow$ a+ b + c chia 2 dư 1 (1)

Mà: a + b + c $\vdots$ 4 $\Rightarrow$ a + b + c $\vdots$ 2 (theo giả thiết) (2)

Do đó (1) và (2) mâu thuẫn $\Rightarrow$ Điều giả sử là sai

$\Rightarrow$ Trong ba số a, b, c ít nhất có một số chia hết cho 2

$\Rightarrow$ 2abc $\vdots$ 4 (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow$ P $\vdots$ 4

Bài 2 *(5,0 điểm).*

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \left(a+b\right)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \left(a-b\right)^2 \geq 0$ (đúng)

b) PT có a, c trái dấu nên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2

Ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{3m}{2}$ và $x_1.x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

M = $\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(\frac{1+x_1^2}{x_1} - \frac{1+x_2^2}{x_2}\right)^2$ = ...=

$\left(x_1 - x_2\right)^2\left[1 + \frac{(1 - x_1x_2)^2}{(x_1x_2)^2}\right] = \left[\left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2\right]\left[1 + \frac{(1 - x_1x_2)^2}{(x_1x_2)^2}\right]$

$= \left(9 + \frac{9\sqrt{2}}{2}\right)m^2 + 8\sqrt{2} + 8 \geq 8\sqrt{2} + 8$

Dấu "=" xảy ra khi m = 0

Vậy GTNN của M là $8\sqrt{2} + 8$ khi m = 0

Bài 3 *(2,0 điểm)*

Áp dụng BĐT Cô si cho các số dương x^2 và yz, ta có:

$x^2 + yz \geq 2\sqrt{x^2yz} = 2x\sqrt{yz} \Rightarrow \frac{1}{x^2 + yz} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{x\sqrt{yz}}$

Tương tự, ta có: $\dfrac{1}{y^2+xz} \le \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{y\sqrt{xz}}$ và $\dfrac{1}{z^2+xy} \le \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{z\sqrt{xy}}$

Suy ra: $\dfrac{1}{x^2+yz} + \dfrac{1}{y^2+xz} + \dfrac{1}{z^2+xy} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x\sqrt{yz}} + \dfrac{1}{y\sqrt{xz}} + \dfrac{1}{z\sqrt{xy}}\right)$ (1)

Ta có: $\dfrac{1}{x\sqrt{yz}} + \dfrac{1}{y\sqrt{xz}} + \dfrac{1}{z\sqrt{xy}} = \dfrac{\sqrt{yz}+\sqrt{xz}+\sqrt{xy}}{xyz}$ (2)

Ta có: $\sqrt{yz}+\sqrt{xz}+\sqrt{xy} \le$ x + y + z (3)

Thật vậy: (*) $\Leftrightarrow 2\sqrt{yz}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{xy} \le 2x+2y+2z$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 + \left(\sqrt{z}-\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)^2 \ge 0$ (BĐT đúng)

Dấu "=" xảy ra khi x = y = z

Từ (2) và (3) suy ra: $\dfrac{1}{x\sqrt{yz}} + \dfrac{1}{y\sqrt{xz}} + \dfrac{1}{z\sqrt{xy}} \le \dfrac{x+y+z}{xyz} = \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{xz} + \dfrac{1}{xy}$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra: $\dfrac{1}{x^2+yz} + \dfrac{1}{y^2+xz} + \dfrac{1}{z^2+xy} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{zx}\right)$

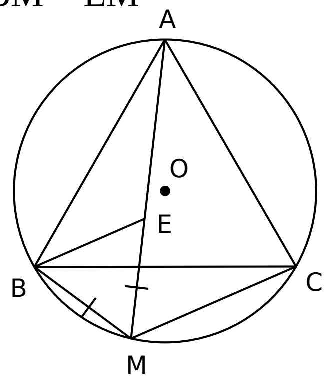
Bài 4 *(7,0 điểm).*

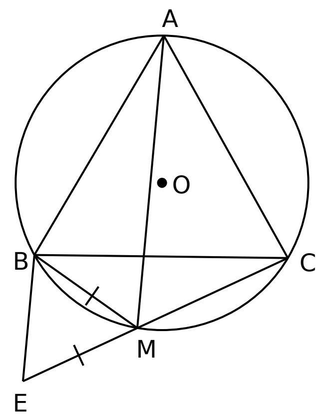
1.a) Cách 1: Trên tia đối của tia MC lấy điểm E sao cho ME = MB

Ta có: ΔBEM là tam giác đều $\Rightarrow$ BE = BM = EM

ΔBMA = ΔBEC $\Rightarrow$ MA = EC

Do đó: MB + MC = MA





Cách 2:

Trên AM lấy điểm E sao cho ME = MB

Ta có: ΔBEM là tam giác đều

$\Rightarrow$ BE = BM = EM

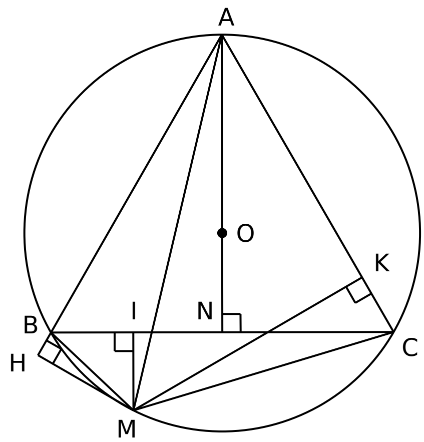
ΔMBC = ΔEBA (c.g.c) $\Rightarrow$ MC= AE

Do đó: MB + MC = MA

1.b) Kẻ AN vuông góc với BC tại N

Vì ΔABC là tam giác đều nên O là trọng tâm của tam giác

$\Rightarrow$ A, O, N thẳng hàng $\Rightarrow$ AN = $\dfrac{3}{2}R$



Ta có: AN = AB.sin $\widehat{ABN}$ $\Rightarrow AB = \dfrac{AN}{\sin\widehat{ABN}} = \dfrac{3}{2}R : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$

Ta có: $\dfrac{1}{2}MH.AB = S_{ABM} \Leftrightarrow MH = \dfrac{2S_{ABM}}{AB} = \dfrac{2S_{ABM}}{R\sqrt{3}}$

$\dfrac{1}{2}MK.AC = S_{ACM} \Leftrightarrow MK = \dfrac{2S_{ACM}}{AC} = \dfrac{2S_{ACM}}{R\sqrt{3}}$

$\dfrac{1}{2}MI.BC = S_{BCM} \Leftrightarrow MI = \dfrac{2S_{BCM}}{BC} = \dfrac{2S_{BCM}}{R\sqrt{3}} = \dfrac{2S'}{R\sqrt{3}}$

Do đó: MH + MK + MI = $\dfrac{2S'}{R\sqrt{3}} + \dfrac{2}{R\sqrt{3}}\left(S_{ABM}+S_{ACM}\right) = \dfrac{2S'}{R\sqrt{3}} + \dfrac{2}{R\sqrt{3}}.S_{ABMC}$

$= \dfrac{2S'}{R\sqrt{3}} + \dfrac{2}{R\sqrt{3}}.(S+S') = \dfrac{2\sqrt{3}(S+2S')}{3R}$

2. Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt DE tại K

Tứ giác AEDB nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{BAC}$

Mà: $\widehat{MKD} = \widehat{CDE}$ (vì MK // BC).

Do đó: $\widehat{MKD} = \widehat{MAN}$ $\Rightarrow$ Tứ giác AMKN nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{AKN}$

Ta có: $\widehat{D}_3 = \widehat{D}_4$ (= $\widehat{BAC}$)$\Rightarrow$ $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$

ΔDMK có DA là phân giác vừa là đường cao nên cân tại D

$\Rightarrow$ DM = DK

ΔAMD = ΔAKD (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{AKD}$

Nên: $\widehat{AMF} = \widehat{AKN}$. Ta có: $\widehat{AMF} = \widehat{AMN} \left(= \widehat{AKN}\right)$

Vậy: MA là phân giác của góc $\widehat{NMF}$