HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

CÁC ĐỀ DỰ TUYỂN OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN TOÀN QUỐC LẦN THỨ 18 - NĂM 2010

Huế, Ngày 07-11/04/2010

Mục lục

Lời nói đầu

Các kỳ thi Olympic Toán học sinh viên giữa các trường đại học và cao đẳng trong cả nước đã trở thành sinh hoạt truyền thống trong sinh viên. Đến nay đã qua mười tám kỳ thi Olympic được tổ chức hằng năm vào cuối tháng 4 đầu tháng 5 nhằm kỷ niệm chiến thắng 30 tháng 4 và Sinh nhật Bác Hồ 19 tháng 5.

Kỳ thi Olympic Toán sinh viên lần thứ nhất được tổ chức vào năm 1993 tại Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội (nay là Trường Đại học khoa học tự nhiên, Đại học Quốc Gia Hà Nội), với sự tham gia của ba trường đại học: Đại học Bách Khoa Hà Nội, Đại học Sư phạm Hà Nội và Đại học Tổng Hợp Hà Nội. Tiếp theo, các kỳ thi Olympic lần lượt được tổ chức tại Đại học Bách Khoa Hà Nội (1994), Đại học Sư phạm Hà Nội (1995), Đại học Xây Dựng Hà Nội (1996), Học Viện Kỹ Thuật Quân Sự (1997), Đại học Mỏ Địa Chất (1998), Đại học Giao thông Hà Nội (1999), Đại học Thuỷ Lợi (2000), Đại học Ngoại Thương Hà Nội (2001), Đại học Kinh Tế Quốc Dân Hà Nội (2002), Đại học Bách Khoa TpHCM (2003), Đại học Quy Nhơn (2004), Đại học Sư phạm Huế (2005), Đại học Sư Phạm Đà Nẵng (2006), Đại học Vinh (2007), Học viện Hải Quân Nha trang (2008), Đại học Quảng Bình (2009) và Đại học Khoa Học (Đại Học Huế) (2010).

Các kỳ thi Olympic Toán học sinh viên giữa các trường đại học và cao đẳng trong cả nước được sự bảo trợ của Hội Toán học Việt nam (về chuyên môn) kết hợp với Bộ Gíao Dục và Đào Tạo, Hội Sinh viên Việt nam, Liên hiệp các hội khoa học kỹ thuật Việt Nam và Trường (cơ sở) đăng cai.

Việc tổ chức các kỳ thi Olympic Toán học sinh viên giữa các Trường đại học và cao đẳng trong cả nước là rất cần thiết và có ý nghĩa to lớn nhằm khuyến khích, động viên sự hăng say học tập và ứng dụng toán học của sinh viên các Trường đại học và cao đẳng, nhằm phát triển những năng khiếu toán học trẻ, góp phần đào tạo đội ngũ kế cận nghiên cứu và giảng dạy toán học. Thông qua các kỳ thi Olympic Toán học sinh viên, các trường đại học và cao đẳng trong cả nước đã xem xét lại chương trình đào tạo, tổ chức các hội thảo khoa học về giảng dạy toán học và ứng dụng toán học.

Năm 2004 gắn với một sự kiện cực kỳ quan trọng của Olympic Toán học sinh viên giữa các trường đại học và cao đẳng trong cả nước. Lần đầu tiên, thí sinh của cả nước tập trung về Đại học Quy Nhơn tham dự kỳ thi. Đây là một cơ hội lớn để các cán bộ giảng dạy, các sinh viên trong cả nước gặp gỡ, trao đổi và giao lưu. Năm 2005, Olympic Toán học sinh viên giữa các Trường đại học và cao đẳng được tổ chức ở Đại học Sư phạm Huế. Và năm nay, năm 2006, Olympic Toán học sinh viên giữa các trường đại học và cao đẳng sẽ diễn ra ở Đại học Đà nẵng.

Nhằm đáp ứng sự kiện trên, chúng tôi biên soạn cuốn sách nhỏ này (lưu hành nội bộ) nhằm cung cấp các tư liệu của 2 kỳ thi Olympic Toán học sinh viên giữa các Trường đại học và cao đẳng trong cả nước hai năm gần đây. Ngoài ra chúng tôi cũng đưa vào một số đề thi Olympic khác do các trường đề xuất liên quan đến các kiến thức cơ bản nhất của giáo trình toán cao cấp cho các trường khối kỹ thuật và kinh tế.

Đây là những phần quan trọng nhất của đại số và giải tích toán học. Các sinh viên thường phải đối mặt với nhiều dạng toán loại khó liên quan đến các nội dung này.

Cuốn sách được biên soạn trong thời gian rất gấp gáp nên chắc chắn sẽ còn những sai sót và khiếm khuyết. Nhiều tư liệu của các trường gửi về Ban ra đề chưa kịp sử lý và chuyển đổi thành file LATEX, chúng tôi sẽ hoàn thiện vào thời gian sau kỳ Olympic lần này.

Mong các đồng nghiệp khi sử dụng nếu thấy có những sai sót gì thì chỉ dẫn và góp ý ngay để lần sau xuất hiện được hoàn chỉnh hơn.

Xin chân thành cảm ơn

Huế, 09 tháng 04 năm 2010

Nguyễn Văn Mậu

Chương 1

Tổng hợp đề dự tuyển năm 2009

1.1 Tổng hợp đề dự tuyển môn Giải tích 2009

Câu 1. (Đại học Đồng Tháp) Giả sử $\{u_n\}$ là dãy số bị chặn trên và thỏa mãn

$$u_{n+2} \geq \frac{1}{2009}u_{n+1} + \frac{2008}{2009}u_n, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng $\{u_n\}$ là dãy số hội tụ.

Đáp án. Đặt $v_n = \min\{u_n, u_{n+1}\}$, khi đó $\{v_n\}$ là dãy bị chặn trên.

Mặt khác

$$v_n = \min\{u_n, u_{n+1}\} = \min\Big\{u_n, u_{n+1}, \frac{1}{2009}u_n + \frac{2008}{2009}u_{n+1}\Big\}$$

$$\leqslant \min\Big\{u_{n+1}, \frac{1}{2009}u_n + \frac{2008}{2009}u_{n+1}\Big\} \leqslant \min\{u_{n+1}, u_{n+2}\} = v_{n+1}.$$

Suy ra $\{v_n\}$ là dãy tăng.

Vậy tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$. Ta sẽ chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Thật vậy, do $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ nên với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại $n_0 > 0$ sao cho

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow l - \frac{\epsilon}{2017} < v_n < l + \frac{\epsilon}{2017}.$$

Vậy với mọi $n > n_0 + 1$ ta có $u_{n-1} > l - \dfrac{\epsilon}{2017}$ và $u_n > l - \dfrac{\epsilon}{2017}$.

- Nếu $u_n < l + \dfrac{\epsilon}{2017}$ thì

$$l - \frac{\epsilon}{2017} < u_n < l + \frac{\epsilon}{2017} \tag{1}$$

- Nếu $u_n \geqslant l + \dfrac{\epsilon}{2017}$ thì từ $v_n < l + \dfrac{\epsilon}{2017}$ ta có $u_{m+1} < l + \dfrac{\epsilon}{2017}$. Từ đó ta có

$$u_m \leqslant 2009u_{m+1} - 2008u_{m-1} < 2009\Big(l + \frac{\epsilon}{2017}\Big) - 2008\Big(l - \frac{\epsilon}{2017}\Big) = l + \epsilon.$$

Vậy

$$l - \epsilon < u_n < l + e \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Câu 2. (Đại học Đồng tháp) Giả sử f là hàm số liên tục và bị chặn trong $(0, +\infty)$. Chứng minh rằng với mọi $T \in \mathbb{R}$, tồn tại dãy $\{x_n\}$ sao cho

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \infty \quad \text{và} \quad \lim_{n\to+\infty}[f(x_n + T) - f(x_n)] = 0.$$

Đáp án. (a) Trường hợp $T > 0$, đặt $g(x) = f(x + T) - f(x)$.

- Nếu tồn tại $a > 0$ sao cho $g(x)$ không đổi dấu trên $(a, +\infty)$. Giả sử rằng $g(x) > 0$, khi đó $f(x)$ tăng trên $[a, +\infty)$. Vì f là tăng và bị chặn trên nên $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x+nT) = l$. Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[f\big(x + (n+1)T\big) - f\big(x + nT\big)\right] = l - l = 0$. Đặt $x_n = x + nT$ ta có $x_n \to +\infty$ thỏa mãn yêu cầu.

- Nếu với mọi $a > 0$ tồn tại $b > a$ sao cho $f(b + T) - f(b) = 0$ thì tồn tại dãy $\{x_n\}$ sao cho $x_n \to +\infty$ và thỏa mãn yêu cầu.

(b) Trường hợp $T < 0$, đặt $t = x + T$ ta có $x = t + (-T)$. Theo (a) tồn tại dãy $\{t_n\}$ sao cho $t_n \to +\infty$ và $f\big(t_n + (-T)\big) - f(t_n) \to 0$. Vậy $x_n = t_n - T$ thỏa mãn yêu cầu.

Câu 3. (Đại học Đồng tháp) Giả sử f là hàm khả vi trên $(0, +\infty)$. Chứng minh rằng nếu

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) + 3\sqrt[3]{x^2} f'(x)] = 0.$$

Đáp án. Áp dụng định lí Cauchy cho hai hàm $e^{\sqrt[3]{x}} f(x)$ và $e^{\sqrt[3]{x}}$ ta có

$$\frac{e^{\sqrt[3]{x}} f(x) - e^{\sqrt[3]{a}} f(a)}{e^{\sqrt[3]{x}} - e^{\sqrt[3]{a}}} = f(\zeta) + 3\sqrt[3]{\zeta^2} f'(\zeta), \text{ với } \zeta \in (a, x), a > 0.$$

Do đó

$$|f(x) - e^{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}} f(a)| < |f(\zeta) + 3\sqrt[3]{\zeta^2} f'(\zeta)||1 - e^{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}}|$$

hay

$$|f(x)| < |e^{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}} f(a)| + |f(\zeta) + 3\sqrt[3]{\zeta^2} f'(\zeta)||1 - e^{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}}|.$$

Cho $\zeta \to +\infty$ ta có điều phải chứng minh.

Câu 4. (Đại học Đồng tháp) Giả sử f là hàm liên tục trên $[0, 2]$ và khả vi trên $(0, 2)$. Chứng minh rằng tồn tại $x_1, x_2, x_3 \in (0, 2)$ sao cho

$$f(x_1) = \frac{f'(x_2)}{x_2} = \frac{4}{3} \frac{f'(x_3)}{x_3^2}$$

Đáp án. Áp dụng định lí Cauchy ta có tồn tại $x_1, x_2, x_3 \in (0,2)$ sao cho

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = f'(x_1); \ \frac{f(2)-f(0)}{2^2-0^0} = \frac{f'(x_2)}{2x_2}; \ \frac{f(2)-f(0)}{2^3-0^3} = \frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

Câu 5. (Đại học Đồng tháp) Tìm tất cả các hàm $f(x)$ thỏa mãn

$$f(x+y) = f(x)e^{f(y)-2009}, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đáp án. Cho $y = 0$ ta có $f(x) = f(x)e^{f(0)-1}$. Suy ra $f(x) = 0$ hoặc $f(0) = 1$.

Trường hợp $f(x) = 0$: thử lại thấy thỏa mãn.

Trường hợp $f(0) = 1$: thay $x = 0$ ta có

$$f(y) = e^{f(y)-1} \tag{*}$$

Khảo sát hàm số $g(t) = e^{t-1} - t$ ta có $g(t) \geqslant 0$ và $g(1) = 0$.

Vậy từ (*) ta có $f(y) = 1$ với mọi y, thử lại thấy thỏa mãn.

Kết luận: $f(x) = 0$ hoặc $f(x) = 1$ với mọi x.

Câu 6. (Đại học Đồng tháp) Tính giới hạn

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\left(\frac{i}{n}\right)^{2009} + \left(\frac{i+1}{n}\right)^{2009}}.$$

Đáp án. Xét $f(x) = x^{2009}$ là hàm liên tục trên $[0,1]$, do đó liên tục đều trên $[0,1]$. Suy ra với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho $x, x' \in [0,1], |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon^2$.

Đặt $u_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\sqrt{\left(\frac{i}{n}\right)^{2009} + \left(\frac{i+1}{n}\right)^{2009}}$ và $v_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\sqrt{\left(\frac{i}{n}\right)^{2009} + \left(\frac{i}{n}\right)^{2009}}$. Ta có $\lim v_n = \int\limits_0^1 \sqrt{2}x^{\frac{2009}{2}}dx = 2\sqrt{2}\frac{x^{\frac{2011}{2}}}{2011}\Bigg|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{2011}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
|u_n - v_n| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\left(\frac{i}{n}\right)^{2009} + \left(\frac{i+1}{n}\right)^{2009}} - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\left(\frac{i}{n}\right)^{2009} + \left(\frac{i}{n}\right)^{2009}}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\left(\frac{i}{n}\right)^{2009} + \left(\frac{i+1}{n}\right)^{2009} - \left(\frac{i}{n}\right)^{2009} - \left(\frac{i}{n}\right)^{2009}} \\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\epsilon = \epsilon \text{ với } n \text{ đủ lớn.}
\end{aligned}$$

Vậy $\lim u_n = \lim v_n = \dfrac{2\sqrt{2}}{2011}$.

Câu I. (Đại học Nha trang) Cho dãy số $\{x_n\}$ thoả mãn

$$x_n = \frac{1}{2010}\left(2009x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{2009}}\right); \quad n \geq 2, a > 0, x_1 > 0.$$

Chứng minh dãy số $\{x_n\}$ hội tụ và tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Đáp án.

Ta có

$$x_n = \frac{1}{2010}\left(2009x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{2009}}\right) = \frac{1}{2010}\left(x_{n-1} + x_{n-1} + \cdots + x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{2009}}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2010 số dương, ta được

$$x_n \geqslant \sqrt[2010]{a} \tag{1}$$

Mặt khác xét $\dfrac{x_n}{x_{n-1}} = \dfrac{1}{2010}\left(2009 + \dfrac{a}{x_{n-1}^{2010}}\right) \leqslant \dfrac{1}{2010}\left(2009 + \dfrac{a}{a}\right) = 1$

$$\Rightarrow x_n \leqslant x_{n-1} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\{x_n\}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Weierstrass.

Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \Rightarrow l = \dfrac{1}{2010}\left(2009l + \dfrac{a}{l^{2009}}\right) \Rightarrow l = \sqrt[2010]{a}$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[2010]{a}$.

Câu II. (Đại học Nha trang) Cho $f(x), g(x)$ dương và liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(c)}{\int_a^c f(x)dx} - \frac{g(c)}{\int_c^b g(x)dx} = 1.$$

Đáp án. Đặt $F(x) = e^{-x}\int\limits_a^x f(t)dt \int\limits_x^b g(t)dt$.

Ta có $F(x)$ liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) và $F(a) = F(b) = 0$. Theo định lí Rolle, tồn tại $c \in (a, b) : F'(c) = 0$.

Mặt khác $F'(x) = -e^{-x}\int\limits_a^x f(t)dt\int\limits_x^b g(t)dt + e^{-x}f(x)\int\limits_x^b g(t)dt - e^{-x}g(x)\int\limits_a^x f(t)dt$.

Từ $F'(c) = 0$ suy ra $f(c)\int\limits_c^b g(t)dt - g(c)\int\limits_a^c f(t)dt = \int\limits_a^c f(t)dt\int\limits_c^b g(t)dt$.

Vậy

$$\frac{f(c)}{\int_a^c f(x)dx} - \frac{g(c)}{\int_c^b g(x)dx} = 1.$$

Câu III. (Đại học Nha trang) Cho $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0,1]$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} n\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) - \int_0^1 f(x)dx\Big] = \frac{f(1)-f(0)}{2}$$

Sử dụng kết quả trên, tính giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} n\Big[\frac{1^{2009}+2^{2009}+\cdots+n^{2009}}{n^{2010}} - \frac{1}{2010}\Big].$$

Đáp án. Ta có

$$n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\Big(\frac{i}{n}\Big) - \int_0^1 f(x)dx\right] = n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\Big(\frac{i}{n}\Big) - \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx\right]$$

$$n\left[\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f\Big(\frac{i}{n}\Big)dx - \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x)dx\right] = n\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\Big[f\Big(\frac{i}{n}\Big) - f(x)\Big]dx.$$

Theo định lí Lagarang, ta có:

$$\exists \xi_i \in \Big[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\Big]\colon n\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}\Big[f\Big(\frac{i}{n}\Big) - f(x)\Big]dx = n\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f'(\xi_i)\Big(\frac{i}{n} - x\Big)dx := I_n.$$

Đặt $m_i = \inf\left\{f'(x) : x \in \Big[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\Big]\right\}$, $M_i = \sup\left\{f'(x) : x \in \Big[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\Big]\right\}$.

Khi đó $n\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \int\limits_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \Big(\frac{i}{n} - x\Big)dx \leqslant I_n \leqslant n\sum\limits_{i=1}^{n} M_i \int\limits_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \Big(\frac{i}{n} - x\Big)dx$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} m_i \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} M_i.$$

Do $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0,1]$ nên

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\Big(\frac{i}{n}\Big) - \int_0^1 f(x)dx\right] = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f'(x)dx = \frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

Xét hàm số $f(x) = x^{2009} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n\left[\frac{1^{2009}+2^{2009}+\cdots+n^{2009}}{n^{2010}} - \frac{1}{2010}\right] = \frac{1}{2}.$

Câu IV. (Đại học Nha trang) Cho p, q là các số thực dương và $p+q=1$, hãy tìm tất cả các hàm số $f : R \to R$ thoả mãn:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(px+qy);\quad x, y \in R;\ x \neq y.$$

Đáp án. Từ giả thiết suy ra

$$f'(px+qy) = f'(qx+py), x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \tag{1}$$

Nếu $p \neq q \Rightarrow f'$ là hàm hằng. Thật vậy, nếu $f'(x_1) \neq f'(x_2)$ thì đặt

$$\begin{cases} x &= \dfrac{p}{2p-1}x_1 + \dfrac{p-1}{2p-1}x_2 \\ y &= \dfrac{p-1}{2p-1}x_1 + \dfrac{p}{2p-1}x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= px + (1-p)y \\ x_2 &= py + (1-p)x. \end{cases}$$

Điều này mâu thuẫn với (1). Suy ra $p \neq q \Rightarrow f$ là một hàm tuyến tính.

Nếu $p = q = \dfrac{1}{2}$ thì f là một đa thức bậc hai.

Câu V. (Đại học Nha trang) Cho $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0,1]$ và $f'(0) \neq 0$. Giả sử $\theta(x)$ thoả mãn

$$\int_0^x f(t)dt = f(\theta(x)).x, \text{ với } x \in (0,1].$$

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\theta(x)}{x}$.

Đáp án. Đặt $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$. Suy ra

$$F'(x) = f(x), F''(x) = f'(x) \Rightarrow F''(0) = f'(0) \neq 0.$$

Ta có khai triển Taylor

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2}F''(0)x^2 + o(x^2) \\ &= F'(0)x + \frac{1}{2}F''(0)x^2 + o(x^2) \end{aligned} \tag{1}$$

Mặt khác theo giả thiết ta có

$$F(x) = f(\theta(x))x = F'(\theta(x))x = x\big(F'(0) + F''(0)\theta(x) + o(\theta(x))\big) \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\theta(x)}{x} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0^+} \frac{o(\theta(x))}{x} + \lim_{x\to 0^+} \frac{o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Câu I. (Học viện An ninh nhân dân) Cho $f(x)$ là hàm khả vi liên tục trên đoạn $[0,2]$ và $f(1) = 0$. Chứng minh rằng

$$\int_0^2 [f'(x)]^2 dx \geq \frac{3}{2}\Big[\int_0^2 f(x)dx\Big]^2.$$

Đáp án. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz về tích phân

$$\Big[\int_a^b f(x)g(x)dx\Big]^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2dx\int_a^b [g(x)]^2dx$$

ta có

$$\Big[\int_0^1 xf'(x)dx\Big]^2 \leqslant \int_0^1 x^2dx\int_0^1 [f'(x)]^2dx = \frac{1}{3}\int_0^1 [f'(x)]^2dx;$$

$$\Big[\int_1^2 (2-x)f'(x)dx\Big]^2 \leqslant \int_1^2 (2-x)^2dx\int_1^2 [f'(x)]^2dx = \frac{1}{3}\int_1^2 [f'(x)]^2dx.$$

Suy ra

$$\Big[\int_0^1 xf'(x)dx\Big]^2 + \Big[\int_1^2 (2-x)f'(x)dx\Big]^2 \leqslant \frac{1}{3}\int_0^2 [f'(x)]^2dx \qquad (1)$$

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần với chú ý $f(1)=0$ ta được

$$\int_0^1 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = -\int_0^1 f(x)dx$$

$$\int_1^2 (2-x)f'(x)dx = (2-x)f(x)\Big|_1^2 + \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx.$$

Từ đây lưu ý tới bất đẳng thức $u^2+v^2 \geqslant \frac{1}{2}(u+v)^2$ ta có

$$\Big[\int_0^1 xf'(x)dx\Big]^2 + \Big[\int_1^2 (2-x)f'(x)dx\Big]^2 = \Big[\int_0^1 f(x)dx\Big]^2 + \Big[\int_1^2 f(x)dx\Big]^2$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\Big[\int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx\Big] = \frac{1}{2}\Big[\int_0^2 f(x)dx\Big]^2 \qquad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Câu II. (Học viện An ninh nhân dân) Cho A, B là các ma trận thực, vuông cấp n thoả mãn $A+B=I$ (ma trận đơn vị). Biết rằng $rank(A)+rank(B)=n$. Chứng minh rằng

$$A^2=A, B^2=B, AB=BA=O \text{ (ma trận không)}$$

Đáp án. Từ giả thiết $A+B=I$ ta có $AB+B^2=B$ và $BA+B^2=B$ nên

$AB = BA$.

Ta coi A, B là các phép biến đổi tuyến tính trên không gian vectơ n chiều V (chẳng hạn đó là không gian $\mathbb{R}^n$). Ta đã biết rằng $\mathrm{Im}(A)$ và $\ker(A)$ là các không giac con của không giac V, đồng thời

$$\mathrm{rank}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)),\ \dim(\mathrm{Im}(A)) + \dim(\ker(A)) = n.$$

Giả sử $\mathrm{rank}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)) = r$, thế thì $\dim(\ker(A)) = n - r$. Mặt khác, $\dim(\mathrm{Im}(B)) = \mathrm{rank}(B) = n - \mathrm{rank}(A) = n - r$, nên $\dim(\ker(B)) = r$.

Bây giờ giả sử $u \in \ker(A) \cap \ker(B)$ thì

$$u = Iu = (A + B)u = Au + Bu = \theta \ \text{(vectơ không)}.$$

Suy ra không gian V là tổng trực tiếp của hai không gian con $\ker(A)$ và $\ker(B)$, tức là $V = \ker(A) \oplus \ker(B)$.

Lấy vectơ bất kì $v \in V$ thì $v = v_1 + v_2$ với $v_1 \in \ker(A)$ và $v_2 \in \ker(B)$. Khi đó

$$ABv = AB(v_1 + v_2) = ABv_1 + ABv_2 = BAv_1 + ABv_2 = \theta + \theta = \theta.$$

Do đó phải có $AB = O$, tức là $AB = BA = O$.

Từ đây $AB = A(I - A) = A - A^2 = O$ và $BA = B(I - B) = B - B^2 = O$, tức là $A^2 = A, B^2 = B$.

Câu 1. (Trường ????) Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A + A^T = 0$. Chứng minh rằng

$$\det(I + \alpha A^2) \geq 0, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Đáp án. Ta xét hai trường hợp:

(a) $\alpha \geqslant 0$. Ta có

$$\begin{aligned}\det(I + \alpha A^2) &= \det(I + i\sqrt{\alpha}A)(I - i\sqrt{\alpha}A) = \det(I + i\sqrt{\alpha}A)\det\overline{I + i\sqrt{\alpha}A}\\ &= \det(I + i\sqrt{\alpha}A)\overline{\det(I + i\sqrt{\alpha}A)} \geqslant 0.\end{aligned}$$

(b) $\alpha < 0$. Đặt $\beta = \sqrt{-\alpha}$, khi đó ta có $I + \alpha A^2 = I - (\beta A)^2 = (I + i\beta A)(I - i\beta A)$. Theo giả thiết ta có:

$$A + A^T = 0 \Rightarrow A = -A^T \Rightarrow I + \alpha A^2 = (I + i\beta A)(I + i\beta A)^T.$$

$$\Rightarrow \det(I + \alpha A^2) = \det(I + i\beta A)(I + i\beta A)^T = \left[\det(I + i\sqrt{\alpha}A)\right]^2 \geqslant 0.$$

Câu 2. (Trường ????) Cho $A \in M_4(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A^3 = I_4$. Tính $\det(A + I)$

Đáp án. $A \in M_4(\mathbf{R})$. Xét $Q(x) = x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Vì $Q(A) = 0$ do đó đa thức đặc trưng $P(x)$ của A phải là ước của $Q(x)$.

Ta có $P(x) = \det(A - xI) \Rightarrow \det(A + I) = P(-1)$. Vì $A \in M_4(\mathbf{R})$ nên $\deg P = 4$.

Vì $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$ do đó xảy ra một trong 3 khả năng sau:
- $P(x) = (x-1)^4 \Rightarrow P(-1) = 16 \Rightarrow \det(A+I) = 16$.
- $P(x) = (x-1)^2(x^2+x+1) \Rightarrow P(-1) = 4 \Rightarrow \det(A+I) = 4$.
- $P(x) = (x^2+x+1)^2 \Rightarrow P(-1) = 1 \Rightarrow \det(A+I) = 1$.

Câu 3. (Trường ????) Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $AB + A + B = 0$. Chứng minh rằng

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B.$$

Đáp án. Theo giả thiết ta có $A(B+I) + B + I = I \Leftrightarrow (A+I)(B+I) = I$. Đặt $X = A + I \Rightarrow X^{-1} = B + I$.

Ta có $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(X - I) = \operatorname{rank} X^{-1}(X-I) = \operatorname{rank}(I - X^{-1}) = \operatorname{rank}(B)$.

Câu 4. (Trường ????) Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $\operatorname{trace}(AA^T + BB^T) = \operatorname{trace}(AB + A^TB^T)$. Chứng minh rằng $A = B^T$.

Đáp án. Với mọi $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ ta có $XX^T = (c_{ij})$ với $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{ik}x'_{kj}$, trong đó $x'_{kj} = x_{jk}$.

$$\Rightarrow \operatorname{trace}(XX^T) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}x'_{ki} = \sum_{i,k=1}^{n} x_{ik}x_{ik} = \sum_{i,k=1}^{n} x_{ik}^2 \geqslant 0.$$
$$\Rightarrow \operatorname{trace}(XX^T) = 0 \Leftrightarrow X = 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\operatorname{trace}\left[(A-B^T)(A-B^T)^T\right] &= \operatorname{trace}\left[(A-B^T)(A^T-B)\right] \\
&= \operatorname{trace}\left[(AA^T - AB - B^TA^T + B^TB\right] \\
&= \operatorname{trace}\left[AA^T + BB^T\right] - \operatorname{trace}[AB + A^TB^T] = 0.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A - B^T = 0 \Leftrightarrow A = B^T.$$

Câu 5. (Trường ????) Giải phương trình

$$X^3 - 3X^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad X \in M_2(R).$$

Đáp án.

$$X^3 - 3X^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \tag{1}$$
$$\Leftrightarrow X^2(X-3) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(X^2(X-3I)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \det X = 0 \text{ hoặc } \det(X - 3I) = 0.$$

(a) Trường hợp 1. $\det X = 0$:
Với mọi $X \in M_2(\mathbf{R})$ ta có $X^2 - \mathrm{trace}(X)X + \det(X)I = 0$.

$$\det(X) = 0 \Rightarrow X^2 = \mathrm{trace}(X)X.$$

Khi đó (1) tương đương với

$$[\mathrm{trace}^2(X) - 3\,\mathrm{trace}(X)X] = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{trace}^3(X) - \mathrm{trace}^2(X) = -4.$$

Đặt $\mathrm{trace}(X) = t \Rightarrow t^3 - 3t^2 + 4 = 0 \Rightarrow t = -1$ hoặc $t = 2$.
- Với $t = 2$ ta có $-2X = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Với $t = -1$ ta có $4X = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(b) Trường hợp 2. $\det(X - 3I) = 0 \Rightarrow 3$ là một giá trị riêng của X. Khi đó (1) tương đương với

$$X^3 - 3X^2 + 4I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow (X - 2I)^2(X + I) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(X - 2I)(X + I) = 0.$$

- Xét $\det(X - 2I) = 0 \Rightarrow 2$ là giá trị riêng của X, do đó đa thức đặc trưng của X có dạng $P(x) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow X^2 - 5X + 6I = 0$. Kết hợp với (1) ta có

$$4X - 12I = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{4}\left[12I + \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

- Xét $\det(X + I) = 0 \Rightarrow -1$ là giá trị riêng của X. Tương tự như trên ta có $X^2 - 2X - 3I = 0$. Kết hợp với (1) ta có

$$X - 3I = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Câu 6. (Trường ????) Cho $P(x)$ là đa thức bậc n với hệ số thực có n nghiệm thực phân biệt khác 0. Chứng minh rằng các nghiệm của đa thức $Q(x) := x^2P''(x) + 3xP'(x) + P(x)$ là thực và phân biệt.

Đáp án. Đặt $Q(x) = xP(x)$. Vì các nghiệm của $P(x)$ là nghiệm thực phân biệt và khác 0 nên các nghiệm của $Q(x)$ cũng là nghiệm thực và phân biệt. Theo định lí Rolle, suy ra các nghiệm của $Q'(x)$ là nghiệm thực và phân biệt.

Đặt $H(x) = xQ'(x)$, suy ra các nghiệm của $H(x)$ là nghiệm thực và phân biệt. Ta có:

$$H'(x) = x^2P''(x) + 3xP'(x) + P(x).$$

Vậy các nghiệm của đa thức $x^2P''(x) + 3xP'(x) + P(x)$ đều là nghiệm thực và phân biệt.

1.2 Tổng hợp đề dự tuyển môn Đại số 2009

Câu I. (ĐH Bà rịa - Vũng tàu) Cho

$$a, b, c, d \in \square,\ A = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tính $|A - \lambda E|$

Đáp án. Ta có $A'A = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)E$. Thay a bằng $a- \leftarrow$ ta được

$$\begin{aligned} &(A - \lambda E_4)'(A - \lambda E_4) = \big((a - \lambda)^2 + b^2 + c^2 + d^2\big)E \\ \Rightarrow &|(A - \lambda E_4)|^2 = |(A - \lambda E_4)'(A - \lambda E_4)| = \big((a- \leftarrow)^2 + b^2 + c^2 + d^2\big)^4 \\ \Leftrightarrow &|(A - \lambda E_4)|^2 = \big((a- \leftarrow)^2 + b^2 + c^2 + d^2\big)^4 \\ \Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l} |(A - \lambda E_4)| = \big((a - \lambda)^2 + b^2 + c^2 + d^2\big)^2 \\ |(A - \lambda E_4)| = -\big((a - \lambda)^2 + b^2 + c^2 + d^2\big)^2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Do $|A - \lambda E|$???????????

$$|(A - \lambda E_4)| = \big((a- \leftarrow)^2 + b^2 + c^2 + d^2\big)^2.$$

Câu II. (ĐH Bà rịa - Vũng tàu) Tìm tất cả các ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sao cho $A^n = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix}$ $\forall n \in \square^*$.

Đáp án. Giả sử $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ là ma trận cần tìm thì ta có

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 &= a^2 + bc \\ b^2 &= b(a+d) \\ c^2 &= c(a+d) \\ d^2 &= bc + d^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc &= 0 \\ b(a+d-b) &= 0 \\ c(a+d-c) &= 0. \end{cases}$$

*) Nếu $c \neq 0$ thì $\begin{cases} b &= 0 \\ a+d-c &= 0 \end{cases}$. Thế $b = 0$ vào A và lưu ý rằng

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ c^3 & d^3 \end{pmatrix} = A^2.A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ c(a+d) & d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ ac(a+d) + cd^2 & d^3 \end{pmatrix}$$

suy ra $ac(a+d)+cd^2=c^3 \Leftrightarrow a^2+ad+d^2=c^2$. Lại vì $a+d-c=0$ nên $a^2+d^2=c^2 \Rightarrow ad=0$.

+) Nếu $a=0$ thì từ điều kiện

$c \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} b & =0 \\ a+d-c & =0 \end{cases}$

ta có

$\begin{cases} a=b=0 \\ d=c\neq 0 \end{cases} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c \end{pmatrix},\ c\neq 0.$

+) Nếu $d=0$ thì từ điều kiện $c\neq 0$ suy ra

$\begin{cases} b & =0 \\ a+d-c & =0 \end{cases}$

ta có

$\begin{cases} d=b=0 \\ a=c\neq 0 \end{cases} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix},\ a\neq 0.$

*) Nếu $b\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} c & =0 \\ a+d-b & =0 \end{cases}$ thì lí luận tương tự ta có

$A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $b\neq 0$ hoặc $A=\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a\neq 0$.

*) Nếu $\begin{cases} b & =0 \\ c & =0 \end{cases}$ thì $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Thử lại ta có các ma trận thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ a,b,c,d \in \Box.$$

Câu III. (ĐH Bà rịa - Vũng tàu) Cho $n \in \Box^*$ và A là ma trận phản đối xứng cấp n. Chứng minh rằng $I+A$ khả nghịch trong đó I là ma trận đơn vị cấp n.

CAO ĐẲNG SƯ PHẠM BẮC NINH, MÔN: ĐẠI SỐ

Câu 1. (CĐ SP Bắc Ninh)

a) Cho 2 ma trận

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Tính $AB-BA$.

b) Có hay không 2 ma trận A,B vuông cấp n thỏa mãn $AB-BA$ là ma trận đơn vị.

Đáp án.

a) Tính $AB-BA=A=\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 15 & -3 \end{pmatrix}$.

b) Không thể có 2 ma trận A,B vuông cấp n thỏa mãn $AB-BA$ là ma trận đơn vị. Vì xét các phần tử trên đường chéo của 2 ma trận này có tổng bằng nhau nên tổng các phần tử trên đường chéo của $AB-BA=0$. Mà ma trận đơn vị lại có tổng các phần tử trên đường chéo lại bằng n.

Câu 2. (CĐ SP Bắc Ninh)

Giải hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \cdots + a_n^2x_n = b^2 \\ \ldots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \cdots + a_n^{n-1}x_n = b^{n-1} \end{cases}$$

Với $a_i (i = 1, 2, \ldots, n), b$ là các tham số, các hệ số a_i đôi một khác nhau.

Đáp án.

Dùng phương pháp định thức ta có nghiệm của hệ là:

$$x_j = \frac{\prod\limits_{i \neq j} (a_i - b)}{\prod\limits_{\substack{i, j = 1 \\ i \neq j}}^{n} (a_i - a_j)} \text{ với } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Câu 3. (CĐ SP Bắc Ninh)

Cho A là ma trận vuông, kí hiệu I là ma trận đơn vị cùng cấp. Chứng minh rằng

a) Nếu $A^2 = 0$ thì $I + A$ và $I - A$ là hai ma trận khả nghịch của nhau.

b) Nếu có số nguyên dương n để $A^n = 0$ thì $I + A$ và $I - A$ là các ma trận khả nghịch.

c) Nếu P, Q là hai ma trận vuông cùng cấp thỏa mãn $PQ = QP$ và tồn tại 2 số nguyên dương r, s thỏa mãn $P^r = Q^s = 0$ thì ma trận $I + P + Q$ là khả nghịch.

Đáp án.

Cho A là ma trận vuông cấp n, ký hiệu I là ma trận đơn vị cấp n.

a) Xét tích $(I + A)(I - A)$ và $(I - A)(I + A)$ đều bằng ma trận đơn vị nên $I + A$ và $I - A$ là hai ma trận khả nghịch của nhau.

b) Xét $I = I^n - A^n$ và $I = I + A^{2n+1}$ ta có ngay $I + A$ và $I - A$ là các ma trận khả nghịch.

c) Chỉ cần chứng tỏ $(P + Q)^{r+s} = 0$, Điều này có được do 2 giả thiết đã cho về P, Q. Từ đó áp dụng b) có ngay đpcm

Câu 4. (CĐ SP Bắc Ninh)

Cho ma trận A và k_1, k_2 là 2 giá trị riêng phân biệt. Giả sử $\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}$ là hai vectơ riêng lần lượt tương ứng với k_1, k_2. Hỏi $\vec{\alpha_1} + \vec{\alpha_2}$ có là vectơ riêng của A được không?

Đáp án.

Không thể có được điều đó.

Trước hết chứng tỏ rằng 2 vectơ riêng ứng với 2 giá trị riêng phân biệt là độc lập tuyến tính. Giả sử $\vec{\alpha_1} + \vec{\alpha_2}$ là vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng k

nào đó, tức là: $A(\vec{\alpha_1}+\vec{\alpha_2}) = k(\vec{\alpha_1}+\vec{\alpha_2})$ dẫn đến $(k_1-k)\vec{\alpha_1}+(k_2-k)\vec{\alpha_2} = \vec{0}$, suy ra $k_1 = k_2$, vô lí.

Câu 5. (CĐ SP Bắc Ninh)

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} x_1+x_2 & 1 & 1 \\ 1 & x_2+x_3 & 1 \\ 1 & 1 & x_3+x_1 \end{pmatrix}$, trong đó x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của đa thức $f(x) = x^3 + ax + 2009$.

a) Tính $detA$.

b) Tìm a để ma trận A có một giá trị riêng là 2009.

Đáp án.

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} x_1+x_2 & 1 & 1 \\ 1 & x_2+x_3 & 1 \\ 1 & 1 & x_3+x_1 \end{pmatrix}$, trong đó x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của đa thức $f(x) = x^3 + ax + 2009$.

a) Tính $detA$.

Khai triển theo dòng hay cột của A, biến đổi kết quả theo các đa thức đối xứng cơ bản $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ của x_1, x_2, x_3, được $detA = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 - 2\sigma_1$, áp dụng định lý Viet ta có ngay $detA = 2009$.

b) Tìm a để ma trận A có một giá trị riêng là 2009.

Trước hết tìm đa thức đặc trưng

$$\begin{aligned} |A-\lambda I| &= -\lambda^3 + 2\sigma_1\lambda^2 - (\sigma_1^2+\sigma_2-3)\lambda + \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 - 2\sigma_1. \\ &= -\lambda^3 - (a-3)\lambda + 2009 \end{aligned}$$

Để thỏa mãn bài thì đa thức trên có một nghiệm là 2009, từ đó lại áp dụng định lý Viet cho đa thức này có

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2009 = 0 \\ \lambda_1\lambda_2 2009 = -2009 \\ a - 3 = \lambda_1\lambda_2 + 2009(\lambda_1+\lambda_2) \end{cases}$$

Trong đó λ_1, λ_2 là 2 nghiệm còn lại của đa thức bậc 3 trên.

Từ đó λ_1, λ_2 là 2 nghiệm còn lại của đa thức bậc 3 trên.

Từ hệ thức này ta tìm được $a = 2009^2 + 2 = 4036083$.

Câu I. (Học viện Phòng không - Không quân) Ma trận $A \in M_n(K)$ được gọi là luỹ linh bậc p nếu p là một số nguyên dương sao cho $A^{p-1} \neq [O]$ và $A^p = [O]$ (ma trận không).

a) Chứng minh rằng nếu A là ma trận luỹ linh bậc p thì $E - A$ là ma trận khả nghịch. Hãy tìm ma trận nghịch đảo $(E-A)^{-1}$.

b) Áp dụng kết quả trên, hãy tìm ma trận nghịch đảo của ma trận:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix}$$

Đáp án. (a) Ta có $(E-A)(E+A+\cdots+A^{p-1}) = E^p - A^p$. Suy ra

$$\det(E-A) \neq 0, (E-A)^{-1} = E + A + \cdots + A^{p-1}.$$

(b) Đặt $B = E - A, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ -c & -b & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận lũy linh bậc 3.

Từ đó suy ra $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ab-c & -b & 1 \end{pmatrix}$.

Câu II. (Học viện Phòng không - Không quân)

a) Cho các số thực $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ khác nhau và khác các giá trị $0, -1, -2, \ldots, -n+1$. Hãy chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\lambda_1} & \dfrac{1}{\lambda_2} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_n} \\ \dfrac{1}{\lambda_1+1} & \dfrac{1}{\lambda_2+1} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{1}{\lambda_1+n-1} & \dfrac{1}{\lambda_2+n-1} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_n+n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

b) Cho đa thức $P(x) = x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6$. Biết rằng phương trình $P(x) = 0$ có một nghiệm là $1 - i$. Hãy chứng minh rằng nếu A là ma trận vuông cấp n thoả mãn $P(A) = [O]$ (ma trận không), thì A không có giá trị riêng là số thực.

Đáp án. (a) Giả sử phản chứng là định thức đã cho bằng 0. Khi đó phải tồn tại các hằng số $C_1, C_2, \ldots, C_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n : \frac{C_1}{\leftarrow_i} + \frac{C_2}{\leftarrow_i +1} + \cdots + \frac{C_n}{\leftarrow_i +n-1} = 0.$$

Từ đó suy ra phương trình $f(x) = \dfrac{C_1}{x} + \dfrac{C_2}{x+1} + \cdots + \dfrac{C_n}{x+n-1} = 0$ có n nghiệm phân biệt là $\leftarrow_1, \leftarrow_2, \ldots, \leftarrow_n$.

Mặt khác khi quy đồng mẫu số và rút gọn, ta có thể viết

$$f(x) = \frac{P(x)}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)},$$

trong đó $P(x)$ là đa thức có bậc nhỏ hơn $n-1$. Nhưng theo giả thiết ta có thể suy ra $f(x) = 0$ khi $P(x) = 0$, như vậy phương trình $P(x) = 0$ phải có n nghiệm phân biệt, điều này vô lí. Cho nên các hằng số $C_1, C - 2, \ldots, c_n$ chỉ có thể đồng thời bằng 0, có nghĩa là định thức đã cho khác 0.

(b) Giả sử ma trận A có giá trị riêng $\leftarrow$. Khi đó tồn tại vectơ $y \neq \theta$ sao cho $Ay = \lambda y$. Suy ra

$$A^2y = A(Ay) = A(\lambda y) = \lambda Ay =\leftarrow^2 y, \ldots, A^4y =\leftarrow^4 y.$$

Khi đó $P(A) = A^4 - 5A^3 + 11A^2 - 12A + 6E = [O]$. Từ đó suy ra

$$P(A)y = (A^4 - 5A^3 + 11A^2 - 12A + 6E)y = [O]y = \theta.$$

Từ kết quả trên, ta được $(\leftarrow^4 -5 \leftarrow^3 +11 \leftarrow^2 -12 \leftarrow +6)y = 0$. Do $y \neq \theta$ nên ta có

$$\leftarrow^4 -5 \leftarrow^3 +11 \leftarrow^2 -12 \leftarrow +6 = 0.$$

Mặt khác ta thấy đa thức $P(x) = x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6$ có các hệ số thực, nên theo giả thiết nếu $P(x)$ có nghiệm $1 - i$ thì cũng có nghiệm là $\overline{1 - i} = 1 + i$. Do đó khi phân tích ra thừa số $P(x)$ sẽ chứa nhân tử $\big[x - (1 - i)\big]\big[x - (1 + i)\big] = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$.

Chia $P(x)$ cho nhân tử $x^2 - 2x + 2$ ta được

$$P(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 3).$$

Ta thấy phương trình $x^2 - 2x + 3$ không có nghiệm thực nên phương trình $P(x) = 0$ không có nghiệm thực.

Như vậy phương trình $\leftarrow^4 -5 \leftarrow^3 +11 \leftarrow^2 -12 \leftarrow +6 = 0$ không có nghiệm thực, có nghĩa là ma trận A không có giá trị riêng là số thực.

Câu III. (Học viện Phòng không - Không quân) Cho bất phương trình

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} > 2009$$

Giả sử bất phương trình có các nghiệm là một số khoảng. Tính tổng độ dài các nghiệm trên trục số.

Đáp án. Đặt $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x-4} - 2009.$

Ta có $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{(x-2)^2} - \dfrac{1}{(x-3)^2} - \dfrac{1}{(x-4)^2} < 0.$

Từ đó ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

Từ bảng biến thiên của $f(x)$ ta có phương trình $f(x) = 0$ có bốn nghiệm $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ thỏa mãn điều kiện $1 < \alpha < 2 < \beta < 3 < \gamma < 4 < \delta$.

Do vậy bất phương trình $f(x) > 0$ có tập nghiệm là:

$$(1, 1 + \alpha) \cup (2, 2 + \beta) \cup (3, 3 + \gamma) \cup (4, 4 + \delta).$$

Gọi L là tổng độ dài các nghiệm trên trục số. Khi đó ta có:

$$L = (\alpha - 1) + (\beta - 2) + (\gamma - 3) + (\delta - 4) = \alpha + \beta + \gamma + \delta - 10.$$

Ta lại có

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2009(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) - (x-2)(x-3)(x-4)$$
$$- (x-1)(x-3)(x-4) - (x-1)(x-2)(x-4) - (x-1)(x-2)(x-3) = 0.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}&2009(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) - (x-2)(x-3)(x-4)\\&\quad - (x-1)(x-3)(x-4) - (x-1)(x-2)(x-4) - (x-1)(x-2)(x-3)\\&\qquad = 2009(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow 2009(x^2-3x+2)(x^2-7x+12) - (x-2)(x-3)(x-4)\\&\quad - (x-1)(x-3)(x-4) - (x-1)(x-2)(x-4) - (x-1)(x-2)(x-3)\\&\qquad \equiv 2009(x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta)(x^2-\gamma x-\delta x+\gamma\delta)\forall x \in ??? \quad (1)\end{aligned}$$

So sánh hệ số của x^3 của hai đa thức ở các vế của đồng nhất thức (1) ta được

$$\begin{aligned}2009(-3-7) - (1+1+1+1) &= 2009(-\alpha-\beta-\gamma-\delta)\\ \Rightarrow 2009.10+4 &= 2009(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\\ \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma+\delta &= 10+\frac{4}{2009}\\ \Rightarrow L &= 10+\frac{4}{2009}-10 = \frac{4}{2009}.\end{aligned}$$

Câu IV. (Học viện Phòng không - Không quân) Cho các đa thức với hệ số phức:

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n;$$
$$Q(x) = x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \cdots + b_{m-1}x + b_m$$

Biết rằng $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$ và tồn tại $k (k = 1, 2, \ldots, m)$ sao cho $|b_k| > C_m^k.2010^k$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất $a_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ sao cho $|a_i| > 2009$.

Đáp án. Gọi $x_1, x_2, \ldots, x_m$ là các nghiệm của $Q(x)$ (kể cả nghiệm bội). Giả sử môđun của chúng không vượt quá 2010. Theo định lí Viet ta có:

$$\begin{cases}|b_1| = \big|-(x_1+x_2+\cdots+x_m)\big| \leqslant 2010m\\ \ldots\\ |b_k| = \Big|(-1)^k \sum\limits_{i_1<i_2<\cdots<i_k} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}\Big| \leqslant C_m^k.2010^k\\ \ldots\\ |b_m| = \big|(-1)^m x_1x_2\ldots x_m\big| \leqslant 2010^m\end{cases} \quad (1)$$

Rõ ràng (1) mâu thuẫn với giả thiết $|b_k| > C_n^k 2010^k$. Như vậy đa thức $Q(x)$ có ít nhất một nghiệm y thỏa mãn bất đẳng thức

$$|y| > 2010 \tag{2}$$

Do đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$ nên ta có $P(y) = 0$.

Giả sử

$$|a_i| \leqslant 2009 \forall i = \overline{1, n} \tag{3}$$

Khi đó ta có

$$0 = |P(y)| = |y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y + a_n| \geqslant |y^n| - |a_1 y^{n-1}| - \cdots - |a_{n-1} y| - |a_n| \tag{4}$$

Từ (2) và (3) ta có

$$|a_i| \leqslant 2009 < |y| - 1 \forall i = \overline{1, n} \tag{5}$$

Từ (4) và (5) ta nhận được

$$0 = |P(y)| \geqslant |y^n| - \big(|y| - 1\big)\big(|y^{n-1}| + \cdots + |y| + 1\big) = 1 \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy tồn tại i $(i = 1, 2 \ldots, n)$ sao cho $|a_i| > 2009$.

Câu I. (Đại học Thuỷ lợi) Cho ma trận thực $A = (a_{ij})_{n \times n}$ thoả mãn các điều kiện sau:

i) n là số lẻ,

ii) $a_{ii} = \lambda$,

iii) $a_{ij} = -a_{ji} \ \forall i \neq j$.

Tìm điều kiện của λ để hệ phương trình

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \ i = 1, \ldots, n,$$

có nghiệm duy nhất.

Đáp án. Nếu $\leftarrow = 0$ thì A là ma trận phản đối xứng cấp lẻ nên $\det(A) = 0$.

Ngược lại, nếu $\det(A) = 0$ thì hệ thuần nhất tương ứng

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0, \ i = 1, \ldots, n$$

có nghiệm không tầm thường $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$.

Lần lượt nhân $a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n = 0$ với $c_i, i = 1, \ldots, n$ rồi cộng lại ta được $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}c_jc_i = 0$.

Do với i và j khác nhau thì $a_{ij}c_ic_j + a_{ij}c_jc_i = 0$, nên tổng này bằng $\leftarrow \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2 = 0$. Từ $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2 \neq 0$ ta có $\leftarrow = 0$.

Vậy $\leftarrow= 0$ khi và chỉ khi $\det(A) = 0$. Do đó hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\leftarrow\neq 0$.

Câu II. (Đại học Thuỷ lợi) Gọi $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ là tất cả các căn bậc $n (n > 1)$ của đơn vị. Ký hiệu $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là ma trận có

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 + \epsilon_i & \text{khi } i = j \\ \epsilon_i & \text{khi } i \neq j. \end{cases}$$

Tìm ma trận nghịch đảo của A.

Đáp án. Từ $x^n - 1 = (x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)\dots(x - \varepsilon_n) = x^n - \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i x^{n-1} + \dots$, so sánh các hệ số ta có $\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 0$.

Mặt khác $(A - E)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i (A - E)$ nên $(A - E)^2 = O$. Do đó

$$A(2E - A) = \Big(E + (A - E)\Big)\Big(E - (A - E)\Big) = E^2 - (A - E)^2 = E.$$

Vậy ma trận nghịch đảo của A là $2E - A$.

Câu III. (Đại học Thuỷ lợi) Tìm tất cả các số thực a, b sao cho

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Đáp án. Đặt $a = x\sqrt[4]{2}, b = y\sqrt[4]{2}$, phương trình đã cho được đưa về

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Lấy định thức hai vế, suy ra $x^2 + y^2 = 1$. Vì vậy có thể đặt $x = \cos\alpha, y = \sin\alpha$. Khi đó (1) được đưa về

$$\begin{pmatrix} \cos 4\alpha & -\sin 4\alpha \\ \sin 4\alpha & \cos 4\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Từ đây có $\alpha = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{4}$ với $k = 0, 1, 2, 3$.

Vậy $a = \sqrt[4]{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{4}\right), b = \sqrt[4]{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{2\pi}{4}\right)$, với $k = 0, 1, 2, 3$.

Câu IV. (Đại học Thuỷ lợi) Cho A là ma trận thực có hạng bằng r. Chứng minh rằng các ma trận A^TA và AA^T cũng có hạng bằng r.

Đáp án.

Giả sử A là ma trận cỡ $m \times n$. Khi ấy $A^T A$ có cỡ $n \times n$. Ta xét hai hệ phương trình đại số tuyến tính n ẩn

$$AX = O \qquad (1)$$

$$\text{và} A^T AX = O \qquad (2)$$

$$\text{với} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}.$$

Ta sẽ chứng minh hai hệ này có tập nghiệm trùng nhau. Rõ ràng tập nghiệm của (1) là tập con của (2). Ngược lại, nếu X_0 là nghiệm của (2), tức là $A^T AX_0 = O$ thì $X_0^T A^T AX_0 = O$ nên $(AX_0)^T AX_0 = 0$ hay $\|AX_0\|^2 = 0$. Từ đây suy ra $AX_0 = O$, tức là X_0 cũng là nghiệm của (1).

Vì $\text{rank}(A) = n$- chiều của không gian nghiệm$=\text{rank}(A^T A)$ ta có $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T A)$.

Chứng minh tương tự, ta có $\text{rank}(A^T) = \text{rank}(AA^T)$ nên $\text{rank}(A) = \text{rank}(AA^T)$.

Câu I. (Học viện Quân Y) Cho hai đa thức $P(x) = (x-a)^{2n} + (x-3a)^{2n}$ và $Q(x) = (x-a)^2.(x-3a)^2$ với $n \in N^*, a \in R^*$. Xác định đa thức dư trong phép chia $P(x)$ cho $Q(x)$.

Đáp án. Ta có thể viết $P(x) = Q(x).T(x) + R(x)$ với $\deg(R) \leqslant 3$.

Vì $\begin{cases} P(a) = (2a)^{2n} = R(a) \\ P(3a) = (2a)^{2n} = R(3a) \end{cases} \Rightarrow R(x) = (x-a)(x-3a).S(x)$ với $\deg(S) \leqslant 1$.

Mặt khác $P'(x) = Q'(x).T(x) + Q(x).T'(x) + R'(x)$. Nên

$$\begin{cases} P'(a) = 2n(-2a)^{2n-1} = R'(a) = -2a.S(a) \\ P'(3a) = 2n(2a)^{2n-1} = R'(3a) = 2a.S(3a). \end{cases}$$

Suy ra $S(a) = S(3a) = 2n(2a)^{2n-2}$, vì $\deg(S) \leqslant 1$ nên $S(x) = 2n(2a)^{2n-2}$.

Vậy $R(x) = 2n(2a)^{2n-2}.(x-a)(x-3a) + (2a)^{2n}$.

Câu II. (Học viện Quân Y) Cho đa thức $P(x) = x^5 - x + 2 \in \mathbf{C}[x]$ có các nghiệm là x_i $(i = \overline{1,5})$. Tính giá trị biểu thức sau:

$$A = \sum_{i=1}^{5} \frac{8x_i - 10}{(x_i^2 - 1)(x_i - 2)^2}$$

Đáp án. Ta có $\dfrac{8x - 10}{(x^2-1)(x-2)^2} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{(x-2)^2}$.

Do đó

$$A = \sum_{i=1}^{5} \frac{8x_i - 10}{(x_i^2 - 1)(x_i - 2)^2} = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i + 1} - \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i - 1} + 2\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{(x_i - 2)^2}.$$

Mặt khác $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \sum\limits_{i=1}^{5} \dfrac{1}{x - x_i}$ nên

$$B = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i + 1} = -\frac{P'(-1)}{P(-1)} = -2, C = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i - 1} = -\frac{P'(1)}{P(1)} = -2,$$

$$D = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{(x_i - 2)^2} = -\frac{P''(2)P(2) - [P'(2)]^2}{P^2(2)} = \frac{1121}{1024}.$$

Vậy $A = B - C + 2D = \dfrac{1121}{512}$.

Câu III. (Học viện Quân Y) Tìm tất cả các ma trận A vuông cấp n sao cho với mọi ma trận B vuông cấp n ta đều có $det(A + 2009.B) = det(A) + 2009.det(B)$.

Đáp án. Chọn $B = A$ thì $\det(2010A) = 2010 \det(A) \Rightarrow \det(A) = 0$.

Giả sử $A \neq 0$ khi đó tồn tại cột $A_i \neq 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Chọn B có các cột $(B_1 \;\; B_2 \ldots B_{i-1} - \frac{A_i}{2009} \;\; B_{i+1} \ldots B_n)$ sao cho $\det(B) \neq 0$.

Nhưng ta lại có $\det(A + 2009B) = 0 = 2009 \det(B)$ (mâu thuẫn).

Vậy $A = 0$.

Câu IV. (Học viện Quân Y) Cho $a \in R^*$, chứng tỏ rằng ma trận A khả nghịch và tìm A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 & a^3 \\ \frac{1}{a} & 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^3} & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

Đáp án. Đặt $U = \left(1, \dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{a^2}, \dfrac{1}{a^3}\right)$ và $V = (1, a, a^2, a^3)$. Khi đó $A = U^T V - I$ và $VU^T = 4$.

Nên $A^2 = (U^T V - I)^2 = 2U^T V + I = 2A + 3I \Rightarrow A(A - 2I) = 3I$.

Do đó A khả nghịch và $A^{-1} = \dfrac{1}{3}(A - 2I)$.

Câu V. (Học viện Quân Y) Cho ma trận nguyên A vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu với mọi $b \in \mathbf{Z}^n$ hệ phương trình $Ax = b$ đều có nghiệm nguyên thì $det(A) = \pm 1$.

Đáp án. Do với mọi $b \in \mathbb{Z}^n$ hệ $Ax = b$ đều có nghiệm nguyên nên chọn $b = e_i$ thì hệ có nghiệm nguyên tương ứng x_i. Đặt $X = (x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n)^T$, khi đó ta có đẳng thức $AX = I$.

Do đó $\det(A). \det(X) = 1 \Rightarrow \det(A)$ là ước của 1 hay $\det(A) = \pm 1$.

Câu VI. (Học viện Quân Y) Cho $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Tìm các giá trị riêng của ma trận A^TA.

Đáp án. Ta có

$$A^TA = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \dots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \dots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \dots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

Xét đa thức $P(t) = \det(A^TA - tI) = \begin{pmatrix} a_1^2 - t & a_1a_2 & \dots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 - t & \dots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \dots & a_n^2 - t \end{pmatrix}$.

Dễ thấy $P(t)$ có $\deg(P) = n$, hệ số ứng với t^n là $(-1)^n$ và $t = 0$ là nghiệm bội $n-1$ của $P(t)$.

Hơn nữa ta có tổng các nghiệm của $P(t) = \mathrm{Tr}(A^TA) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$. Suy ra $P(t)$ có một nghiệm $t = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$.

Từ đó ta có $P(t) = (-1)^n t^{n-1}\Big(t - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\Big)$.

Vậy A^TA có các giá trị riêng là 0 và $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$.

Câu I. (CĐSP Bà Rịa - Vũng tàu) Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 & C_{n+1}^1 \\ C_3^2 & C_4^2 & \dots & C_{n+1}^2 & C_{n+2}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} & C_{2n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

trong đó C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử.

Đáp án. Vì $C_k^i + C_k^{i+1} = C_{k+1}^{i+1}$ nên hiệu của mỗi phần tử với phần tử đứng bên trái nó thì bằng phần tử đứng ngay trên nó.

Để tính D ta lấy cột n trừ đi cột $n-1$ để được cột n mới, rồi lấy cột $n-1$ trừ đi cột $n-2$ để được cột $n-1$ mới, ..., lấy cột thứ 2 trừ đi cột thứ nhất để được cột thứ 2 mới. Lúc này ta được

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_2^1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ C_3^2 & C_3^1 & \ddots & C_n^1 & C_{n+1}^1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ C_n^{n-1} & C_n^{n-2} & \dots & C_{2n-3}^{n-2} & C_{2n-2}^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Lại làm như trên nhưng chỉ làm đến cột thứ 2 ta có

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_2^1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ C_3^2 & C_3^1 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ C_n^{n-1} & C_n^{n-2} & \dots & C_{2n-4}^{n-3} & C_{2n-3}^{n-3} \end{vmatrix}.$$

Sau $n-1$ bước như vậy ta được

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_2^1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ C_3^2 & C_3^1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ C_n^{n-1} & C_n^{n-2} & \dots & C_n^1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Câu II. (CĐSP Bà Rịa - Vũng tàu) Cho

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Tính $f(A)$ biết $f(x) = 2009x^{2009} - 2008x^{2008} + \dots + x$.

Đáp án. Ta có

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\leftarrow & -5 & 2 \\ 5 & -7-\leftarrow & 3 \\ 6 & -9 & 4-\leftarrow \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \leftarrow^2 (1-\leftarrow) = 0 \Leftrightarrow \leftarrow^2 - \leftarrow^3 = 0.$$

Vậy theo định lí *Cayley và Hamilton* ta có $A^3 = A^2$, suy ra $A^k = A^2, \forall k \geqslant 2$.
Khi đó $f(A) = 1004A^2 + A$.

Câu III. (CĐSP Bà Rịa - Vũng tàu) Cho $n \in \square^*$ và A, B là hai ma trận cấp n thoả mãn $AB - BA = B$. Chứng minh rằng $AB^{2009} = B^{2009}(A + 2009E)$ trong đó E là ma trận đơn vị cấp n.

Đáp án.

Cách 1. Ta chứng minh $AB^k = B^k(A + kE), \forall k \in \square^*$ bằng quy nạp.
Hiển nhiên công thức đúng với $n = 1$.
Giả sử $AB^k = B^k(A + kE), k \geqslant 1$ thì

$$\begin{aligned} AB^{k+1} &= AB^kB = B^k(A + kE)B = B^k(AB + kB) \\ &= B^k[BA + B + kB] = B^{k+1}[A + (1 + k)E]. \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2. Từ $AB - BA = B \Rightarrow AB = B(A+E)$. Suy ra

$$\begin{aligned} AB^2 &= B(A+E)B = B(AB+B) = B(B+BA+B) \\ &= B(BA+2B) = B^2(A+2E) \\ \Rightarrow AB^3 &= B^2(A+2E)B = B^2(AB+2B) = B^2(B+BA+2B) \\ &= B^2(BA+3B) = B^3(A+3E) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cdots \Rightarrow AB^n = B^n(A+kE)\ \forall n \in \square^*.$$

Câu IV. (CĐSP Bà Rịa - Vũng tàu) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} XYX = I_2 \\ YXY = I_2 \end{cases}$$

trong đó X, Y là các ma trận vuông cấp 2 và I_2 là ma trận đơn vị cấp 2.

Đáp án. Vì với mọi X, Y là các ma trận vuông cấp 2 thì $XYXY = (XYX)Y = X(YXY)$ nên từ $\begin{cases} XYX = I_2 \\ YXY = I_2 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} X = Y \\ X^3 = I_2 \end{cases}$.

Đặt $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ thì từ $X^3 = I_2$ suy ra $\begin{cases} a^3 + 2abc + bcd & = 1 \\ b(a^2 + ad + bc + d^2) & = 0 \\ c(a^2 + ad + bc + d^2) & = 0 \\ abc + 2bcd + d^3 & = 1 \end{cases}$

*) Nếu $b = 0$ hoặc $c = 0$ thì đều suy ra $a = d = 1$ nên $X = I_2$.

*) Nếu $a^2 + ad + bc + d^2 = 0$ thì

$$\begin{cases} a^3 + 2abc + bcd & = 1 \\ b(a^2 + ad + bc + d^2) & = 0 \\ c(a^2 + ad + bc + d^2) & = 0 \\ abc + 2bcd + d^3 & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + 2abc + bcd & = 1 \\ a^2 + ad + bc + d^2 & = 0 \\ abc + 2bcd + d^3 & = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 - (2a+d)(a^2 + ad + d^2) = 1 \\ bc = -a^2 - ad - d^2 \\ -(a+2d)(a^2 + ad + d^2) + d^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc = -a^2 - ad - d^2 \\ (a+d)^3 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} bc = -a^2 - ad - d^2 \\ a + d = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc & = -a^2 - a - 1 \\ d & = -1 - a \end{cases}$$

Vậy $X = Y = I_2$ hoặc $X = Y = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{-a^2-a-1}{b} & -1-a \end{pmatrix}$, $a, b \in \square, b \neq 0$.

Câu V. (CĐSP Bà Rịa - Vũng tàu) Cho A và B là các ma trận vuông cấp n thoả mãn $E - AB$ khả nghịch. Chứng minh $E - BA$ khả nghịch.

Đáp án. Giả sử $E - BA$ không khả nghịch, tức $|E - BA| = 0$. Khi đó hệ $(E - BA)X = 0$ có nghiệm không tầm thường, tức là tồn tại vectơ $X \neq \vec{0}$ để

$$(E - BA)X = 0 \Leftrightarrow X = BAX.$$

Đặt $Y = AX \Rightarrow X = BY$. Vì $X \neq \vec{0}$ nên $Y \neq \vec{0}$.

Xét

$$\begin{aligned}(E - AB)Y &= Y - ABY = Y - AB(AX) = Y - A(BAX)\\ &= Y - AX = Y - Y = 0.\end{aligned}$$

Vậy hệ $(E - AB)Y = 0$ có nghiệm không tầm thường, suy ra $E - BA$ khả nghịch.

Câu VI. (CĐSP Bà Rịa - Vũng tàu) Cho $P(x)$ là một đa thức bậc $n \geq 1$ với hệ số thực và có n nghiệm thực. Chứng minh rằng: $(n-1)[P'(x)]^2 \geq nP(x)P''(x)\ \ \forall x \in \square$.

Đáp án. Gọi $(n-1)[P'(x)]^2 \geqslant nP(x)P''(x)\ \forall x \in \square$ là (1).

*) Nếu $n = 1$ thì $P''(x) = 0$ nên $(n-1)[P'(x)]^2 = nP(x)P''(x) = 0$. Vậy (1) đúng.

*) Nếu $n > 1$ ta gọi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các nghiệm của đa thức $P(x)$. Khi đó với $x = x_i, i = \overline{1,n}$ thì hiển nhiên (1) đúng vì $(n-1)[P'(x)]^2 \geqslant 0 = nP(x)P''(x)$.

Bây giờ giả sử $x \neq x_i, \forall i = \overline{1,n}$ thì ta có

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}, \frac{P''(x)}{P(x)} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{2}{(x - x_i)(x - x_j)}.$$

Do đó

$$\begin{aligned}&(n-1)\left(\frac{P'(x)}{P(x)}\right)^2 - n\frac{P''(x)}{P(x)} = (n-1)\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}\Big)^2 - n\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{2}{(x - x_i)(x - x_j)}\\
&= (n-1)\left[\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{x - x_i}\Big)^2 + 2\Big(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{(x - x_i)(x - x_j)}\Big)\right] - n\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{2}{(x - x_i)(x - x_j)}\\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{n-1}{(x - x_i)^2} + 2(n-1)\left(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{(x - x_i)(x - x_j)}\right) - n\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{2}{(x - x_i)(x - x_j)}\\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{n-1}{(x - x_i)^2} - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{2}{(x - x_i)(x - x_j)} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}\left(\frac{1}{x - x_i} - \frac{1}{x - x_j}\right)^2 \geqslant 0. \blacksquare\end{aligned}$$

Vậy $(n-1)\left(\frac{P'(x)}{P(x)}\right)^2 - n\frac{P''(x)}{P(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow (n-1)[P'(x)]^2 \geqslant nP(x)P''(x)$. Suy ra điều phải chứng minh.

Chương 2

Tổng hợp đề dự tuyển năm 2010

2.1 Tổng hợp đề dự tuyển môn Giải tích 2010

Bài 1. (ĐHKHTN TpHCM)

Cho hàm số $f(x) = \ln(x+1)$.

a) Chứng minh rằng với mọi $x > 0$, tồn tại duy nhất số thực c thỏa mãn điều kiện $f(x) = xf'(c)$ mà ta ký hiệu là $c(x)$.

b) Tìm $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{c(x)}{x}$

Đáp án.

a) Yêu cầu bài toán tương đương với việc chứng minh phương trình

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{1}{c+1}$$

có nghiệm duy nhất c với mọi $x > 0$. Ta có thể giải trực tiếp được

$$c = \frac{x}{\ln(x+1)} - 1$$

b) Ta có thể tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{c(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\dfrac{x}{\ln(x+1)} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$ bằng cách sử dụng công thức Taylor: $\ln(1+x) = x - x^2/2$ hoặc dùng quy tắc L'Hopitale:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \lim_{x\to 0+} \frac{x}{\ln(1+x)}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x} \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\dfrac{1}{1+x}} = \frac{1}{2}$$

Ghi chú: Bài này khá đơn giản.

Bài 2. (ĐHKHTN TpHCM)

Chứng minh rằng dãy số $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$ là một dãy số giảm.

Đáp án.

Với $n = 1$ thì kiểm tra trực tiếp ta thấy $a_1 > a_2$. Xét hàm số

$f(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. Ta chứng minh f là hàm giảm trên $[2,+\infty)$. Từ đây suy ra hàm số $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ giảm trên $[2,+\infty)$ và như thế dãy đã cho giảm. Ta có

$$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x+\frac{1}{2}}{x(x+1)}$$

Ta chứng minh bổ đề:

Bổ đề: với $0 < x$ thì $\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

Xét hàm số $g(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$ thì $g'(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x} = \frac{x^3}{(x+1)} > 0$. Do đó $g(x) > g(0) = 0$ với mọi $x > 0$.

Áp dụng bổ đề, ta có

$$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x+\frac{1}{2}}{x(x+1)} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{2x+1}{2x(x+1)}$$
$$= \frac{6x^2(x+1) - 3x(x+1) + 2(x+1) - 3x^2(2x+1)}{6x^3(x+1)} = \frac{2-x}{6x^3(x+1)} \le 0$$

Vậy $f(x)$ là hàm số giảm trên $[2,+\infty)$. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Câu 1. (ĐH KH Huế) Cho (x_n) là dãy số thực dương. tăng và bị chặn trên. Chứng minh rằng dãy số (y_n) xác định bởi

$$y_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x_k x_{k+2}}{x_{k+1}x_{k+3}}\right),\ n = 1;\ 2;\ldots$$

là dãy hội tụ.

Đáp án. Ta có dãy (y_n) là dãy tăng. Đặt $M = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, $b = \frac{x_1x_3}{M^2}$. Với mọi n nguyên dương,

$$\begin{aligned} y_n &= n - \sum_{k=1}^{n}\frac{x_kx_{k+2}}{x_{k+1}x_{k+3}} \\ &\le n - n\sqrt[n]{\frac{x_1x_3}{x_2x_4}\cdot\frac{x_2x_4}{x_3x_5}\cdots\frac{x_nx_{n+2}}{x_{n+1}x_{n+3}}} \\ &= n\left(1 - \sqrt[n]{\frac{x_1x_3}{M^2}}\right) \\ &= n(1-\sqrt[n]{b}) \longrightarrow -\ln b \end{aligned}$$

Do đó dãy (y_n) bị chặn trên. Thành thử (y_n) là dãy hội tụ.

Câu 2. (ĐH KH Huế) Cho hàm $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ liên tục. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 x^4 f(x)\mathrm{d}x \le \frac{4}{15}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \quad (1).$$

Đáp án. Bất đẳng thức (1) đúng nếu $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$. Theo bất đẳng Buniakovskij, ta có

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 \left(f(x) - \frac{15}{8}x^4\right)\mathrm{d}x\right)^2 &\leq \int_0^1 \left(f(x) - \frac{15}{8}x^4\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - \frac{15}{4}\int_0^1 x^4 f(x)\mathrm{d}x + \frac{25}{64}.\end{aligned}$$

Từ đó có

$$\int_0^1 x^4 f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{4}{15}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Câu 3. (ĐH KH Huế) Cho hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ khả vi, thoả mãn

$$f(0) = 0,\ (1 + x^2)f'(x) \geq 1 + f^2(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Hỏi hàm số f có thể có giới hạn hữu hạn tại vô cùng hay không?

Đáp án. Từ giả thiết ta có

$$\frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} - \frac{1}{1 + x^2} \geq 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Xét $g(x) = \arctan f(x) - \arctan x$. Ta có $g'(x) \geq 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$. Do đó $g(x)$ là hàm tăng. Nên $g(x) \leq 0,\ \forall\ x \leq 0$ và $g(x) \geq 0,\ \forall\ x \geq 0$. Từ đó ta có $f(x) \leq x,\ \forall\ x \leq 0$ và $f(x) \geq x,\ \forall\ x \geq 0$.

Vậy f không có giới hạn hữu hạn tại vô cùng.

Câu I (ĐHSP Huế) Cho dãy $(x_n)_n$ được xác định bởi: $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n\big(1 + x_n^{2010}\big)$ với $n \geq 1$. Tìm

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1^{2010}}{x_2} + \frac{x_2^{2010}}{x_3} + ... + \frac{x_n^{2010}}{x_{n+1}}\right).$$

Đáp án. Với mỗi $k \geq 1$, ta có

$$\frac{x_k^{2010}}{x_{k+1}} = \frac{x_k^{2011}}{x_k x_{k+1}} = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k x_{k+1}} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}.$$

Suy ra

$$\left(\frac{x_1^{2010}}{x_2} + \frac{x_2^{2010}}{x_3} + ... + \frac{x_n^{2010}}{x_{n+1}}\right) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{k+1}}.$$

Rõ ràng $(x_n)_n$ là dãy tăng và do đó tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Ta chứng minh được $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Suy ra giới hạn cần tính bằng 1.

Câu 2 (ĐHSP Huế)

a) Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $f(x) = f(x+2010)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) = x_0 + 2010$.

b) Cho f là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Giả sử tồn tại 2009 số $a_1, a_2, ..., a_{2009}$ sao cho

$$f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_{2009}) = 2009.$$

Chứng minh rằng tồn tại 2009 số $b_1, b_2, ..., b_{2009}$ sao cho $b_i > a_i$ với mỗi $i = 1, 2, ..., 2009$ và

$$f(b_1) + f(b_2) + ... + f(b_{2009}) = 2010.$$

Đáp án. a) Vì f liên tục và tuần hoàn với chu kỳ 2010 nên f bị chặn. Đặt $F(x) = x + 2010 - f(x), x \in \mathbb{R}$. Ta có F liên tục trên $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ nên theo định lý giá trị trung gian của hàm liên tục, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $F(x_0) = 0$, tức là $f(x_0) = x_0 + 2010$.

b) Đặt $F(x) = f(a_1 + x) + f(a_2 + x) + ... + f(a_{2009} + x) - 2010, x \in \mathbb{R}$. Khi đó F là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $F(0) = -1 < 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ nên tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $F(x_0) = 0$. Đặt $b_i = a_i + x_0, i = 1, ..., n$, ta nhận được điều phải chứng minh.

Câu 3 (ĐHSP Huế) Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi sao cho $f(x)+f'(x) < 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Chứng minh rằng $f(1) \leq \dfrac{e-1}{e}$ và tìm một hàm f sao cho dấu đẳng thức xảy ra.

Đáp án. Đặt $F(x) = e^x(f(x) - 1), x \in \mathbb{R}$. Ta có $F'(x) = e^x\big(f(x) + f'(x) - 1\big) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên F là một hàm không tăng trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$F(1) = e\big(f(1) - 1\big) \leq F(0) = -1.$$

Suy ra $f(1) \leq \dfrac{e-1}{e}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi F là hàm hằng trên $[0, 1]$, vì $F(0) = -1$ nên suy ra $f(x) = 1 - e^{-x}, x \in [0, 1]$. Dễ thấy hàm $f(x) = 1 - e^{-x}, x \in \mathbb{R}$ thỏa điều kiện của bài ra. **Câu 4 (ĐHSP Huế)** Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và f có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $f(x_0) < \dfrac{1}{x_0}$.

Đáp án. Gọi F là một nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$. Giả sử với mọi $x > 0$ ta đều có $f(x) \geq \dfrac{1}{x}$. Khi đó $f(1/x) \geq x$ với mọi $x > 0$. Do đó

$$-\frac{1}{x^2} f(1/x) \leq -\frac{1}{x}, \quad \text{với mọi } x > 0,$$

tức là

$$\left(F\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x\right)' \leq 0, \quad \text{với mọi } x>0.$$

Đặt $G(x)=F\left(\dfrac{1}{x}\right)+\ln x, x>0$. Theo lập luận trên, G là một hàm không tăng trên $(0,+\infty)$. Điều đó mâu thuẫn với $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x)=-\infty, \quad G(1)=F(1)>-\infty$. Vậy tồn tại $x_0>0$ sao cho $f(x_0)<\dfrac{1}{x_0}$.

Câu 5 (ĐHSP Huế) Cho $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là một hàm liên tục sao cho

$$2xf(2x^2-1)=f(x), \quad \text{với mọi } x\in\mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $f(x)=0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Đáp án. Đặt $g(t)=f(\cos t)\sin t, \quad t\in[0,\pi]$. Với mỗi $t\in[0,\pi]$ ta có

$$g(t)=f(\cos t)\sin t=2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}.f\big(2\cos^2\frac{t}{2}-1\big)=\sin\frac{t}{2}f(\cos\frac{t}{2})=g\big(\frac{t}{2}\big).$$

Vì g liên tục trên $[0,\pi]$ và với mọi $t\in[0,\pi]$, dãy $\left(\dfrac{t}{2^n}\right)_n$ hội tụ về 0 nên $g(t)=g(0)=0$ với mọi $t\in[0,\pi]$. Suy ra $f(x)=0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Dễ dàng kiểm tra lại là hàm $f(x)=0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn giả thiết.

Câu 1. (HV PKKQ)

Tính giới hạn:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int\limits_0^{\sin x}(e^{t^2}-1)dt}{\int\limits_0^{x}2t^2dt}$$

Đáp án. Khi $x\to 0^+$ ta có $\sin x\to 0$, suy ra:

$\lim\limits_{x\to 0}\Big(\int\limits_0^{\sin x}(e^{t^2}-1)dt\Big)=0; \lim\limits_{x\to 0}\Big(\int\limits_0^{x}2t^2dt\Big)=0.$

Do đó giới hạn đã cho có dạng $\dfrac{0}{0}$. áp dụng quy tắc Lôpitan ta có:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int\limits_0^{\sin x}(e^{t^2}-1)dt}{\int\limits_0^{x}2t^2dt}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\Big(\int\limits_0^{\sin x}(e^{t^2}-1)dt\Big)'}{\Big(\int\limits_0^{x}2t^2dt\Big)'}$$

Theo định lý đạo hàm theo cận trên ta có:

$\Big(\int\limits_0^{\sin x}(e^{t^2}-1)dt\Big)'=(e^{\sin^2 x}-1)\cos x$

$\Big(\int\limits_0^{x}2t^2dt\Big)'=2x^2$

từ đó suy ra:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int\limits_0^{\sin x}(e^{t^2}-1)dt}{\int\limits_0^{x}2t^2dt}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{\sin^2 x}-1)\cos x}{2x^2}$$

Mặt khác khi $x \to 0$ thì $(e^{\sin^2 x}-1) \sim \sin^2 x \sim x^2$, do đó:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int\limits_0^{\sin x}(e^{t^2}-1)dt}{\int\limits_0^{x}2t^2dt}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\cos x}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

Câu 2. (HV PKKQ)

Dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi:

$x_1 = 3; 3(x_{n+1}-x_n)=\sqrt{16+x_n^2}+\sqrt{16+x_{n+1}^2}, \forall n \geq 1.$

Hãy tìm số hạng tổng quát của dãy số.

Đáp án. Ta có:

$3(x_{n+1}-x_n)=\sqrt{16+x_n^2}+\sqrt{16+x_{n+1}^2}$

$\Leftrightarrow [3x_{n+1}-(3x_n+\sqrt{16+x_n^2})]=\sqrt{16+x_{n+1}^2}$

$\Rightarrow 9x_{n+1}^2+(3x_n+\sqrt{16+x_n^2})^2-6x_{n+1}(3x_n+\sqrt{16+x_n^2})=16+x_{n+1}^2$

$\Rightarrow 8x_{n+1}^2-6x_{n+1}(3x_n+\sqrt{16+x_n^2})+(3x_n+\sqrt{16+x_n^2})^2-16=0$

Suy ra

$$x_{n+1}=\frac{9x_n+\sqrt{16+x_n^2}\pm\sqrt{9(10x_n^2+16+6x_n\sqrt{16+x_n^2})-24x_n-8\sqrt{16+x_n^2}+128}}{8}$$

$\Rightarrow x_{n+1}=\dfrac{5x_n+3\sqrt{16+x_n^2}}{4}$ (do $x_{n+1}>x_n$)

Vậy ta thu được dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn điều kiện:

$x_1=3; x_{n+1}=\dfrac{5x_n+3\sqrt{16+x_n^2}}{4}, \forall n\geq 1$

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta dễ dàng chứng minh được:

$x_n=\dfrac{4^n-1}{2^{n-1}}, \forall n \geq 1$

Câu 3. (HV PKKQ)

Cho hàm số $f(x)$ liên tục, đơn điệu tăng và thỏa mãn điều kiện $f(x)>0, \forall x \in [a,b]$. Gọi $g(x)$ là hàm ngược của $f(x)$. Chứng minh rằng:

$$\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_{f(a)}^{f(b)}g(x)dx=bf(b)-af(a)$$

Đáp án. Xét hàm số $F(x)=xf(x)\Rightarrow F'(x)=f(x)+xf'(x)$

$\Rightarrow \int\limits_a^b F'(x)dx=F(x)\Big|_a^b=bf(b)-af(a)=\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_a^b xf'(x)dx \ \ (1)$

Ta chứng minh $\int\limits_a^b xf'(x)dx=\int\limits_{f(a)}^{f(b)}g(x)dx \ \ (2)$

Xét $I = \int\limits_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx$. Đặt $t = g(x) \Leftrightarrow x = f(t) \Rightarrow dx = f'(t)dt$.

Cho $\begin{cases} x = f(a) \Rightarrow t = g(f(a)) \\ x = f(b) \Rightarrow t = g(f(b)) = b \end{cases} \Rightarrow I = \int\limits_a^b tf'(t)dt = \int\limits_a^b xf'(x)dx \Rightarrow$ (2) được chứng minh

Từ (1) và (2) ta có $\int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx = bf(b) - af(a)$.

Câu 4. (HV PKKQ)

Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực không âm và không đồng thời bằng 0.

a) Chứng minh rằng phương trình:

$$x^n - a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - \cdots - a_{n-1}x - a_n = 0 \ \ (1)$$

có đúng một nghiệm dương duy nhất.

b) Giả sử R là nghiệm dương của phương trình (1) và

$$A = \sum_{j=1}^{n} a_j; B = \sum_{j=1}^{n} ja_j$$

Chứng minh rằng:

$$A^A \leq R^B$$

Đáp án. a) Do $x > 0$ nên ta có:

$(1) \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2} + \cdots + \dfrac{a_n}{x^n} = 1$

Mặt khác $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0, +\infty)$ và là hàm nghịch biến nên tồn tại duy nhất $R > 0$ sao cho: $f(R) = 1$

Vậy phương trình (1) có nghiệm dương duy nhất.

b) Đặt $c_i = \dfrac{a_j}{A} \Rightarrow \begin{cases} c_j \geq 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_j = 1 \end{cases}$

Do hàm số $y = -\ln x$ là hàm lõm trên khoảng $(0, +\infty)$ nên theo bất đẳng thức Jenxen ta có:

$\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \Big[-\ln \Big(\dfrac{A}{R^j} \Big) \Big] \geq -\ln \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \dfrac{A}{R^j} \Big) = -\ln[f(R)] = -\ln 1 = 0$

$\Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{n} (c_j \ln R^j - c_j \ln A) \geq 0 \Rightarrow \ln A \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \leq \ln R \sum\limits_{j=1}^{n} jc_j$

$\Rightarrow \dfrac{1}{A} \sum\limits_{j=1}^{n} a_i[\ln A] \leq \dfrac{1}{A} \sum\limits_{j=1}^{n} ja_j[\ln R]$ (do $c_j = \dfrac{a_j}{A}; A > 0$)

$\Rightarrow \ln(A^A) \leq \ln(R^B) \Rightarrow A^A \leq R^B$

Câu 5. (HV PKKQ)

a) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} f(x) \leq 4 + 2009x, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x+y) \leq f(x) + f(y) - 4, \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

b) Các hàm số $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục và thỏa mãn điều kiện:

$$f(g(x)) = g(f(x)), \forall x \in \mathbb{R}$$

Chứng minh rằng nếu phương trình $f(x) = g(x)$ không có nghiệm thực thì phương trình $f(f(x)) = g(g(x))$ cũng không có nghiệm thực.

Đáp án. a) Từ giả thiết $f(x+y) \leq f(x) + f(y) - 4$, cho $x = y = 0$, ta được:

$f(0) \leq 2f(0) - 4 \Rightarrow f(0) \geq 4$ (1)

Mặt khác từ giả thiết thứ nhất cho $x = 0$, ta có:

$f(0) \leq 4$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $f(0) = 4$.

Khi đó $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có:

$f(x) + f(-x) - 4 \geq f(x + (-x)) = f(0) = 4 \Rightarrow f(x) \geq 8 - f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$ (3)

Từ giả thiết thứ nhất ta có:

$f(x) \leq 4 + 2009x \Rightarrow f(-x) \leq 4 - 2009x \Rightarrow -f(-x) \geq 2009x - 4, \forall x \in \mathbb{R}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra:

$f(x) \geq 4 + 2009x, \forall x \in \mathbb{R}$

Kết hợp với giả thiết suy ra:

$f(x) = 4 + 2009x, \forall x \in \mathbb{R}$

Thử lại, ta thấy $f(x) = 4 + 2009x$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

Vậy $f(x) = 4 + 2009x, \forall x \in \mathbb{R}$ là hàm cần tìm.

b) Do phương trình $f(x) = g(x)$ không có nghiệm thực, nên hàm số:

$h(x) = f(x) - g(x)$

chỉ nhận hoặc giá trị dương, hoặc giá trị âm (suy ra từ tính liên tục của hàm số $h(x)$)

Không mất tính tổng quát giả sử: $h(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, ta có:

$f(f(x)) - g(g(x)) = f(f(x)) - g(f(x)) + f(g(x)) - g(g(x)) = h(f(x)) + h(g(x)) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy phương trình $f(f(x)) = g(g(x))$ không có nghiệm thực.

Bài 1. (HV An Ninh) Cho $f \in C[0,1]$ là hàm liên tục sao cho

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$.

Chứng minh rằng tồn tại điểm $\alpha \in (0,1)$ sao cho

$$f(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)dx$$

Đáp án. Xét hàm $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $x \in [0,1]$. Ta có $F(0) = 0$, $F'(x) = f(x)$ và

$$F(1) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x) = \int_0^1 xF'(x)dx$$

$$= xF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x)dx = F(1) - \int_0^1 F(x)dx$$

Suy ra $\int_0^1 F(x)dx = 0$.

Lại xét hàm $g(x) = e^{-x} \int_0^x F(t)dt$, $x \in [0,1]$. Ta có $g(0) = g(1) = 0$ và

$$g'(x) = -e^{-x}\int_0^x F(t)dt + e^{-x}F(x) = e^{-x}\Big[F(x) - \int_0^x F(t)dt\Big]$$

Theo định lý Rolle tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho $g'(c) = 0$.

Thế mà $e^{-c} \neq 0$, nên ta suy ra $F(c) - \int_0^c F(t)dt = 0$.

Tiếp theo xét hàm $G(x) = F(x) - \int_0^x F(t)dt$, $x \in [0,1]$. Ta có $G(0) = G(c) = 0$ và

$$G'(x) = F'(x) - F(x) = f(x) - \int_0^x f(t)dt$$

Theo định lý Rolle tồn tại điểm $\alpha \in (0,c) \subset (0,1)$ sao cho $G'(\alpha) = 0$, tức là

$$f(\alpha) = \int_0^\alpha f(t)dt = \int_0^\alpha f(x)dx$$

Bài 2. (HV An Ninh) Cho biết phương trình $x^2+px+q=0$ không có nghiệm thực.

Chứng tỏ rằng với mọi ma trận X thực, vuông, cấp n (n lẻ) ta đều có

$$X^2 + pX + qI_n \neq O_n$$

trong đó I_n là ma trận đơn vị cấp n và O_n là ma trận không cấp n .

Đáp án. Vì phương trình $x^2+px+q=0$ không có nghiệm thực, nên ta có $p^2 - 4q < 0$.

Giả sử phản chứng, tồn tại ma trận thực X thoả mãn $X^2 + pX + qI_n = O_n$. Khi đó

$$\begin{aligned}
(X + \varphi p2I_n)^2 &= (\varphi p^2 4 - 1)I_n = \varphi p^2 - 4q4I_n \\
\det{(X + \varphi p2I_n)}^2 &= \det[\varphi p^2 - 4q4I_n] \\
\left[\det{(X + \varphi p2I_n)}\right]^2 &= \varphi(p^2-4q)^n 4^n \det(I_n) = \varphi(p^2-4q)^n 4^n
\end{aligned}$$

Đẳng thức cuối cùng mâu thuẫn vì vế trái là số không âm, còn vế phải là số âm (n lẻ).

Vậy suy ra điều phải chứng minh.

Bài 3. (HV An Ninh) Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ khả tích sao cho $\int_0^1 xf(x)dx = 0$
.

Chứng minh rằng $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^2 dx \geqslant 4\Big[\int_0^1 f(x)dx\Big]^2$.

Đáp án.

Cách 1. Ta có

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (1 - \varphi 3x2 + \varphi 3x2) f(x)dx$$
$$= \int_0^1 (1 - \varphi 3x2) f(x)dx + \varphi 32 \int_0^1 x f(x)dx = \int_0^1 (1 - \varphi 3x2) f(x)dx$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz về tích phân

$$\Big[\int_a^b u(x)v(x)dx\Big]^2 \leqslant \int_a^b [u(x)]^2 dx . \int_a^b [v(x)]^2 dx$$

ta được

$$\Big[\int_0^1 f(x)dx\Big]^2 = \Big[\int_0^1 (1 - \varphi 3x2) f(x)dx\Big]^2 \leqslant \int_0^1 (1 - \varphi 3x2)^2 dx \int_0^1 [f(x)]^2 dx$$
$$= \int_0^1 (1 - 3x + \varphi 9x^2 4)dx \int_0^1 [f(x)]^2 dx = \varphi 14 \int_0^1 [f(x)]^2 dx$$

Suy ra bất đẳng thức cần phải chứng minh.

Dấu (=) xảy ra khi $f(x) = 1 - \varphi 3x2$.

Cách 2. Xét hàm $g(x) = 6x - 4$, ta có

$$\int_0^1 x g(x)dx = \int_0^1 (6x^2 - 4x)dx = (2x^3 - 2x^2)\Big|_0^1 = 0$$
$$\int_0^1 [g(x)]^2 dx = \int_0^1 (6x - 4)^2 dx = \int_0^1 (36x^2 - 48x + 16)dx$$
$$= (12x^3 - 24x^2 + 16x)\Big|_0^1 = 4$$

Đặt $\alpha = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$, ta có

$$0 \leqslant \int_0^1 [f(x) + \alpha g(x)]^2 dx = \int_0^1 [f(x)]^2 dx + 2\alpha \int_0^1 f(x)g(x)dx + \alpha^2 \int_0^1 [g(x)]^2 dx$$
$$= \int_0^1 [f(x)]^2 dx + 2\alpha \int_0^1 (6x - 4) f(x)dx + 4\alpha^2$$
$$= \int_0^1 [f(x)]^2 dx + 12\alpha \int_0^1 x f(x)dx - 8\alpha \int_0^1 f(x)dx + 4\alpha^2 = \int_0^1 [f(x)]^2 dx - 4\alpha^2$$

Suy ra $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^2 dx \geqslant 4\alpha^2 = 4\Big[\int_0^1 f(x)dx\Big]^2$.

Cách 3. Nếu $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$, thì hiển nhiên bất đẳng thức cần chứng minh đúng!

Giả sử $\int_0^1 f(x)dx = \alpha \neq 0$, xét hàm $g(x) = 4 - 6x$. Ta có

$$\int_0^1 xg(x)dx = \int_0^1 x(4-6x)dx = \int_0^1 (4x - 6x^2)dx = (2x^2 - 2x^3)\Big|_0^1 = 0$$

$$\int_0^1 [g(x)]^2 dx = \int_0^1 (4-6x)^2 dx = \int_0^1 (16 - 48x + 36x^2)dx = (16x - 24x^2 + 12x^3)\Big|_0^1 = 4$$

Lại xét hàm $h(x) = \varphi 1\alpha f(x) - g(x)$, ta thấy

$$\begin{aligned}0 \leqslant \int_0^1 [h(x)]^2 dx &= \int_0^1 [\varphi 1\alpha f(x) - g(x)]^2 dx\\
&= \varphi 1\alpha^2 \int_0^1 [f(x)]^2 dx - \varphi 2\alpha \int_0^1 f(x)g(x)dx + \int_0^1 [g(x)]^2 dx\\
&= \varphi 1\alpha^2 \int_0^1 [f(x)]^2 dx - \varphi 2\alpha \int_0^1 (4-6x)f(x)dx + 4\\
&= \varphi 1\alpha^2 \int_0^1 [f(x)]^2 dx - \varphi 8\alpha \int_0^1 f(x)dx + \varphi 12\alpha \int_0^1 xf(x)dx + 4\\
&= \varphi 1\alpha^2 \int_0^1 [f(x)]^2 dx - 4\end{aligned}$$

Suy ra $\int_0^1 [f(x)]^2 dx \geqslant 4\alpha^2 = 4\Big[\int_0^1 f(x)dx\Big]^2$.

bf Nhận xét. Thực ra Cách 3. là một kiểu trình bầy khác của Cách 2.

Cách 4. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz về tích phân

$$\int_a^b [u(x)]^2 dx . \int_a^b [v(x)]^2 dx \geqslant \Big[\int_a^b u(x)v(x)dx\Big]^2$$

và đặt $\alpha = \int_0^1 f(x)dx$, ta có $\varphi orallm \in \mathbb{R}$ thì

$$\begin{aligned}\int_0^1 1^2 dx \int_0^1 [f(x) + mx]^2 dx &\geqslant \Big[\int_0^1 1[f(x) + mx]dx\Big]^2\\
\int_0^1 [f(x) + mx]^2 dx &\geqslant \Big[\int_0^1 f(x)dx + m\int_0^1 xdx\Big]^2\\
\int_0^1 ([f(x)]^2 + 2mxf(x) + m^2x^2)dx &\geqslant \Big[\int_0^1 f(x)dx + \varphi m2\Big]^2\\
\int_0^1 [f(x)]^2 dx + 2m\int_0^1 xf(x)dx + m^2\int_0^1 x^2 dx &\geqslant \Big[\int_0^1 f(x)dx\Big]^2 + m\int_0^1 f(x)dx + \varphi m^2 4\\
\int_0^1 [f(x)]^2 dx &\geqslant \Big[\int_0^1 f(x)dx\Big]^2 + m\int_0^1 f(x)dx - \varphi m^2 12\\
\int_0^1 [f(x)]^2 dx &\geqslant \alpha^2 + m\alpha - \varphi m^2 12\\
\int_0^1 [f(x)]^2 dx &\geqslant 4\alpha^2 - \Big(\alpha\sqrt{3} - \varphi m2\sqrt{3}\Big)^2 \geqslant 4\alpha^2\end{aligned}$$

Vậy có bất đẳng thức cần phải chứng minh.

Bài 4. (HV An Ninh) a) Cho A, B là các ma trận thực, vuông, cùng cấp n . Chứng minh rằng

$$\det(I_n - AB) = \det(I_n - BA) \quad , \quad I_n\ \theta lmatrn\O nvcp\ n$$

b) Cho A là ma trận thực cấp 2010×2009 và B là ma trận thực cấp 2009×2010 .

Chứng minh rằng

$$\det(AB - I_{2010}) + \det(BA - I_{2009}) = 0$$

Đáp án. a) <u>Cách 1.</u> Trước tiên giải sử B khả nghịch. Khi đó ta có

$$I_n - AB = B^{-1}B - B^{-1}BAB = B^{-1}(I_n - BA)B$$

nên suy ra

$$\begin{aligned}\det(I_n - AB) &= \det(B^{-1}(I_n - BA)B) \\ &= \det(B^{-1})\det(I_n - BA)\det(B) = \det(I_n - BA)\end{aligned}$$

Bây giờ giả sử B không khả nghịch. Ta xét ma trận $B_x = xI_n + B$, $x \in \mathbb{R}$.

Rõ ràng rằng $\det(B_x)$ là một đa thức bậc n của x . Đa thức này chỉ có thể có nhiều nhất n nghiệm thực. Vậy có vô số điểm $x \in \mathbb{R}$ để $\det(B_x) \neq 0$, tức là B_x khả nghịch.

Lúc đó theo chứng minh trên thì $\det(I_n - AB_x) = \det(I_n - B_xA)$.

Lại có $\det(I_n - AB_x)$ và $\det(I_n - B_xA)$ là hai đa thức bậc $\leqslant n$ của x . Giá trị của hai đa thức này bằng nhau tại vô số điểm x mà $\det(B_x) \neq 0$, nên hai đa thức này phải hoàn toàn trùng nhau (các hệ số tương ứng của hai đa thức này bằng nhau). Vậy giá trị của hai đa thức này bằng nhau tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

Khi $x = 0$ thì $B_0 = B$, nên ta có $\det(I_n - AB) = \det(I_n - BA)$.

Cách 2. Xét các ma trận khối $X = \begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} I_n & -B \\ O_n & I_n \end{pmatrix}$, trong đó O_n là ma trận không cấp n . Ta có

$$XY = \begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & -B \\ O_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ A & I_n - AB \end{pmatrix} = Z$$
$$\det(Z) = \det(XY) = \det(X)\det(Y)$$

Rõ ràng Y là ma trận tam giác và $\det(Y) = 1$. Khai triển Laplace theo n hàng đầu tiên ta được $\det(Z) = \det(I_n)\det(I_n - AB) = \det(I_n - AB)$.

Do đó $\det(X) = \det(I_n - AB)$.

Thay đổi vai trò của A và B ta có $\det(I_n - BA) = \det\begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \det(X^t) = \det(X)$, trong đó X^t là ma trận chuyển vị của ma trận X .

Như vậy ta suy ra $\det(I_n - AB) = \det(I_n - BA)$.

b) Ta chứng minh cho ma trận A cấp $(n+1)\times n$ và ma trận B cấp $n\times(n+1)$.

Bổ sung vào ma trận A một cột đứng ở vị trí cuối cùng gồm toàn các phần tử bằng 0 được ma trận vuông A' cấp $n+1$.

Bổ sung vào ma trận B một hàng nằm ở vị trí cuối cùng gồm toàn các phần tử bằng 0 được ma trận vuông B' cấp $n+1$.

Dễ dàng thấy rằng

$$A'B' = AB \quad ; \quad B'A' = \begin{pmatrix} & & 0 \\ BA & & \vdots \\ 0\dots 0 & & 0 \end{pmatrix} \ , \ I_{n+1} - B'A' = \begin{pmatrix} & & 0 \\ I_n - BA & & \vdots \\ 0\dots 0 & & 1 \end{pmatrix} = C$$

Khi đó $\det(I_{n+1} - A'B') = \det(I_{n+1} - AB) = (-1)^{n+1}\det(AB - I_{n+1})$

và $\det(I_{n+1} - B'A') = \det(C) = \det(I_n - BA) = (-1)^n \det(BA - I_n)$

(lưu ý rằng ta khai triển Laplace $\det(C)$ theo hàng cuối cùng hoặc cột cuối cùng).

Theo phần a) ta có $\det(I_{n+1} - A'B') = \det(I_{n+1} - B'A')$, nên suy ra

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1}\det(AB - I_{n+1}) &= (-1)^n \det(BA - I_n) \\ (-1)^{2n}\det(AB - I_{n+1}) &= (-1)^{2n-1}\det(BA - I_n) \\ \det(AB - I_{n+1}) &= -\det(BA - I_n) \end{aligned}$$

Vậy ta có $\det(AB - I_{n+1}) + \det(BA - I_n) = 0$.

Nói riêng ta có $\det(AB - I_{2010}) + \det(BA - I_{2009}) = 0$ với $A_{2010\times 2009}$ và $B_{2009\times 2010}$ đã cho ở đề bài.

Câu 1. (HV Ngân Hàng) Cho hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện:

$f(2009) \neq f(2010)$

$f(x+y) = f(x)f(y) - f(xy) + 1$ với mọi cặp số hữu tỷ (x,y)

Chứng minh rằng $f(-\dfrac{2009}{2010}) = \dfrac{1}{2010}$

Đáp án. Từ điều kiện $f(x+y) = f(x)f(y) - f(xy) + 1$ (1) $\forall$cặp (x,y) hữu tỷ,

cho $x = y = 0$ ta có $[f(0)-1]^2 = 0$, nên $f(0) = 1$ (2) ,

tiếp theo cho $x = 1, y = -1$ ta có $f(0) = f(1)f(-1) - f(-1) + 1$

và do (2) ta được $f(-1)[f(1)-1] = 0$.

Đến đây có hai khả năng: I) $f(1) = 1$, hoặc II) $f(-1) = 0$.

Với khả năng I) $f(1) = 1$, trong (1) ta cho $y = 1$

thì được $f(x+1) = f(x)f(1) - f(x) + 1 = f(x) - f(x) + 1 = 1$

dẫn tới $f(2009) = f(2010) = 1$, trái với giả thiết $f(2009) \neq f(2010)$.

Vậy chỉ còn khả năng II) $f(-1) = 0$, trong (1) cho $x = y = -1$ ta được

$f(-2)=[f(-1)]^2-f(1)+1$, hay $f(-2)=1-f(1)$ (3)

trong (1) lại cho $x=-2, y=1$ ta được $f(-1)=f(-2)f(1)-f(-2)+1$

hay $0=f(-2)f(1)-f(-2)+1$ và do (3) thì $0=f(-2)f(1)+f(1)$

hay $0=f(1)[1+f(-2)]$.

Đến đây có hai trường hợp: A) $f(1)=0$, hoặc B) $f(-2)=-1$.

Với trường hợp A) $f(1)=0$, trong (1) cho $y=1$ ta được

$f(x+1)=f(x)f(1)-f(x)+1=1-f(x)$, suy ra $f(x+2)=f(x)$ (4) .

Trong (4) cho $x=0$ và chú ý đến (2) ta có $f(2)=f(0)=1$.

Từ đó trong (1) lại cho $x=2, y=\frac{1}{2}$ ta được

$f(2+\frac{1}{2})=f(2)f(\frac{1}{2})-f(1)+1=f(\frac{1}{2})-f(1)+1=f(\frac{1}{2})+1$,

điều này mâu thuẫn với việc trong (4) ta cho $x=\frac{1}{2}$ thì được $f(\frac{1}{2}+2)=f(\frac{1}{2})$

.

Vậy chỉ còn trường hợp B) $f(-2)=-1$, do (3) ta được $f(1)=2$.

Bây giờ trong (1) cho $y=1$ thì dẫn đến

$f(x+1)=f(x)f(1)-f(x)+1=2f(x)-f(x)+1=1+f(x)$ (5) .

Từ đó với mọi số nguyên k ta có

$f(k)=1+f(k-1)=2+f(k-2)=...=k-1+f(1)=1+k$ (6) .

Trong (1) cho $x=m, y=\frac{1}{m}$ (với số nguyên $m\neq 0$) ta được

$f(m+\frac{1}{m})=f(m)f(\frac{1}{m})-f(1)+1=(1+m)f(\frac{1}{m})-1$

Từ (5) ta còn có

$$\begin{aligned}
f(k+\frac{1}{m}) &= f(k-1+\frac{1}{m}+1)=1+f(k-1+\frac{1}{m})\\
f(k-1+\frac{1}{m}) &= f(k-2+\frac{1}{m}+1)=1+f(k-2+\frac{1}{m})\\
...... &= ......\\
f(2+\frac{1}{m}) &= f(1+\frac{1}{m}+1)=1+f(1+\frac{1}{m})\\
f(1+\frac{1}{m}) &= f(\frac{1}{m}+1)=1+f(\frac{1}{m})
\end{aligned}$$

và cộng các đẳng thức này ta được $f(k+\frac{1}{m})=k+f(\frac{1}{m})$.

Suy ra $f(m+\frac{1}{m})=m+f(\frac{1}{m})$, dẫn tới $(1+m)f(\frac{1}{m})-1=m+f(\frac{1}{m})$,

nên ta được $f(\frac{1}{m})=1+\frac{1}{m}$ (7) .

Theo (1) ta lại có $f(k+\frac{1}{m})=f(k)f(\frac{1}{m})-f(\frac{k}{m})+1$, do đó

$k+(1+\frac{1}{m})=(1+k)(1+\frac{1}{m})-f(\frac{k}{m})+1$, nên $f(\frac{k}{m})=1+\frac{k}{m}$ (8) .

Từ $(6),(7),(8)$ ta suy ra với mọi số hữu tỷ x thì $f(x)=1+x$.

Do đó $f(-\dfrac{2009}{2010})=1-\dfrac{2009}{2010}=\dfrac{1}{2010}$.

Câu 2. (HV Ngân Hàng) Cho hai dãy số dương $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ thoả mãn

$$x_{n+1}\geqslant \frac{x_n+y_n}{2}\ ,\ y_{n+1}\geqslant \sqrt{\frac{x_n^2+y_n^2}{2}}\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

1) Chứng minh rằng các dãy $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ là những dãy đơn điệu tăng.

2) Chứng minh rằng nếu dãy $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn hữu hạn, thì giới hạn của các dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tồn tại và bằng nhau.

Đáp án. Đặt $s_n = x_n + y_n$ và $p_n = x_n y_n$.

Sử dụng các bất đẳng thức $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geqslant \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ với các số dương a, b ta được

$$x_{n+1} \geqslant \frac{x_n + y_n}{2} = \frac{s_n}{2} \geqslant \sqrt{p_n} \quad , \quad y_{n+1} \geqslant \sqrt{\frac{x_n^2 + y_n^2}{2}} \geqslant \frac{x_n + y_n}{2} = \frac{s_n}{2} \geqslant \sqrt{p_n}$$

Cộng từng vế và nhân từng vế các bất đẳng thức trên ta suy ra

$$s_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} \geqslant s_n \quad , \quad p_{n+1} = x_{n+1} y_{n+1} \geqslant \frac{s_n^2}{4} \geqslant p_n$$

Như vậy các dãy $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ là những dãy đơn điệu tăng.

2) Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, $0 < s < +\infty$.

Do $p_n \leqslant \dfrac{s_n^2}{4}$, mà $s_n \nearrow s\ (n \to \infty)$, nên $p_n \leqslant \dfrac{s^2}{4}$.

Dãy $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ đơn điệu tăng và bị chặn trên, nên tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$, $0 < p \leqslant \dfrac{s^2}{4}$.

Mặt khác, từ $p_{n+1} \geqslant \dfrac{s_n^2}{4}$ ta suy ra $p = \lim\limits_{n\to\infty} p_{n+1} \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{s_n^2}{4} = \dfrac{s^2}{4}$.

Do đó phải có $p = \dfrac{s^2}{4}$, hay là $s^2 = 4p$.

Từ $x_n + y_n = s_n$, $x_n y_n = p_n$ và bất đẳng thức $\dfrac{s_n^2}{4} \geqslant p_n$ (hay $s_n^2 \geqslant 4p_n$) , sử dụng định lý Viete ta suy ra x_n và y_n là hai nghiệm của phương trình $t^2 - s_n t + p_n = 0$.

Hai nghiệm của phương trình đó là $\frac{1}{2}(s_n \pm \sqrt{s_n^2 - 4p_n})$.

Từ đây suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \dfrac{s}{2}$.

Câu 3. (HV Ngân Hàng) Cho A là ma trận thực, vuông, cấp n có $\operatorname{rank}(A) = r \leqslant n$.

Chứng minh rằng có thể viết A thành tổng của r ma trận mà mỗi ma trận đó đều có hạng bằng 1 .

Đáp án. Ta viết $A = (A_1, A_2, ..., A_r, A_{r+1}, ..., A_n)$, trong đó A_j là vector cột thứ j của A . Vì $\operatorname{rank}(A) = r$ nên A có r vector cột độc lập tuyến tính, không giảm tổng quát ta coi đó là r cột đầu tiên. Khi ấy các cột A_j $(r+1 \leqslant j \leqslant n)$ biểu diễn tuyến tính được qua r cột đầu tiên

$$A_j = \alpha_{j1} A_1 + \alpha_{j2} A_2 + ... + \alpha_{jr} A_r \quad (r+1 \leqslant j \leqslant n)$$

với các hệ số $\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, ..., \alpha_{jr}$ không đồng nhất bằng 0 .

Từ đó ta có thể viết

$$
\begin{aligned}
A = & (A_1, O, O, ..., O, \alpha_{r+1,1}A_1, \alpha_{r+2,1}A_1, ..., \alpha_{n1}A_1) \\
& + (O, A_2, O, ..., O, \alpha_{r+1,2}A_2, \alpha_{r+2,2}A_2, ..., \alpha_{n2}A_2) \\
& + (O, O, A_3, , ..., O, \alpha_{r+1,3}A_3, \alpha_{r+2,3}A_3, ..., \alpha_{n3}A_3) \\
& + ... \\
& + (O, O, O, ..., A_r, \alpha_{r+1,r}A_r, \alpha_{r+2,r}A_r, ..., \alpha_{nr}A_r) \\
= & B_1 + B_2 + B_3 + ... + B_r
\end{aligned}
$$

trong đó O là vector cột gồm toàn các phần tử bằng 0 .

Rõ ràng là các ma trận $B_1, B_2, B_3, ..., B_r$ là các ma trận mà mỗi ma trận đó đều có hạng bằng 1 . **Câu 1. (ĐH Ngoại thương)**

Cho dãy $S_n = \dfrac{6}{(9-4)(3-2)} + \dfrac{36}{(27-8)(9-4)} + \cdots + \dfrac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)}$.

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Đáp án. Ta có

$S_n = 6\Big(\dfrac{3^1-2^1}{9-4} - \dfrac{3^0-2^0}{3-2}\Big) + 6\Big(\dfrac{3^2-2^2}{27-8} - \dfrac{3^1-2^1}{9-4}\Big) + \cdots + 6\Big(\dfrac{3^n-2^n}{3^{n+1}-2^{n+1}} - \dfrac{3^{n-1}-2^{n-1}}{3^n-2^n}\Big) = 6\dfrac{3^n-2^n}{3^{n+1}-2^{n+1}}$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 6\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{3-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n 2} = 2$

Câu2. (ĐH Ngoại thương)

Cho $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0,1], f(0) = 0; f(1) = 1$. Chứng minh rằng với mọi $k_1, k_2 > 0$ tồn tại $x_1, x_2 : 0 \le x_1 < x_2 \le 1$ sao cho

$$\frac{k_1}{f'(x_1)} + \frac{k_2}{f'(x_2)} = k_1 + k_2 \ \ (*)$$

Đáp án. Chia hai vế của (*) cho $k_1 + k_2$ ta được

$$\frac{k_1}{(k_1+k_2)f'(x_1)} + \frac{k_2}{(k_1+k_2)f'(x_2)} = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{f'(x_1)} + \frac{1-\lambda}{f'(x_2)} = 1; \lambda = \frac{k_1}{k_1+k_2} \in (0,1)$$

Với c chọn sau mà $0 < c < 1$.

Theo định lý Lagrange tồn tại $x_1 \in (0, c); x_2 \in (c, 1)$ thỏa mãn

$$f'(x_1) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(c)}{c}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = \frac{1 - f(c)}{1 - c}$$

Khi đó (*) trở thành $\dfrac{\lambda}{f(c)} + \dfrac{(1-\lambda)(1-c)}{1-f(c)} = 1$

Do hàm $f(x)$ liên tục trên $(0,1)$ nên tồn tại $c \in (0,1)$ để $f(c) = \lambda$.

Câu 3. (ĐH Ngoại thương)

Cho hàm $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ khả tích thỏa mãn điều kiện: $\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 xf(x)dx = 1.$

Chứng minh rằng tồn tại vô số hàm f thỏa mãn điều kiện trên và $\int\limits_0^1 f^2(x)dx \geq 3.$

Có thể thay 3 bởi số lớn hơn hay không? Tại sao?

Đáp án. Với mỗi số tự nhiên n xét hàm số $f(x) = x^n + + b$. Khi đó điều kiện của bài toán tương đương với hệ $\begin{cases} \dfrac{a}{2} + b = \dfrac{-1}{n+1} \\ \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} = \dfrac{-1}{n+2} \end{cases}$

Dễ thấy hệ này luôn có nghiệm với mọi số tự nhiên n nên tồn tại vô số hàm f thỏa mãn điều kiện trên.

Với mọi hàm f thỏa mãn điều kiện trên, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\int\limits_0^1 f^2(x)dx \int\limits_0^1 x^2dx \geq \left(\int\limits_0^1 xf(x)dx\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^1 f^2(x)dx \geq 3.$$

Có thể thay 3 bởi số lớn hơn.

Thật vậy

$\int\limits_0^1 (f(x)+ax+b)^2dx \geq 0$ với a, b là các số thực nào đó mà ta sẽ tìm.

Suy ra $\int\limits_0^1 f^2(x)dx \geq \dfrac{-a^2}{3} - b^2 - 2a - 2b - ab$

Ta quan tâm tới những số a, b sao cho biểu thức

$$g(a,b) = \frac{-a^2}{3} - b^2 - 2a - 2b = \frac{-a^2}{3} - (b+2)x - 2b - b^2$$

đạt giá trị lớn nhất. Cố định b thì $g(a,b)$ có đồ thị là parabol bề lõm quay xuống dưới nên $g(a,b)$ đạt giá trị lớn nhất tại $a = -\dfrac{3(b+2)}{2}$. Lúc đó, giá trị lớn nhất của $g(a,b)$ là $g_{\max} = 4 - \dfrac{1}{4}(b-2)^2 \leq 4$ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = 2$ và lúc đó $a = -6$. Do đó với mọi hàm số f thỏa mãn điều kiện ta luôn có $\int\limits_0^1 f^2(x)dx \geq 4, \forall f.$ Và hơn nữa $f(x) = 6x - 2$ thì dấu bằng xảy ra.

Câu 4. (ĐH Ngoại thương)

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[0,1]$, khả vi liên tục, $f(0) = 0$ và $f'(x)$ nhận giá trị trên $(0,1]$. Chứng minh rằng $\left(\int\limits_0^1 f(x)dx\right)^2 \geq \int\limits_0^1 f^3(x)dx$. Cho một ví dụ ở đó xảy ra đẳng thức.

Đáp án. Đặt $g(t) = \left(\int\limits_0^t f(x)dx\right)^2 - \int\limits_0^t f^3(x)dx$

Ta sẽ chứng minh $g(t) \geq 0$ theo phương pháp đạo hàm. Trước hết ta có $g(0) = 0$

$$g'(t) = 2f(t)\int_0^t f(x)dx - f^3(t) = f(t)\Big[2\int_0^t f(x)dx - f^2(t)\Big]$$

Bởi vì $f(t) \geq 0, f(0) = 0$ và $f'(t) > 0$ nên chỉ cần chứng minh

$$h(t) = 2\int_0^t f(x)dx - f^2(t) \geq 0$$

Thật vậy $h(0) = 0$, lấy đạo hàm ta có

$$h'(t) = 2f(t) - 2f(t)f'(t) = 2f(t)(1 - f'(t)) \geq 0$$

Vậy $h(t) \geq 0$. Suy ra $g(t)$ là hàm tăng nên: $g(1) \geq g(0) = 0$ (đpcm).

Lấy ví dụ $f(x) = x$.

Câu 1. (ĐH Đồng Tháp)

Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định như sau:

$$a_1 = a, a_2 = b, a_{n+1} = pa_{n-1} + (1-p)a_n \text{ với } n = 2, 3, \ldots$$

Với điều kiện nào của a, b, p thì dãy số trên hội tụ.

Giải. Ta có $a_{n+1} - a_n = -p(a_n - a_{n-1})$

Suy ra
$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a + (b-a) - p(b-a) - p(a_3 - a_2) - \cdots - p(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ &= a + (b-a)\big(1 - p + p^2 + \cdots + (-1)^n p^{n-2}\big) \text{ với } n = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Nếu $a = b$ thì dãy $\{a_n\}$ hội tụ và có giới hạn là a.

Nếu $a \neq b$ thì dãy $\{a_n\}$ hội tụ với $|p| < 1$ và có giới hạn là $a + \dfrac{b-a}{1+p}$

Câu 2. (ĐH Đồng Tháp)

Cho f là hàm khả vi liên tục cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1$.

Tính giới hạn sau $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(f\Big(\dfrac{2010}{\sqrt{x}}\Big)\Big)^x$

Giải. Đặt $g(x) = c^{-x}f(x)$. Do $f(x) = 0$ có ít nhất 3 ngiệm trong $[a, b]$ nên $g(x) = 0$ có ít nhất 3 nghiệm trong $[a, b]$. Theo định lý Rolle, ta có $g'(x) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm trong $[-1, 1]$. Lại theo định lý Rolle, ta có $g''(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong $[a, b]$. Suy ra $f(x) + f''(x) = 2f'(x)$ có ít nhất một nghiệm trong $[a, b]$.

Câu 3. (ĐH Đồng Tháp)

Cho hàm $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ thuộc lớp $C^2(\mathbb{R})$.

(a) Nếu phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất ba nghiệm trong $[a, b]$ nào đó thì phương trình $f(x) + f''(x) = 2f'(x)$ có ít nhất một nghiệm trong $[a, b]$ đó.

(b) Giả sử $(f(0))^2 + (f'(0))^2 = 4$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x_0) + f''(x_0) = 0$$

Giải. Đặt $g(x) = c^{-x}f(x)$. Do $f(x) = 0$ có ít nhất 3 ngiệm trong $[a, b]$ nên $g(x) = 0$ có ít nhất 3 nghiệm trong $[a, b]$. Theo định lý Rolle, ta có $g'(x) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm trong $[-1,1]$. Lại theo định lý Rolle, ta có $g''(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm trong $[a,b]$. Suy ra $f(x)+f''(x)=2f'(x)$ có ít nhất một nghiệm trong $[a,b]$.

Câu 4. (ĐH Đồng Tháp)

Tìm tất cả các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(0)=f(2)=1, |f'(x)|\le 1 \text{ khi } 0\le x\le 2$$

Chứng minh rằng $\int\limits_0^2 f(x)dx>1$

Giải. Lấy $x\in(0,2)$. Theo định ký Lagrange, có $0<\theta_1<x$ sao cho

$$f(x)-f(0)=xf'(\theta_1)$$

Suy ra $f(x)=f(0)+xf'(\theta_1)=1+xf'(\theta_1)$ (1)

Tương tự, có $x<\theta_2<2$ sao cho

$$f(2)-f(x)=(2-x)f'(\theta_2)$$

Suy ra $f(x)=f(2)+(x-2)f'(\theta_2)=1+(x-2)f'(\theta_2)$ (2)

Do $|f'(x)|\le 1$ nên $f'(\theta_1)\ge -1$ và do $x>0$ nên từ (1) ta có $f(x)\ge 1-x$ (3)

Tương tự, từ (2) ta có $f(x)\ge x-1$ (4)

Từ (3) và (4) ta có

$$\int\limits_0^1 f(x)dx\ge\int\limits_0^1(1-x)dx=\frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\int\limits_1^2 f(x)dx\ge\int\limits_1^2(x-1)dx=\frac{1}{2} \quad (6)$$

Dấu "=" trong (5) và (6) xảy ra khi $f(x)=\begin{cases}1-x & \text{khi } 0\le x\le 1\\ x-1 & \text{khi } 1\le x\le 2\end{cases}$. Tuy nhiên hàm này không có đạo hàm tại $x=1$. Do đó, hoặc (5) hoặc (6) phải xảy ra bất đẳng thức. Tức là ta có $\int\limits_0^2 f(x)dx>1$.

Câu 5. (ĐH Đồng Tháp)

Tìm tất cả các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y)=2010^x f(y)+2010^y f(x),\forall x,y\in\mathbb{R}$$

Giải. Ta có $f(x+y)=2010^x f(y)+2010^y f(x)$

$\Leftrightarrow 2010^{-(x+y)}f(x+y)=2010^{-y}f(y)+2010^{-x}f(x)$

Đặt $g(x)=2010^{-x}f(x)$. Ta có $g(x+y)=g(x)+g(y)\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Đây là phương trình hàm Cauchy, có nghiệm là $g(x)=ax$. Suy ra $f(x)=ax2010^x$.

Thử lại, ta thấy thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 1. (ĐH Nông nghiệp HN)

Cho dãy số thực dương $x_0,x_1,\dots,x_{2011}$ thỏa mãn $x_0=x_{2011}$ và $x_{i-1}+\dfrac{2}{x_{i-1}}=2x_i+\dfrac{1}{x_i}\ \forall i=1,\dots,2011$. Tìm giá trị lớn nhất có thể có của x_0.

Đáp án. Từ điều kiện xác định dãy ta có:

$$2x_i^2x_{i-1} - (x_{i-1}^2 + 2)x_i + x_i = 0$$
$$\Leftrightarrow (x_ix_{i-1} - 1)(2x_i - x_{i-1}) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_i = \dfrac{1}{x_{i-1}} \\ x_i = \dfrac{1}{2}x_{i-1} \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Ta đi chứng minh $x_i = 2^k x_0^s \ \ \forall i \geq 0$, ở đó k_i là số nguyên thỏa mãn $|k_i| \leq i$ và $\varepsilon_i = (-1)^{k+1}$.

Thật vậy, dễ thấy điều khẳng định đúng với $i = 0 : k_0 = 0, \varepsilon_0 = 1$.

Giả sử khẳng định đúng tới $i - 1$. Từ (2.1) ta có:

$$\left[\begin{array}{l} x_i = \dfrac{1}{x_{i-1}} = (2^{k_{i-1}}x_0^{\varepsilon_{i-1}})^{-1} \Rightarrow k_i = -k_{i-1} - 1, \varepsilon_i = -\varepsilon_{i-1} \\ x_i = \dfrac{1}{2}x_{i-1} = 2^{-1}2^{k_{i-1}}x_0^{\varepsilon_{i-1}} = 2^{k_{i-1}-1}x_0^{\varepsilon_{i-1}} \Rightarrow k_i = k_{i-1} - 1, \varepsilon_i = \varepsilon_{i-1} \end{array}\right.$$

Rõ ràng trong mỗi trường hợp trên ta luôn có $|k_i| \leq i$ và $\varepsilon_i = (-1)^{k+1}$.

Từ đó khẳng định được chứng minh.

Theo đó ta có $x_{2011} = 2^{k_{2011}}x_0^{\varepsilon_{2011}} = 2^k x_0^s$ ở đó $k = k_{2011}, \varepsilon = \varepsilon_{2011}$.

Câu 2. (ĐH Nông nghiệp HN)

Giả sử $f(x)$ là hàm liên tục trên $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sao cho tồn tại $c \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ để $f(x) > 0 \ \ \forall x \in (0, c)$ và $f(x) < 0 \ \ \forall x \in (c, \dfrac{\pi}{2})$. Chứng minh rằng

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx\right)^2 + \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx\right)^2 > 0$$

Đáp án. Giả sử ngược lại, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx = 0$

$\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)[k\cos x + \sin x]dx = 0, \forall$ hằng số k.

Đặt $k = \tan\alpha, \alpha$ chọn sau, ta được

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)[\sin\alpha\cos x + \cos\alpha\sin x]dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(x + \alpha)dx = 0$

Bây giờ ta chọn $\alpha = -c$, khi đó với $0 < x < c \Rightarrow f(x) > 0$ và $\sin(x - c) < 0; c < x < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) < 0$ và $\sin(x - c) > 0$.

Vậy $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(x + \alpha)dx = \int\limits_0^{c} f(x)\sin(x + \alpha)dx + \int\limits_c^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(x + \alpha)dx < 0$, vô lí.

Mâu thuẫn này chứng minh khẳng định.

Câu 3. (ĐH Nông nghiệp HN)

Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi đến cấp 2 sao cho có thể tìm được hàm $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f(x) + f''(x) = -xg(x)f'(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm bị chặn.

Đáp án. Nhân hai vế của đẳng thức đã cho với $2f'(x)$ ta được

$$2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) = -xg(x)(f'(x))^2 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Xét hàm $h(x) = f^2(x) + (f'(x))^2$, ta có: $h'(x) = 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x)$.

Suy ra $h'(x) = -xg(x)(f'(x))^2$.

Do $g(x) > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có $h'(x) > 0 \ \ \forall x > 0$ và $h'(x) < 0 \ \ \forall x < 0$. Từ đó giá trị lớn nhất của $h(x)$ trên miền xác định là $h(0)$. Tức là ta có:

$0 \le f^2(x) \le f^2(x) + (f'(x))^2 = h(x) \le h(0)$. Suy ra $f(x)$ bị chặn.

Câu 4. (ĐH Nông nghiệp HN)(Sinh viên chọn một trong hai câu)

a) Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số thực có n nghiệm thực phân biệt lớn hơn 1. Xét đa thức $Q(x) = (x^2+1)P(x)P'(x) + x[(P(x))^2 + (P'(x))^2]$.

Chứng minh rằng $Q(x)$ có ít nhất $2n-1$ nghiệm thực phân biệt.

b) Cho f liên tục trên $[a,b]$ thỏa mãn: $\int\limits_a^b x^n f(n)dx = 0 \ \ \forall n \le N$. Chứng minh rằng f có ít nhất $N+1$ không điểm trên $[a,b]$.

Đáp án. a) Từ cách xác định $Q(x)$ ta có

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x^2+1)P(x)P'(x) + x[(P(x))^2 + (P'(x))^2] \\ &= [P'(x) + xP(x)][xP'(x) + P(x)] \end{aligned}$$

Lại dễ thấy $P'(x) + xP(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}}P(x))'$

$xP'(x) + P(x) = (xP(x))'$

Gọi các nghiệm của $P(x)$ là $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Từ cách viết trên, theo định lý Rolle, $P'(x) + xP(x)$ có $n-1$ nghiệm b_i thỏa mãn $1 < a_1 < b_1 < a_2 < \cdots < b_{n-1} < a_n$, và $xP'(x) + P(x)$ có n nghiệm c_j thỏa mãn $0 < c_1 < a_1 < c_2 < a_2 < \cdots < c_n < a_n$.

Nếu $b_i \neq c_{i+1} \ \ \forall i$ thì ta có ngay điều phải chứng minh.

Giả sử tồn tại i sao cho $b_i = c_{i+1} = r$. Thế thì

$$P'(r) + rP(r) = 0 = rP'(r) + P(r)$$

Từ đó $P'(r) = -rP(r)$, thay vào đẳng thức thứ hai ta được $(r^2-1)P(r) = 0$. Mặt khác $r = b_i > 1$ suy ra $P(r) = 0$. Nhưng lại có $a_i < r < a_{i+1}$. Điều này mâu thuẫn.

b) Từ giả thiết suy ra $\int\limits_a^b p(x)f(x)dx = 0$ với mọi đa thức $p(x)$ mà $\deg p(x) \le N \ \ (*)$

Dễ thấy $\exists x_0 \in [a,b]$ sao cho $f(x_0) = 0$. Thật vậy, nếu ngược lại ta phải có $f(x) > 0 \ \ \forall x \in [a,b]$ hoặc $f(x) < 0 \ \ \forall x \in [a,b]$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Ta chỉ cần xét trường hợp các không điểm của f là rời rạc, vì nếu $f(x) = 0 \ \ \forall x \in (\alpha, \beta) \subset [a,b]$ Thì ta có ngay điều phải chứng minh.

Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_m$ là các điểm trong $[a,b]$ sao cho $f(x_i) = 0 \ \ \forall = \overline{1,m}, m \le N$ và $x_1, x_2, \ldots, x_r$ là các điểm mà tại đó $f(x)$ đổi dấu, $r \le m$.

Xét $p(x) = \prod\limits_{i=1}^{r}(x_i - x)$. Khi đó $p(x)f(x) \geq 0$ trên $[a, b]$ và $p(x)f(x) > 0$ trên các đoạn $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ không kể đầu mút. Từ đó suy ra $\int\limits_a^b p(x)f(x)dx > 0$ với $\deg p(x) = r \leq N$, điều này mâu thuẫn với (*).

Vậy f có ít nhất $N+1$ không điểm trên $[a, b]$.

2.2 Tổng hợp đề dự tuyển môn Đại số 2010

Câu 1. (ĐH Ngoại thương)

Cho A, B là các ma trận vuông thực cấp n sao cho $A^2 + B^2 = AB$. Chứng minh rằng nếu $AB - BA$ khả nghịch thì n chia hết cho 3.

Đáp án. Đặt $S = A + \omega B$ với $\omega = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

Khi đó $S\overline{S} = \omega(BA - AB)$ (vì $\overline{\omega} + 1 = -\omega$). Từ chỗ $\det(S\overline{S}) = \det(S)\det(\overline{S})$ là số thực nên $\det[\omega(BA - AB)] = \omega^n \det(BA - AB)$ và $\det(BA - AB)$ khác 0 nên $\omega^n = \dfrac{\det(S\overline{S})}{\det(BA - AB)}$ là số thực, suy ra n chia hết cho 3.

Câu2. (ĐH Ngoại thương)

Tính $\det(A)$ với $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ mà $a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|} \text{ khi } i \neq j \\ 2 \text{ khi } i = j \end{cases}$

Đáp án. $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & \ldots & \pm 1 & \mp 1 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & \mp 1 & \pm 1 \\ 1 & -1 & 2 & \ldots & \pm 1 & \mp 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \ldots & 2 & -1 \\ \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix}$

Cộng dòng 2 vào dòng 1, cộng dòng 3 vào dòng 2,..., cộng dòng n vào dòng $n-1$ ta được

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Sau đó nhân cột 1 với (-1) rồi cộng vào cột 2, nhân cột 2 với (-1) rồi cộng vào cột 3,..., nhân cột (n-1) với (-1) rồi cộng vào cột n ta được

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n+1 \end{vmatrix} = n+1$$

Câu 3. (ĐH Ngoại thương)

Chứng minh rằng nếu ma trận vuông A cấp n có các phần tử trên đường chéo chính bằng 0, các phần tử còn lại bằng 1 hoặc bằng 2010 thì $r(A) \geq n-1$.

Đáp án. Giả sử B là ma trận mà tất cả các phần tử đều bằng 1 nên $r(B) = A - B$

là ma trận có các phần tử trên đường chéo chính bằng -1 còn các phần tử còn lại bằng 0 hoặc bằng 2009 $\Rightarrow \det(A-B) \neq 0 \Rightarrow n = r(A-B) \leq r(A) + r(B) \Rightarrow r(A) \leq n-1$.

Câu 4. (ĐH Ngoại thương)

Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực khác nhau đôi một và khác $0, -1, -2, \ldots, -n+1$.

Chứng minh rằng định thức sau khác 0:

$$d = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{x_1} & \dfrac{1}{x_2} & \cdots & \dfrac{1}{x_n} \\ \dfrac{1}{x_1+1} & \dfrac{1}{x_2+1} & \cdots & \dfrac{1}{x_n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{1}{x_1+n-1} & \dfrac{1}{x_2+n-1} & \cdots & \dfrac{1}{x_n+n-1} \end{vmatrix}$$

Đáp án. Giả sử $d = 0$ suy ra tồn tại các hằng số không đồng thời bằng 0: $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sao cho $\dfrac{C_1}{x_i} + \dfrac{C_2}{x_i+1} + \cdots + \dfrac{C_n}{x_i+n-1} = 0; \forall i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Suy ra phương trình $f(x) = \dfrac{C_1}{x} + \dfrac{C_2}{x+1} + \cdots + \dfrac{C_n}{x+n-1} = 0$ có n nghiệm phân biệt $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Nhưng $f(x) = \dfrac{P(x)}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)} = 0$. Suy ra $P(x)$ có n nghiệm thực phân biệt nhưng bậc của $P(x)$ nhỏ hơn n nên vô lý.

Câu 5. (ĐH Ngoại thương)

Xét ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

1) Chứng minh rằng A chéo hóa được và hãy chéo hóa A.

2) Đặt $B = \dfrac{1}{6}A$. Chứng minh rằng với mỗi $n \in \mathbb{N} : (B+E)^n = (2^n - 1)B + E$

Đáp án.

1) Chứng minh rằng A chéo hóa được hay chứng minh A có n vectơ riêng độc lập tuyến tính.

Tìm được $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Khi đó $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

2) Ta có $B = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$. Nên $B^k = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k P^{-1} = B$

Từ đó, ta có $(B+E)^n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k B^k + C_n^0 B^0 = \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k\Big) B + E = (2^n-1)B + E.$

Câu I. (ĐHSP Huế) Cho A, B là các ma trận vuông cấp 3 hệ số thực sao cho $\det(A) = \det(B) = 0$, $\det(A+2009B) = \det(A+2010B) = 0$. Chứng minh rằng $\det(xA+yB) = 0$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Đáp án. Nếu $x = 0$ thì $\det(xA+yB) = \det(yB) = y^3\det(B) = 0$. Xét $x \neq 0$, ta đặt $t = \dfrac{y}{x}$. Khi đó ta có $\det(xA+yB) = x^3\det(A+tB)$. Ta chỉ cần chứng minh $p(t) = \det(A+tB)$ với $t \in \mathbb{R}$. Vì $p(0) = p(2009) = p(2010) = 0$ nên ta có $p(t) = at(t-2009)(t-2010)$. Chia hai vế cho t^3 $(t \neq 0)$ ta được

$$\det(\frac{1}{t}A + B) = a(1 - \frac{2009}{t})(1 - \frac{2010}{t}),\ \forall t \neq 0.$$

Cho $t \to \infty$ thì $a = \det(B) = 0$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 2. (ĐHSP Huế) Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ký hiệu $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ là không gian các ma trận vuông cấp 3 hệ số thực, $W = \{X \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R}) \ : \ AX = XA\}$ và $U = \{p(A) \ : \ p(x) \in \mathbb{R}[x]\}$. Chú ý rằng nếu $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ thì $p(A) = a_0I_3 + a_1A + \cdots + a_kA^k$, trong đó I_3 là ma trận đơn vị cấp 3.

1. Chứng minh rằng U, W là các không gian các vector con của $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ và $U \subset W$.

2. Chứng minh rằng $\dim W = \dim U = 3$. Từ đó suy ra, nếu $B \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ và $AB = BA$ thì tồn tại $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho $B = p(A)$.

Đáp án. Đa thức tối tiểu của A là $m_A(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ nên U là không gian vector con của $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ và $\dim U = 3$. Dễ dàng kiểm tra $U \subset W$.

Lấy $X \in W$ ta có $XA = AX$ nên X phải có dạng

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b-2c \\ 0 & 0 & a-2b+4c \end{pmatrix}.$$

Vậy $\dim W = 3 = \dim U$. Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Câu 3. (ĐHSP Huế) Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ hệ số thực thỏa mãn điều kiện

$$f(\pi^x) = f(x^{2009}), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đáp án. Từ giả thiết, ta suy ra $f(\pi^{\sqrt[2009]{x}}) = f(x)$ với mọi $x > 0$. Đặt $x_0 = 1, x_n = \pi^{\sqrt[2009]{x_{n-1}}}, n \geq 1$. Khi đó ta có $(x_n)_n$ là một dãy đơn điệu tăng và $f(x_n) = f(x_{n-1})$ với mọi n nên $f(x)$ là một đa thức hằng.

Câu 1. (ĐHBKHN) Tính định thức

$$A = \begin{vmatrix} e+e^{-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & e+e^{-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e+e^{-1} & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & e+e^{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & e+e^{-1} \end{vmatrix}.$$

Đáp án. Khai triển theo cột thứ nhất, ta có

$\Delta_n = (e + e^{-1})\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$

Ta có $\Delta_1 = e + e^{-1} = \dfrac{e^2 - e^{-2}}{e - e^{-1}}, \Delta_2 = (e + e^{-1})^2 - 1 = \dfrac{e^3 - e^{-3}}{e - e^{-1}}$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng $\Delta_k = \dfrac{e^{(k+1)} - e^{-(k+1)}}{e - e^{-1}}$ với mọi $1 \leq k \leq n$.

Vậy $\Delta_n = \dfrac{e^{(n+1)} - e^{-(n+1)}}{e - e^{-1}}$

Câu 2. (ĐHBKHN) Cho các ma trận vuông thực A, B thỏa mãn các điều kiện sau $A^{2009} = 0$ và $AB = 2008A + 2007B$. Chứng minh rằng

a) $B^{2009} = 0$.

b) $det(A + 2007I) \neq 0$

Đáp án.

a) Ta có

$AB = 2008A + 2007B \Leftrightarrow (A - 2007I)(B - 2008I) = 2007 \cdot 2008I$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2007 \cdot 2008}(A - 2007I)(B - 2008I) = I \Leftrightarrow \Big(\dfrac{1}{2007}A - I\Big)\Big(\dfrac{1}{2008}B - I\Big) = I$

$\Leftrightarrow \Big(\dfrac{1}{2008}B - I\Big)\Big(\dfrac{1}{2007}A - I\Big) = I \Leftrightarrow (B - 2008I)(A - 2007I) = 2007 \cdot 2008I$

$\Leftrightarrow BA = 2008A + 2007B$

Do đó $AB = BA$. Từ đó, ta có

$AB = 2008A + 2007B \Rightarrow B = \dfrac{1}{2007}A(B - 2008I)$

$\Rightarrow B^{2009} = \dfrac{1}{2007^{2009}}A^{2009}(B - 2008I)^{2009} = 0$

b) Ta có

$I = \dfrac{-1}{2007^{2009}}[A^{2009} - (2007I)^{2009}]$

$= \dfrac{1}{2007^{2009}}(A - 2007I)(A^{2008} + 2007A^{2007} + 2007^2A^{2006} + \cdots + (2007I)^{2008})$

$= (A - 2007I)\Big[\dfrac{1}{2007^{2009}}(A^{2008} + 2007A^{2007} + 2007^2A^{2006} + \cdots + (2007I)^{2008})\Big]$

Do đó $(A - 2007I)$ khả nghịch, nên $\det(A + 2007I) \neq 0$.

Câu 3. (ĐHBKHN) Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

trong đó $a_{ij} \in \mathbb{Z}, i, j = \overline{1, n}$. Tìm điều kiện cần và đủ để phương trình đã cho luôn có nghiệm $x = (x_1.x_2, \ldots, x_n)$ thỏa mãn $x_j \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq n$ với mọi giá trị $b_j \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq n$.

Đáp án.

($\Rightarrow$) Điều kiện cần: giả sử hệ đó luôn có nghiệm $x = (x_1.x_2, \ldots, x_n)$ thỏa mãn $x_j \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq n$ với mọi giá trị $b_j \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq n$.

Đặt $A = [a_{ij}]$. Nếu $\operatorname{rank}(A) < n$ thì ta chọn các $b_j \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq n$ sao cho $\operatorname{rank}(\overline{A}) = \operatorname{rank}(A|b) = \operatorname{rank}(A) + 1 \neq \operatorname{rank}(A)$. Khi đó, hệ trên sẽ vô nghiệm.

Vậy $\operatorname{rank}(A) = n$ hay $\det A \neq 0$. Khi đó, hệ có nghiệm $[x] = A^{-1}b$. Nếu $A^{-1} = [a'_{ij}]$ không phải là ma trận nguyên, chẳng hạn có phần tử $a'_{i_0j_0} \notin \mathbb{Z}$, thì ta chỉ cần chọn $b_{j_0} = 1$ và $b_j = 0$ với $\forall j \neq j_0$. Khi đó, ta có $x_{i_0} = a'_{i_0j_0} \notin \mathbb{Z}$. Do vậy, A^{-1} là ma trận nguyên. Bởi vậy, $\det A^{-1} \in \mathbb{Z}$.

Lại có $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$ nên $\dfrac{1}{\det A} \in \mathbb{Z}$. Suy ra $\det A = \pm 1$.

($\Leftarrow$) Ngược lại, giả sử $\det A = \pm 1$. Khi đó A là ma trận khả nghịch và $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} C^t$ trong đó C^t là ma trận phụ hợp của A. Vì A là ma trận nguyên nên C^t cũng là ma trận nguyên, dẫn đến A^{-1} là ma trận nguyên. Do đó, với mọi $b_j \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq n$ thì nghiệm của hệ phương trình được xác định bởi $[x] = A^{-1}b$ gồm các số nguyên.

Vậy điều kiện cần và đủ để hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm $x = (x_1.x_2, \ldots, x_n)$ thỏa mãn $x_j \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq n$ với mọi giá trị $b_j \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq n$. là $\det A = \pm 1$.

Câu 4. (ĐHBKHN) Cho $f : V \to V$ là một toán tử tuyến tính của không gian véctơ n chiều V. Giả sử tồn tại các véctơ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ khác véctơ không trong V thỏa mãn điều kiện:

$f(v_1) = v_1 + v_2, f(v_2) = v_2 + v_3, \ldots, f(v_{n-1}) = v_{n-1} + v_n, f(v_n) = v_n$

Chứng minh rằng f là một đẳng cấu tuyến tính.

Đáp án.

Trước hết ta chứng minh hệ vec tơ $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ độc lập tuyến tính.

Thật vậy, xét $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = \theta$ với $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, ta có

$\theta = f(x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i f(v_{i+1})$

$= (x_1v_2 + x_2v_3 + \cdots + x_{n-1}v_n) + (x_1v_3 + x_2v_4 + \cdots + x_{n-2}v_n) = x_1v_3 + x_2v_4 + \cdots + x_{n-2}v_n$

$\theta = f(x_1v_3 + x_2v_4 + \cdots + x_{n-2}v_n) = \sum\limits_{i=1}^{n-2} x_i f(v_{i+2})$

$\cdots$

$= (x_1v_3 + x_2v_4 + \cdots + x_{n-2}v_n) + (x_1v_4 + x_2v_5 + \cdots + x_{n-3}v_n) = x_1v_4 + x_2v_5 + \cdots + x_{n-3}v_n$

cuối cùng ta được

$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = x_1v_2 + x_2v_3 + \cdots + x_{n-1}v_n = x_1v_3 + x_2v_4 + \cdots + x_{n-2}v_n$
$= x_1v_4 + x_2v_5 + \cdots + x_{n-3}v_n = \cdots = x_1v_{n-1} + x_2v_n = x_1v_n = \theta$

Vì $v_n \neq \theta$ nên ta có $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \theta$ hay $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ độc lập tuyến tính.

Hơn nữa, $dimV = n$ nên B là cột cơ sở của V. Khi đó ta có ma trận của f đối với cơ sở B là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vì $\det A = 1$ nên f là một đẳng cấu tuyến tính.

Câu 5. (ĐHBKHN) Gọi I là ma trận đơn vị cấp n. Chứng minh rằng với mọi ma trận vuông cấp n A và số thực $\lambda \neq 0$ bất kì, ta có

$\text{rank}(A) + \text{rank}(A + \lambda E) = n + \text{rank}(A^2 + \lambda A)$

Đáp án.

$\text{rank}(A) + \text{rank}(A + \lambda E) = \text{rank} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A + \lambda E \end{bmatrix}$

$= \text{rank} \begin{bmatrix} A & A + \lambda E \\ 0 & A + \lambda E \end{bmatrix}_{(H_2+H_1)} = \text{rank} \begin{bmatrix} A & \lambda E \\ 0 & A + \lambda E \end{bmatrix}_{(C_1\times(-1)+C_2)}$

$= \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & \lambda E \\ \dfrac{-1}{\lambda}(A^2 + \lambda A) & A - E \end{bmatrix}_{(C_2\times\frac{-1}{\lambda}A+C_1)}$

$= \text{rank}(\lambda E) + \text{rank} \left[\dfrac{-1}{\lambda}(A^2 + \lambda A)\right] = n + \text{rank}(A^2 + \lambda A)$

Câu 6. (ĐHBKHN) Cho đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ có ít nhất 2 nghiệm thực. Chứng minh rằng đa thức $P(x) = f(x) - f'(x)$ cũng có ít nhất 2 nghiệm thực.

Đáp án. Giả sử $x_1, x_2 (x_1 \leq x_2)$ là nghiệm của $f(x)$. Xét hàm số $g(x) = e^{-x} f(x)$.

Ta có $g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x))$. Theo định lý Rolle thì $g'(x)$ có ít nhất một nghiệm thực trong (x_1, x_2) nếu $x_1 < x_2$ và có nghiệm x_1 nếu $x_1 = x_2$. Suy ra đa thức $P(x) = f(x) - f'(x)$ có ít nhất một nghiệm thực.

Vì $degP(x) = degf(x) = n$ nên nếu n lẻ thì $f(x)$ có ít nhất 3 nghiệm thực và vì vậy theo lập luận trên thì $P(x)$ sẽ có ít nhất 2 nghiệm thực. Nếu n chẵn thì do $P(x)$ có nghiệm thực nên nó phải có ít nhất hai nghiệm thực.

Bài 1. (ĐHKH Huế) Cho $A, B \in M(n, \mathbb{F})$. Ký hiệu $r(A)$ là hạng của ma trận A. Chứng minh rằng:

1) $r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

2) Nếu $AB = 0$ và n lẻ thì $r(A + A^t) < n$ hoặc $r(B + B^t) < n$.

Đáp án. *1)* Xem A và B như là các tự đồng cấu tuyến tính của không gian $\mathbb{F}^n$: $\mathbb{F}^n \xrightarrow{B} \mathbb{F}^n \xrightarrow{A} \mathbb{F}^n$. Ta có:

$$\begin{aligned} r(AB) &= \dim \mathrm{Im}(AB) = \dim A(B(\mathbb{F}^n)) = \dim \mathrm{Im}(A\big|_{\mathrm{Im}B}) \\ &= \dim \mathrm{Im}B - \dim \mathrm{Ker}(A\big|_{\mathrm{Im}B}) \\ &\geq \dim \mathrm{Im}B - \dim \mathrm{Ker}A = \dim \mathrm{Im}B - (n - \dim \mathrm{Im}A) = r(A) + r(B) - n. \end{aligned}$$

Từ trên ta có: $r(AB) \leq \dim \mathrm{Im}B = r(B)$. Ngoài ra, $\mathrm{Im}(AB) \subset \mathrm{Im}A$, nên $r(AB) \leq \dim \mathrm{Im}A = r(A)$. Vậy $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

2) Do $r(A) + r(B) \leq r(AB) + n = n$ và n lẻ, ta có một trong hai số $r(A)$, $r(B)$ nhỏ hơn $\frac{n}{2}$. Giả sử $r(A) < \frac{n}{2}$. Khi đó $r(A^t) = r(A) < \frac{n}{2}$ nên $r(A + A^t) \leq r(A) + r(A^t) < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$.

Bài 2. (ĐHKH Huế) Ký hiệu $tr(A)$ là tổng các phần tử trên đường chéo chính của ma trận vuông A, gọi là vết của A và $\mathbb{V}^*$ là không gian đối ngẫu của không gian vectơ $\mathbb{V}$. Chứng minh rằng ánh xạ ánh xạ $\theta : M(n, \mathcal{F}) \longrightarrow (M(n, \mathcal{F}))^*$ xác đijnh bởi:

$$\forall A \in M(n, \mathcal{F}),\ \forall X \in M(n, \mathcal{F}),\ (\theta(A))(X) = tr(AX).$$

là một đẳng cấu của $\mathcal{F}$-không gian vectơ.

Đáp án. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\forall A, B \in M(n, \mathbb{F})$, $\forall X \in M(n, \mathbb{F})$, ta có

$$(\theta(\alpha A + \beta B))(X) = tr((\alpha A + \beta B)X) = \alpha tr(AX) + \beta tr(BX)$$
$$= \alpha(\theta(A))(X) + \beta(\theta(B))(X) = (\alpha\theta(A) + \beta\theta(B))(X),$$

do đó $\theta(\alpha A + \beta B) = \alpha\theta(A) + \beta\theta(B)$. Vậy θ là một ánh xạ tuyến tính.

Giả sử $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{F})$ sao cho $\theta(A) = 0$, tức là $\forall X \in M(n, \mathbb{F})$, $tr(AX) = 0$. Khi đó $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, với I_{ij} là ma trận thuộc $M(n, \mathbb{F})$ gồm toàn 0, trừ phần tử ở dòng i và cột j bằng 1, ta có $tr(AI_{ij}) = 0$ mà AI_{ij} có tất cả các cột bằng 0, trừ cột thưs j bằng $(a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})^t$. Từ đây suy ra $a_{ji} = tr(AI_{ij}) = 0$. Điều này chứng tỏ $A = 0$, do đó θ là đơn cấu.

Do $\theta : M(n, \mathbb{F}) \longrightarrow (M(n, \mathbb{F}))^*$ là đơn cấu tuyến tính và $\dim(M(n, \mathbb{F})) = \dim(M(n, \mathbb{F}))^*) = n^2$, nên θ là một đẳng cấu tuyến tính.

Bài 3. (ĐHKH Huế) Cho $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{F})$ với $n \geq 2$, $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ji})$ là ma trận phụ hợp của A, tức là $\widetilde{a}_{ji}$ là phần bù đại số của a_{ij}. Chứng minh rằng:

1) Nếu A không suy biến thì $\widetilde{A}$ cũng vậy. *2)* Nếu $r(A) = n - 1$ thì $r(\widetilde{A}) = 1$.

3) Nếu $r(A) \leq n - 2$ thì $\widetilde{A} = 0$.

Đáp án. *1)* Ta có:

$$A.\widetilde{A} = \widetilde{A}.A = \det(A)I_n.$$

Do đó nếu A không suy biến tức là $\det(A) \neq 0$ thì $\widetilde{A}$ cũng không suy biến và $\widetilde{A}^{-1} = \det(A)^{-1}.A$.

2) Nếu $r(A) = n - 1$ thì trong ma trận $\widetilde{A}$ có ít nhất một phần tử khác 0 hay $r(\widetilde{A}) \geq 1$. Vì $\det(A) = 0$ nên $A.\widetilde{A} = 0$ hay $\mathrm{Im}\widetilde{A} \subset \mathrm{Ker}A$ (xem A và $\widetilde{A}$ như là tự động cấu tuyến tính của không gian vectơ $\mathbb{F}^n$). Do đó

$$\dim \mathrm{Im}\widetilde{A} \leq \dim \mathrm{Ker}A = n - r(A) = n - (n-1) = 1.$$

Vậy $r(\widetilde{A}) = \dim \mathrm{Im}\widetilde{A} = 1$.

3) Mỗi phần tử của ma trận $\widetilde{A}$ là một định thức con cấp $n - 1$ của A hoặc đối của nóDo $r(A) \leq n - 2$, mọi định thức con cấp $n - 1$ của A đều bằng 0. Vậy mọi phần tử của $\widetilde{A}$ đều bằng 0 hay $\widetilde{A} = 0$.

Bài 4. (ĐHKH Huế) Trên đường chéo của ma trận vuông cấp n là các số 0, còn các phần tử khác hoặc là 1 hoặc là 2010. Chứng minh rằng hạng của ma trận này hoặc là $n - 1$ hoặc là n.

Đáp án. Gọi A là ma trận được cho, còn B là ma trận vuông cấp n có tất cả các phần tử bằng 1. Ma trận $A - B$ có dạng:

$$\begin{pmatrix} -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & -1 & \dots & c_{ij} & \dots \\ \dots & c_{ij} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

Với c_{ij} không nằm trên đường chéo là bằng 0 hoặc 2009. Đặc biệt là theo mod 2009, ma trận $A - B$ có dạng đường chéo và $\det(A - B) \not\equiv 0 \pmod{2009}$. Suy ra ma trận $A - B$ không suy biến hay $r(A - B) = n$. Do $r(A - B) \leq r(A) + r(B)$ và $r(B) = 1$, ta có $r(A) \geq n - 1$.

Bài 5. (ĐHKH Huế) Cho $A \in M(n, \mathbb{F})$ và φ_A, ψ_A là các tự động cấu tuyến tính của $M(n, \mathbb{F})$ xác định bởi $\varphi_A(X) = AX - XA$, $\psi_A(X) = AX$. Chứng minh rằng:

1) $\det(\varphi_A) = 0$.

2) $\det(\psi_A) = (\det A)^n$.

Đáp án. *1)* Với ma trận đơn vị I_n, ta có $\varphi_A(I_n) = AI_n - I_nA = 0$, nên φ_A không là một đẳng cấu tuyến tính. Do đó $\det(\varphi_A) = 0$.

2) Ký hiệu I_{ij} là ma trận thuộc $M(n,\mathbb{F})$ gồm toàn 0, trừ phần tử ở dòng i và cột j bằng 1. Ta chọn cơ sở của $M(n,\mathbb{F})$ theo thư tự như sau:

$$I_{11},\ I_{21},\ \dots,\ I_{n1};\ I_{12},\ I_{22},\ \dots,\ I_{n2};\ \dots,\ I_{1n},\ I_{2n},\ \dots,\ I_{nn}. \tag{1}$$

Tích AI_{ij} có tất cả các cột bằng 0, trừ cột thư j bằng $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$. Như vậy,

$$AI_{ij} = a_{1i}I_{1j} + a_{2i}I_{2j} + \cdots + a_{ni}I_{nj}. \tag{2}$$

Từ biểu diễn (2), ta thấy rằng ma trận của ψ_A theo cơ sở (1) là ma trận chéo khối $\operatorname{diag}(A, A, \dots, A)$ thuộc $M(n^2,\mathbb{F})$. Do đó $\det(\psi_A) = (\det A)^n$.

Bài 6. (ĐHKH Huế)

1) Tìm mối liên hệ giữa hai định thức sau:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ và } D^*(x) = \begin{vmatrix} a_{11}+x & \dots & a_{1n}+x \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

2) Chứng minh rằng tổng các phần bù đại số của các phần tử trong một định thức không đổi, nếu ta thêm vào tất cả các phần tử cùng một số.

Đáp án. *1)* Ta viết mỗi cột của $D^*(x)$ thành tổng của hai cột, trong đó có một cột toàn x, rồi viết $D^*(x)$ thành tổng của các định thức của các cột mới. Định thức nào chứa hai cột toàn x trở lên sẽ bằng 0. Chỉ có một định thức mới không chứa x, chính là D. Ngoài ra có n định thức mới có đúng một cột toàn x. Khai triển theo cột đó, ta được:

$$D^*(x) = D + x \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij},$$

trong đó A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij}.

2) Ký hiệu S_A là tổng các phần bù đại số của các phần tử trong ma trận $A = (a_{ij})$ và $B = (a_{ij} + c) = (b_{ij})$. Theo Câu 1) ta được:

$$\det A = \det(b_{ij} - c) = \det B - cS_B = \det A + cS_A - cS_B.$$

Từ đó suy ra $S_A = S_B$.

Bài 7. (ĐHKH Huế) Cho $\mathbb{V} = \mathbb{F}[x]$ và f là một tự đồng cấu của $\mathbb{V}$ xác định bởi $f(P) = xP$. Xác định các giá trị riêng và vectơ riêng của tự đồng cấu $F : End(\mathbb{V}) \longrightarrow End(\mathbb{V})$ cho bởi $F(g) = f \circ g - g \circ f$.

Đáp án. Giả sử $\lambda \in \mathbb{F}$, $g \in End(\mathbb{V}) \setminus \{0\}$. Ta có

$$\begin{aligned} F(g) = \lambda g &\Leftrightarrow \forall P \in \mathbb{F}[x],\ xg(P) - g(xP) = \lambda g(P) \\ &\Leftrightarrow \forall P \in \mathbb{F}[x],\ g(xP) = (x-\lambda)g(P) \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ g(x^{n+1}) = (x-\lambda)g(x^n) \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ g(x^n) = (x-\lambda)^n g(1) \\ &\Leftrightarrow \forall P \in \mathbb{F}[x],\ g(P) = P(x-\lambda)g(1). \end{aligned}$$

Do $\forall \lambda \in \mathbb{F}$, $\exists g : \mathbb{F}[x] \longrightarrow \mathbb{F}[x]$ là đẳng cấu tuyến tính xác định bởi $g(P) = AP(x-\lambda)$, với $A \in \mathbb{F}[x] \setminus \{0\}$, nên tập các giá trị riêng của F là $\mathbb{F}$ và các vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ là $g \in End(\mathbb{V})$ cho bởi $g(P) = AP(x-\lambda)$, với $A \in \mathbb{F}[x] \setminus \{0\}$ tùy ý.

Bài 8. (ĐHKH Huế) Cho $A \in M(3, \mathbb{R})$ sao cho $A^3 + A = 0$ và $A \neq 0$. Chứng minh rằng A đồng dạng với ma trận $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Đáp án. Đặt $f(x) = x^3 + x$ thì $f(x) = x(x-i)(x+i)$ và A là một nghiệm của đa thức tách đơn $f(x) \in \mathbb{C}[x]$. Do đó A chéo hoá được trong $M(3, \mathbb{C})$ và tập các giá trị riêng của A là $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0, i, -i\}$.

Nếu $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$ thì do A chéo hoá được trong $M(3, \mathbb{C})$, $A = 0$: vô lý.

Nếu $i \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ và v là vectơ riêng ứng với giá trị riêng i thì $-i \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ và $\overline{v}$ là vectơ riêng ứng với giá trị riêng $-i$. Tương tự nếu $-i \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ thì $i \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$. Do đó $\{i, -i\} \subset Sp_{\mathbb{C}}(A)$.

Nếu $0 \notin Sp_{\mathbb{C}}(A)$ thì $A^2 + I_3 = 0$, nên $(\det(A))^2 = \det(A^2) = \det(-I_3) = -1$: vô lý vì $\det(A) \in \mathbb{R}$.

Như vậy, $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{0, i, -i\}$ và mỗi không gian con riêng có số chiều là 1 (trên $\mathbb{C}$). Ký hiệu $u, v, \overline{v}$ là các vectơ riêng tương ứng với $0, i, -i$. Đặt $w_1 = \dfrac{1}{2}(v + \overline{v})$, $w_2 = \dfrac{1}{2i}(v - \overline{v})$. Khi đó (u, w_1, w_2) là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Do $Au = 0$, $Aw_1 = \dfrac{1}{2}(iv - i\overline{v}) = -w_2$, $Aw_2 = \dfrac{1}{2i}(iv + i\overline{v}) = w_1$, ta có $A = C\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}C^{-1}$, trong đó C là ma trận đổi cơ sở từ cơ sở chính tắc sang cơ sở (u, w_1, w_2).

Bài 9. (ĐHKH Huế) Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M(n, \mathbb{C})$ sao cho $A^4 = 7A^3 - 12A^2$. Chứng minh rằng $tr(A) \in \mathbb{N}$ và $tr(A) \leq 4n$.

Đáp án. Đặt $f(x) = x^4 - 7x^3 + 12x^2$ thì $f(x) = x^2(x-3)(x-4)$ nhận ma trận A làm nghiệm.

Vì $A \in M(n, \mathbb{C})$ nên đa thức đặc trưng $P_A(x)$ tách được trên $\mathbb{C}$, do đó A có các giá trị riêng $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Ta có $tr(A) = \underset{i=1}{\rightarrow} \overset{n}{\rightarrow} \sum \lambda_i$. Mặt khác, $\forall i = 1, \ldots, n$, $\lambda_i \in \{0, 3, 4\}$, nên $tr(A) \in \mathbb{N}$ và $tr(A) \leq 4n$.

Bài 10. (ĐHKH Huế) Tính

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}^{2010}.$$

Đáp án. Ký hiệu $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Đa thức đặc trưng của A là $P_A(x) = (1-x)^3$ và đa thức tối tiểu là $\Pi_A(x) = (x-1)^2$. Chia x^{2010} cho đa thức $(x-1)^2$, ta có:

$$x^{2010} = (x-1)^2 Q(x) + (ax+b).$$

Thay $x = 1$ vào đẳng thức trên, ta có $a+b = 1$, sau đó lấy đạo hàm và thay $x = 1$ ta tìm được $a = 2010$. Từ đó $A^{2010} = 2010A - 2009I_3$.

Bài 11. (ĐHKH Huế) Cho $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là các dãy số thực được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_0 &= 0, \\ v_0 &= 22, \\ w_0 &= 22, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} &= \dfrac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n), \\ v_{n+1} &= \dfrac{1}{3}(u_n + v_n + w_n), \\ w_{n+1} &= \dfrac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n). \end{cases}$$

Tính u_n, v_n, w_n và nghiên cứu sự hội tụ của ba dãy này.

Đáp án. Ký hiệu $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ và với $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. Vậy $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

Đa thức đặc trưng của A là

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - x & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - x & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - x \end{vmatrix} = (1-x)(\frac{1}{12} - x)(\frac{1}{4} - x).$$

Do đó A có 3 giá trị riêng phân biệt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{4}$, $\lambda_3 = \frac{1}{12}$ và A chéo hoá được. Ta có các không gian con riêng

$$E(\lambda_1) =< (1,1,1) >,\ E(\lambda_2) =< (1,0,-1) >,\ E(\lambda_3) =< (3,-8,3) > .$$

Ký hiệu $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ và $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$, ta có

$$C^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ 11 & 0 & -11 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = CDC^{-1}.$$

Từ đây suy ra $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0 = CD^nC^{-1}X_0 =$

$$= \frac{1}{22}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & -8\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4^{-n} & 0\\ 0 & 0 & 12^{-n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 6 & 8\\ 11 & 0 & -11\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 22\\ 22\end{pmatrix}.$$

Do đó $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_n & = 14 - 11.4^{-n} - 3.12^{-n}\\ v_n & = 14 + 8.12^{-n}\\ w_n & = 14 + 11.4^{-n} - 3.12^{-n}\end{cases}.$

Rõ ràng $(u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ về 14.

Bài 12. (ĐHKH Huế) Tính u_n với mọi $n \in \mathbb{N}$ nếu biết

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_2 = 1,\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2}.\end{cases}$$

Đáp án. Ký hiệu $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 45 & -39 & 11\end{pmatrix}$ và $X_n = \begin{pmatrix}u_n\\ u_{n+1}\\ u_{n+2}\end{pmatrix}$.

Ta có $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$. Do đó $X_n = A^nX_0$.

Đa thức đặc trưng của A là

$$P_A(x) = \begin{vmatrix}-x & 1 & 0\\ 0 & -x & 1\\ 45 & -39 & 11-x\end{vmatrix} = -(x-3)^2(x-5).$$

Vậy $P_A(x)$ tách được trên $\mathbb{R}$ và các giá trij riêng của A là $\lambda_1 = 3$ (kép) và $\lambda_2 = 5$ (đơn). Ta có các không gian con riêng:

$$E(\lambda_1) =< v_1 = (1,3,9) >,\ \ E(\lambda_2) =< v_3 = (1,5,25) > .$$

A không hoá chéo được, nhưng ta sẽ tam giác hoá A. Ta tìm v_2 sao cho $Av_2 = v_1 + 3v_2$. Bằng cách này, $v_2 = (0,1,6)$. Ký hiệu

$$C = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 5\\ 9 & 6 & 25\end{pmatrix},\ \ T = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Ta có $C^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-5 & 6 & -1\\ -30 & 16 & -2\\ 9 & -6 & 1\end{pmatrix}$ và $A = CTC^{-1}$. Từ đây suy ra:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = CT^nC^{-1}X_0 = \begin{pmatrix}-4n.3^{n-1} + 5^n\\ -4(n+1)3^n + 5^{n+1}\\ -4(n+2)3^{n+1} + 5^{n+2}\end{pmatrix}.$$

Vậy $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -4n.3^{n-1} + 5^n$. **Câu 1. (ĐH Nông nghiệp Hà Nội)**

Cho $A = [a_{ij}]_n; a_{ii} = 2; a_{ij} = \left[\begin{matrix}1\\ 2010\end{matrix}\right. \forall i \neq j.$

Chứng minh rằng: Hạng của ma trận A hoặc bằng $n-1$ hoặc bằng n.

Đáp án. Với ma trận vuông B cấp n có tất cả các phần tử bằng -1. Xét ma trận:

$C = A + B = [c_{ij}]_n \Rightarrow c_{ii} = 1; c_{ij} = \left[\begin{array}{l} 0 \\ 2009 \end{array}\right.$

$\Rightarrow det(C) = 1 + 2009t; t \in \mathbb{Z} \Rightarrow det(C) \neq 0 \Rightarrow r(C) = n.$

Ta có $n = r(C) = r(A+B) \leq r(A) + r(B) = r(A) + 1 \Rightarrow$ ĐPCM.

Câu 2. (ĐH Nông nghiệp Hà Nội)

Cho $P(x)$ là đa thức với các hệ số thực bậc 2010 thỏa mãn $P(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng tồn tại hai đa thức với hệ số thực $Q(x)$ và $R(x)$ để $P(x) = Q^2(x) + R^2(x)$.

Đáp án. Do $P(x)$ là đa thức bậc chẵn thỏa mãn $P(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ các nghiệm thực của $P(x)$ là nghiệm bội bậc chẵn và hệ số của x^{2010} dương. Gọi $x_1, x_2, \ldots, x_k$ là các nghiệm thực với x_i bội là $2t_i$ của $P(x)$. Nếu $\sum\limits_{i=1}^{k} 2t_i = 2010$ thì $P(x)$ không có nghiệm phức, khi đó:

$P(x) = a \prod\limits_{i=1}^{k} (x - x_i)^{2t} = \left[\sqrt{a} \prod\limits_{i=1}^{k} (x - x_i)^t\right]^2 + 0^2 \Rightarrow$ ĐPCM.

Nếu $\sum\limits_{i=1}^{k} 2t_i = 2n < 2010$ thì $P(x)$ có $2010 - 2n = 2m$ nghiệm phức đôi một liện hợp với nhau. Khi đó $P(x) = a \prod\limits_{i=1}^{k} (x - x_i)^{2t} \prod\limits_{j=1}^{m} (x - z_j)(x - \overline{z_j})$.

Với $z_j = a + bi \Rightarrow (x - z_j)(x - \overline{z_j}) = (x-a)^2 + b^2$. Bằng quy nạp ta chứng minh được

$\prod\limits_{j=1}^{m} (x - z_j)(x - \overline{z_j}) = Q_1^2(x) + R_1^2(x)$ với $Q_1(x); R_1(x)$ là các đa thức với hệ số thực.

$P(x) = \left[\sqrt{a} \prod\limits_{i=1}^{k} (x - x_i)^t Q_1(x)\right]^2 + \left[\sqrt{a} \prod\limits_{i=1}^{k} (x - x_i)^t R_1(x)\right]^2 \Rightarrow$ ĐPCM.

Câu 3. (ĐH Nông nghiệp Hà Nội)

Có tồn tại hay hay không hai ma trận vuông cấp n A, B với A là ma trận khả nghịch thỏa mãn: $AB - BA = A$.

Đáp án. Từ giả thiết $\Rightarrow ABA^{-1} - B = I(1)$. Xét đa thức đặc trưng của ma trận ABA^{-1} do ABA^{-1} đồng dạng với ma trận B nên chúng có cùng các giá trị riêng $\Rightarrow tr(ABA^{-1} - B) = 0; tr(I) = n \neq 0$. Mâu thuẫn với (1). Vậy không có các ma trận A, B thỏa mãn yêu cầu.

Câu 4. (ĐH Nông nghiệp Hà Nội)

Cho A là ma trận vuông cấp $m \times n$ có hạng bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại ma trận B cấp $m \times 1$ và ma trận C cấp $1 \times n$ để $A = BC$.

Đáp án. Do $r(A) = 1$ nên A có một dòng khác 0 và các dòng còn lại tỷ lệ với dòng khác 0 này. Không mất tính tổng quát giả sử dòng thứ nhất của A khác 0. Lấy C là ma trận bằng ma trận dòng thứ nhất của ma trận A, B là ma trận cột có phần tử ở hàng thứ i là b_i với b_i là hệ số tỷ lệ giữa dòng đầu và dòng thứ i của ma trận A, ta được $A = BC$.

Câu 5. (ĐH Nông nghiệp Hà Nội)

Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ là các ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng tồn tại $n+1$ số $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ không đồng thời bằng 0 để ma trận: $A = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n + x_{n+1}A_{n+1}$ là ma trận suy biến. **Đáp án.** Gọi a_1^i là ma trận

dòng thứ nhất của ma trận A_i. Hệ $a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^n, a_1^{n+1}$ gồm $n+1$ vectơ trong không gian vectơ n chiều nên phụ thuộc tuyến tính $\Rightarrow$ tồn tại $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ không đồng thời bằng 0 để $x_1a_1^1 + x_2a_1^2 + \cdots + x_na_1^n + x_{n+1}a_1^{n+1} = 0$. Suy ra hàng đầu của ma trận A gồm n số 0, nên A là ma trận suy biến.

Câu 1. (CĐSP BR-VT)

Cho A là ma trận thực cấp 2 và k là số nguyên, $k \geq 2$. Chứng minh rằng $A^k = 0 \Leftrightarrow A^2 = 0$.

Đáp án. *) Với $k = 2$ thì tầm thường

*) Với $k \geq 3$ thì

+) Nếu $A^2 = 0 \Rightarrow A^k = 0$ với $k \geq 3$ là hiển nhiên

+) Nếu $A^k = 0$ với $k \geq 3$ thì $\Rightarrow |A^k| = 0 \Rightarrow |A| = 0$, tức là nếu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ thì $ad - bc = 0$, vì $|A - \lambda E| = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$ nên theo định lý Cayley-Hamilton ta có

$A^2 - (a+d)A + ad - bc = 0 \Rightarrow A^2 = (a+d)A \Rightarrow A^3 = (a+d)A^2 = (a+d)^2A \Rightarrow \cdots \Rightarrow A^k = (a+d)^{k-1}A \Rightarrow (a+d)^{k-1}A = 0$

Nếu $a + d \neq 0$ thì $A = 0 \Rightarrow A^2 = 0$.

Nếu $a + d = 0$ thì do $A^2 = (a+d)A$ nên $A^2 = 0$. Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 2. (CĐSP BR-VT)

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Tính A^{2010}.

Đáp án. Ta có $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0$. Vậy theo định lý Cayley-Hamilton ta có $(A - 2I)^2 = 0$, suy ra $(A - 2I)^k = 0, \forall k \geq 2$. Khi đó

$A^{2010} = [2I + (A - 2I)]^{2010} = (2I)^{2010} + 2010(2I)^{2010}(A - 2I)$

$= (2I)^{2010}\left(I + 2010 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2^{2010} \begin{bmatrix} -2009 & 2010 \\ -2010 & 2011 \end{bmatrix}$

Câu 3. (CĐSP BR-VT)

Cho ma trận vuông A cấp n có dạng $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ trong đó $\lambda \neq 0$. Tính A^{-1}.

Đáp án. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 & = y_1 \\ \lambda x_2 + x_3 & = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \lambda x_{n-1} + x_n & = y_{n-1} \\ \lambda x_n & = y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^n x_1 + \lambda^{n-1} x_2 & = \lambda^{n-1} y_1 \\ \lambda^{n-1} x_2 + \lambda^{n-2} x_3 & = \lambda^{n-2} y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \lambda\lambda^2 x_{n-1} + \lambda x_n & = \lambda y_{n-1} \\ \lambda x_n & = y_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^n x_1 & = \lambda^{n-1} y_1 - \lambda^{n-2} y_2 + \cdots + (-1)^{n-1} y_n \\ \lambda^{n-1} x_2 & = \lambda^{n-2} y_2 - \lambda^{n-3} y_3 + \cdots + (-1)^{n-2} y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \lambda^4 x_{n-3} & = \lambda^3 y_{n-3} - \lambda^2 y_{n-2} + \lambda y_{n-1} - y_n \\ \lambda^3 x_{n-2} & = \lambda^2 y_{n-2} - \lambda y_{n-1} + y_n \\ \lambda^2 x_{n-1} & = \lambda y_{n-1} - y_n \\ \lambda x_n & = y_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = \frac{1}{\lambda} y_1 - \frac{1}{\lambda^2} y_2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\lambda^n} y_n \\ x_2 & = \frac{1}{\lambda} y_2 - \frac{1}{\lambda^2} y_3 + \cdots + (-1)^{n-2} \frac{1}{\lambda^{n-1}} y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_{n-3} & = \frac{1}{\lambda} y_{n-3} - \frac{1}{\lambda^2} y_{n-2} + \frac{1}{\lambda^3} y_{n-1} - \frac{1}{\lambda^4} y_n \\ x_{n-2} & = \frac{1}{\lambda} y_{n-2} - \frac{1}{\lambda^2} y_{n-1} + \frac{1}{\lambda^3} y_n \\ x_{n-1} & = \frac{1}{\lambda} y_{n-1} - \frac{1}{\lambda^2} y_n \\ \lambda x_n & = y_n \end{cases}$$

Vậy $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} & \cdots & \cdots & (-1)^{n-1} \frac{1}{\lambda^n} \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} & \cdots & (-1)^{n-2} \frac{1}{\lambda^{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$

Câu 4. (CĐSP BR-VT)

Cho các đẳng thức $\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$

a) Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

b) Tính giá trị của $P = \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right)$.

Đáp án. a) Từ giả thiết ta suy ra $ax + by + bx + cy + cx + ay = a + b + c$

Tương đương $(a + b + c)(x + y - 1) = 0$

Tương đương hoặc $a + b + c = 0$ hoặc $x + y - 1 = 0$.

*) Với $a + b + c = 0$,

Ta có $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$$\begin{aligned}
&= (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 + c^3 - 3abc \\
&= [(a + b)^3 + c^3] - 3ab(a + b + c) \\
&= (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2 - 3ab] \\
&= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)
\end{aligned}$$

nên $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = 0$, suy ra điều phải chứng minh.

*) Với $x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - x$, thay vào hệ, sau một số biến đổi dẫn đến $a = b = c$, suy ra điều phải chứng minh.

b) Vì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Tương đương với: hoặc $a + b + c = 0$ hoặc $a = b = c$.

*) Nếu $a + b + c = 0$ thì $A = \dfrac{a + b}{b} \cdot \dfrac{b + c}{c} \cdot \dfrac{c + a}{a} = \dfrac{-c}{b} \cdot \dfrac{-a}{c} \cdot \dfrac{-b}{a} = -1$

*) Nếu $a = b = c$ thì $A = (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Vậy A nhận hai giá trị là 8 và -1.

Câu 5. (CĐSP BR-VT)

Tìm hạng của ma trận $B = \begin{pmatrix} a & \cdots & & a & b \\ \vdots & & & b & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & b & & & \vdots \\ b & a & & \cdots & a \end{pmatrix}$

Đáp án. Đổi cột 1 cho cột n, cột 2 cho cột $n - 2, \ldots$ khi đó ma trận B được đưa về ma trận A là $A = \begin{pmatrix} b & \cdots & & a & a \\ \vdots & b & & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & & b & \vdots \\ a & a & & \cdots & b \end{pmatrix}$

Đặt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, khi đó

$$Ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ax_1 + bx_2 + \cdots + bx_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ bx_1 + bx_2 + \cdots + ax_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - b)x_1 + b(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a - b)x_n + b(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = 0 \end{cases}$$

*) Nếu $a = b$ thì $A = \begin{pmatrix} a & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a & \cdots & a \end{pmatrix}$ nên $\begin{cases} rankA = 0 \text{ khi } a = 0 \\ rankA = 1 \text{ khi } a \neq 0 \end{cases}$

*) Nếu $a \neq b$ thì $\begin{cases} x_1 = x_2 = \cdots = x_n \\ (a - b + nb)(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = 0 \end{cases}$

+) Nếu $a-b+nb\neq 0$ thì

$$\begin{cases} x_1=x_2=\cdots=x_n \\ (a-b+nb)(x_1+x_2+\cdots+x_n)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n=0.$$

Vậy hệ $Ax=0$ chỉ có nghiệm tầm thường nên $rankA=n$.

+) Nếu $a-b+nb=0$ thì

$$\begin{cases} x_1=x_2=\cdots=x_n \\ (a-b+nb)(x_1+x_2+\cdots+x_n)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n.$$ Vậy hệ không gian nghiệm là một chiều, nên $rankA=n-1$.

Câu 1. (ĐH BR-VT)

Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn hệ $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=1 \\ a^3+b^3+c^3=1 \end{cases}$

Tính $P=a^{2008}+b^{2009}+c^{2010}$.

Đáp án. Ta có

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2+c^3-3abc$

$=[(a+b)^3+c^3]-3ab(a+b+c)=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab]$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

nên $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

Vậy $1-3abc=1-ab-bc-ca$

Hay $3abc=ab+bc+ca$ (1)

Mặt khác $(a+b+c)^2=1$

Tương đương $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1$

Hay $ab+bc+ca=0$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow abc=0$ tương đương với hoặc $a=0$ hoặc $b=0$ hoặc $c=0$.

Từ đây lần lượt suy ra các nghiệm của hệ là: $(a,b,c)=(0,0,1);(0,1,0);(1,0,0)$.

Vậy $P=a^{2008}+b^{2009}+c^{2010}=1$.

Câu 2. (ĐH BR-VT)

Cho hàm phân thức tuyến tính $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Kí hiệu $f_2(x)=f(f(x)); f_3(x)=f(f(f(x)));\dots;f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$. Tìm dạng của $f_n(x)$.

Đáp án. Ta có $f_2(x)=\dfrac{a\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)+b}{c\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)+d}=\dfrac{(a^2+bc)x+ab+bd}{(ac+cd)x+bc+d^2}=\dfrac{mx+n}{px+q}$

Để ý rằng $\begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2=A^2$ với $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Bằng quy nạp ta dễ dàng nhận được $f_n(x)=\dfrac{a_nx+b_n}{c_nx+d_n}$ với $\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^n$

Câu 3. (ĐH BR-VT)

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \cdots & n^2 \end{bmatrix}$ trong đó n là số tự nhiên lớn hơn 1.

a) Tìm $rankA$.

b) Ta có thể hoán vị các phần tử trong A để nhận được ma trận B mà $rankB = n$ hay không?

Đáp án. a) Xét $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \cdots & n^2 \end{bmatrix}$. Lấy cột k nhân với (-1) rồi cộng vào cột $k+1$ và thực hiện từ $k = n-1$ đến $k = 1$ ta được $\det A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ n^2-n+1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

Vậy $\operatorname{rank} A = 2$.

b) Xét $B = \begin{bmatrix} \text{lẻ} & & \text{bất kỳ} \\ & \ddots & \\ \text{chẵn} & & \text{lẻ} \end{bmatrix}$

thì $\det B = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 \text{ hoặc } 1 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = 1(\mod 2)$.

Vậy $\det B \neq 0$ suy ra $\operatorname{rank} B = n$.

Câu 4. (ĐH BR-VT)

Cho A là ma trận cấp 3×4, B là ma trận cấp 4×2, C là ma trận cấp 2×3 thỏa mãn

$ABC = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tính CAB và chứng minh rằng $(BCA)^2 = BCA$.

Đáp án. Đặt $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ thì $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = M$. Vậy

$ABC = M = M^2 = (ABC)^2$. Dễ thấy $\operatorname{rank} M = 2$ nên

$2 = \operatorname{rank} M = \operatorname{rank} ABC = \operatorname{rank}[(ABC)^2] = \operatorname{rank}[AB(CAB)C] \leq \operatorname{rank} CAB$. Nhưng CAB là ma trận cấp 2 nên $\operatorname{rank} CAB \leq 2$. Vậy $\operatorname{rank} CAB = 2$.

Sau đó

$(CAB)^2 = C(ABC)AB = C(ABC)^2AB = (CAB)(CAB)(CAB) = (CAB)^3 \Rightarrow (CAB)^2 = (CAB)^3$. Vì CAB là ma trận cấp 2 có $\operatorname{rank} CAB = 2$ nên CAB khả nghịch, do đó từ $(CAB)^2 = (CAB)^3 \Rightarrow CAB = E_2$.

Cuối cùng $(BCA)^2 = B(CAB)CA = BE_2CA = BCA$.

Câu 5. (ĐH BR-VT)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 = 4 \end{cases}$

Đáp án. Ta có $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

suy ra $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

suy ra $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

suy ra $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

suy ra $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -6 & -6 \end{bmatrix}$

suy ra $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{-15}{2} & \frac{-13}{2} \end{bmatrix}$

suy ra $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{-15}{2} & \frac{-13}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 15 & 13 \end{bmatrix}$

suy ra $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 17 \end{bmatrix}$

Vậy lúc này hệ tương đương với

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 = 4 \\ x_2 - 3x_5 = -4 \\ 2x_3 - 3x_5 = -1 \\ x_4 - x_5 = -2 \\ 17x_5 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

Câu 1. (Học Viện KTQS)(Th.s Phạm Thế Anh)

Giả sử tất cả các nghiệm của đa thức $P(x)$ bậc n ($n \geq 2$) đều là nghiệm thực và phân biệt. Chứng minh rằng đa thức

$$Q(x) = nP(x)P''(x) - (n-1)(P'(x))^2$$

không có nghiệm thực.

Đáp án. Phương trình $Q(x) = 0$ tương đương với $n\dfrac{P(x)P''(x) - (P'(x))^2}{(P(x))^2} + \left[\dfrac{P'(x)}{P(x)}\right]^2 = 0$

Nhận thấy $\dfrac{P(x)P''(x) - (P'(x))^2}{(P(x))^2}$ chính là đạo hàm của $\dfrac{P'(x)}{P(x)}$. Do đó nếu gọi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là n nghiệm phân biệt của $P(x)$, thì khi đó phương trình trên tương đương với: $-n\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(x-x_k)^2} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(x-x_k}\right)^2 = 0$, tức là $n\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(x-x_k)^2} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(x-x_k}\right)^2$

Nếu đẳng thức trên đúng với số thực x, theo BĐT Cauchy, ta có trường hợp BĐT đạt dấu $'' ='',$ (áp dụng với $a_k = 1, b_k = \dfrac{1}{x-x_k}, k = 1, 2, \ldots, n$).

Khi đó ta nhận được $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$, tức là $x_1, x_2 = \cdots = x_n$, điều này mâu thuẫn với giả thiết. Do đó $Q(x)$ không có nghiệm thực.

Câu 2. ((Học Viện KTQS)(Th.s Nguyễn Quốc Tuấn)

Tìm một ma trận A cấp 4 sao cho $A^{2009} = B$ với $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Đáp án. Chéo hóa ma trận B ta nhận được $P^{-1}BP = D = \mathrm{diag}(-2, 2, 2, 2)$ (D là ma trận đường chéo) với $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Chọn $C = diag(-\sqrt[2009]{2}, \sqrt[2009]{2}, \sqrt[2009]{2}, \sqrt[2009]{2})$. Như vậy $A = PCP^{-1}$ là một trong các ma trận cần tìm.

Câu 3. (Học Viện KTQS)(Th.s Nguyễn Quốc Tuấn)

Cho ma trận $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ với $\mathrm{rank}(B) = 1$. Chứng minh rằng:

$$\det(A-B)(A+B) \leq \det(A^2).$$

Đáp án. Nếu A khả nghịch ta có

$\det(A-B)\det(A+B) = \det^2(A)\det(E-A^{-1}B)\det(E+A^{-1}B) = \det^2(A)(1 - tr(A^{-1}B)^1) \le \det^2(A)$

Nếu A không khả nghịch

Xét $\lambda \neq \lambda_i$ với λ_i là giá trị riêng của A. Ta có:

$\det(A-\lambda E-B)\det(A-\lambda E+B) \le \det^2(A-\lambda E)$.

Xét đa thức $P_{2n}(\lambda) = \det(A-\lambda E-B)\det(A-\lambda E+B) - \det^2(A-\lambda E)$. Nhận thấy $P_{2n}(\lambda)$ là đa thức bậc không quá $2n$ và $P_{2n}(\lambda) \le 0$ tại mọi λ không là giá trị riêng của A. Rõ ràng tại λ_i giá trị đa thức không thể dương. Do vậy $P_{2n}(0) \le 0$.

Câu 4. (Học Viện KTQS)(Th.s Đỗ Anh Tuấn)

Đặt $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$. Tính định thức sau:

$$\Delta = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} & y^n \end{vmatrix}$$

Đáp án. Ta phân tích Δ thành tích của hai định thức:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(y-x_i)\prod_{i>j}(x_i-x_j)^2$$

Câu 5. (Học Viện KTQS)(Th.s Đỗ Anh Tuấn)

Tìm tất cả các ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ sao cho:

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : A^k = \begin{bmatrix} a^k & b^k \\ c^k & d^k \end{bmatrix}$$

Đáp án.

Câu 6. (Học Viện KTQS)(Th.s Đào Trọng Quyết)

Cho ma trận $B \in M_n(\mathbb{R})$ với $\text{rank}(B) = 1$. Chứng minh rằng: $\det(E+B) = 1 + tr(B)$ với E là ma trận đơn vị cấp $n, tr(B)$ là vết của ma trận B.

Đáp án. Do hạng của B bằng 1 nên đa thức đặc trưng chỉ có hai số hạng bậc n và bậc $n-1$, sau đó thay $\lambda = -1$ vào đa thức đặc trưng ta có điều phải chứng minh.

Câu 1. (ĐHSP TpHCM) Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ có tính chất với mọi vectơ cột $X \in \mathbb{R}^n$ nếu $AX = 0$ thì $BX = 0$. Chứng minh rằng tồn tại ma trận $C \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $B = CA$.

Đáp án. Giả sử $\text{rank}\, A = r$ và $u_1, u_2, \ldots, u_{n-r} \in \mathbb{R}^n$ là các vectơ cột là cơ sở của không gian nghiệm của hệ $AX = 0$ (1). Gọi U là ma trận cấp $n \times (n-r)$ với các cột của nó là $u_1, u_2, \ldots, u_{n-r}$. Ta có $AU = 0 \Rightarrow U^tA^t = 0$. Xét hệ $U^tX = 0$ (2), vì

$\operatorname{rank} U^t = n - r$ nên không gian nghiệm của (2) có số chiều là r. Vì các cột của A^t đều là nghiệm của (2) và $\operatorname{rank} A^t = r$ nên các cột của A^t là hệ sinh của không gian nghiệm của (2).

Mặt khác, theo giả thiết $AU = 0 \Rightarrow BU = 0$, do dó $U^t B^t = 0$. Nghĩa là các cột của B^t là nghiệm của hệ (2) bởi vậy các cột của B^t biểu thị tuyến tính được qua các cột của A^t. Nghĩa là các dòng của B biểu thị tuyến tính được qua các dòng của A. Hay $B = CA$.

Câu 2. (ĐHSP TpHCM) Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ không khả nghịch, chứng minh rằng tồn tại ma trận $B \in M_n(\mathbb{R}), B \neq 0$ để $AB = BA = 0$.

Đáp án. Giả sử $\operatorname{rank}(A) = r < n$ khi đó bằng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng và cột ta có thể đưa được A về dạng ma trận chính tắc
$I_r = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ (ma trận trong khối đầu tiên là ma trận đơn vị vuông cấp r.)

Điều đó có nghĩa là tồn tại các ma trận $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$ không suy biến để $PAQ = I_r \Rightarrow A = P^{-1} I_r Q^{-1}$. Xét ma trận $J_r = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ma trận khối thứ 4 là ma trận đơn vị vuông cấp $n-r$). Đặt $B = QJ_rP$. Rõ ràng $B \neq 0 (\operatorname{rank} B = n-r)$ và $AB = P^{-1} I_r J_r P = P^{-1} O P = 0, BA = QJ_r I_r Q^{-1} = 0$.

Câu 3. (ĐHSP TpHCM) Cho $M \in M_n(\mathbb{R})$ là ma trận lũy linh. Chứng minh rằng $\det(A + M) = \det A$ với mọi $A \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa $AM = MA$.

Đáp án. Giả sử $M^k = 0$

1. Nếu $\det A = 0$ khi đó

$\det(A+M)^k = \det(A^k + \cdots + kAM^{k-1} + M^k) = \det A \cdot \det(A^{k-1} + \cdots + kM^{k-2}) = 0$

Do đó $\det(A + M) = 0 = \det A$.

2. Nếu $\det A \neq 0$ khi đó

$\det(A + M) = \det A \Leftrightarrow \det A \cdot \det(I + A^{-1}M) = \det A \Leftrightarrow \det(I + A^{-1}M) = 1$

Đặt $N = A^{-1}M$. Ta chứng minh $P_N(\lambda) = \det(N - \lambda I) = (-\lambda)^n$.

Thật vậy, giả sử $P_N(\lambda) \neq (-\lambda)^n$, khi đó tồn tại $\lambda_0 \in \mathbb{C}, \lambda_0 \neq 0$ là nghiệm của $P_n(\lambda)$. Gọi $c \in \mathbb{C}^n$ là vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ_0. Ta có $Nc = \lambda_0 c$, do đó $N^k c = \lambda_0^k \neq 0, \forall k$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $N = A^{-1}M$ lũy linh (do M lũy linh và $AM = MA$).

Vậy $P_N(\lambda) = \det(N - \lambda I) = (-\lambda)^n$. Do đó $\det(I + A^{-1}M) = \det(N + I) = P_N(-1) = 1$.

Câu 4. (ĐHSP TpHCM) Cho các đa thức $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa $f(x^{2010} + 2009) + xg(x^{2010} + 2009)$ chia hết cho $x^2 + x + 1$. Chứng minh rằng $f(x), g(x)$ đều chia hết cho $x - 2010$.

Đáp án. Đặt $F(x) = f(x^{2010} + 2009) + xg(x^{2010} + 2009)$ và giả sử α, β là hai nghiệm phức của $x^2 + x + 1$. Khi đó $\alpha^3 = \beta^3 = 1 \Rightarrow \alpha^{2010} = \beta^{2010} = 1$.

Từ đó ta có $F(\alpha) = f(2010) + \alpha g(2010) = 0$.

Tương tự $F(\beta) = f(2010) + \beta g(2010) = 0$. Do đó $f(2010) = 0, g(2010) = 0$. Bởi vậy $f(x), g(x)$ đều chia hết cho $x - 2010$.

Câu 1. (HV Quân Y)

Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ sao cho $d = \dfrac{a+b+c}{2}$, a, b, c khác nhau, hãy rút gọn biểu thức sau:

$$T = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)(b+c-a)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)(c+a-b)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)(a+b-c)}$$

Đáp án. Xét $P(x) = x^2$ và $Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$

Khi đó ta có $P(a) = a^2, P(b) = b^2$ và $P(c) = c^2$ do đó

$$P(x) = a^2 \cdot \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \cdot \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2 \cdot \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Chia $P(x)$ cho $Q(x)$ ta được

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x-a)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)(x-b)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)(x-c)}$$

Thay $x = d = \dfrac{a+b+c}{2}$ ta được

$$T = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)(b+c-a)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)(c+a-b)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)(a+b-c)}$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)}$$

Câu 2. (HV Quân Y)

Cho $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ có bậc $n \in \mathbb{N}$, sao cho $P(-1) \neq 0$ và $-\dfrac{P'(-1)}{P(-1)} \leq \dfrac{n}{2}$. Chứng minh rằng $P(x)$ có ít nhất một nghiệm có modul ≥ 1.

Đáp án. Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các nghiệm của $P(x)$ trong $\mathbb{C}$, khi đó tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho

$$P(x) = \lambda \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

Khi đó ta có công thức: $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i} \Rightarrow -\frac{P'(-1)}{P(-1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i + 1}$

Do đó $\dfrac{n}{2} + \dfrac{P'(-1)}{P(-1)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x_i + 1}\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - 1}{x_i + 1}$

Ta có $\dfrac{x_i - 1}{x_i + 1} = \dfrac{(x_i - 1)(\overline{x_i} + 1)}{|x_i + 1|^2} \Rightarrow Re\left(\dfrac{x_i - 1}{x_i + 1}\right) = \dfrac{|x_i|^2 - 1}{|x_i + 1|^2} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$

Vì $\dfrac{n}{2} + \dfrac{P'(-1)}{P(-1)} \in \mathbb{R}$ nên $\dfrac{n}{2} + \dfrac{P'(-1)}{P(-1)} = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|^2 - 1}{|x_i + 1|^2} \geq 0$.

Do đó tồn tại ít nhất một nghiệm x_k có $|x_k| \geq 1$.

Câu 3. (HV Quân Y)

Chứng minh rằng với mọi A là ma trận vuông cấp 3 thì:

$$A^2 = 0 \Leftrightarrow \{rank(A) \leq 1; Tr(A) = 0\}$$

Đáp án. (1) Chứng minh $A^2 = 0 \Rightarrow \{rank(A) \leq 1; Tr(A) = 0\}$

Ta có $A^2 = 0 \Rightarrow Im(A) \subset Ker(A) \Rightarrow dim(Im(A)) \leq dim(Ker(A))$

Do đó $rank(A) = dim(Im(A)) = 3 - dim(Ker(A)) \leq \dfrac{3}{2} \Rightarrow rank(A) \leq 1$

Do $rank(A) \leq 1$ nên tồn tại hai vectơ U, V sao cho $A = U^TV \Rightarrow Tr(A) = VU^T$

Vậy $0 = A^2 = U^TVU^TV = Tr(A).A \Rightarrow Tr(A) = 0$.

(2) Chứng minh $\{rank(A) \leq 1; Tr(A) = 0\} \Rightarrow A^2 = 0$

Do $rank(A) \leq 1$, theo trên ta có $A^2 = Tr(A).A = 0$.

Câu 4. (HV Quân Y) Cho A là ma trận phức vuông cấp n có $Tr(A^k) = 0\ \ \forall k = 1, 2, \ldots, n$. Chứng minh rằng A là ma trận lũy linh.

Đáp án. Gọi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của A

Khi đó dễ dàng chứng minh được $s_k = Tr(A^k) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k$

Từ giả thiết ta có hệ n phương trình: $s_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k = 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n$

Giả sử đa thức đặc trưng của A là: $P_n(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0$

Thay các nghiệm $\lambda_i (i = 1, 2, cdots, n)$ vào và cộng lại ta sẽ có $b_0 = 0$, do đó $P_n(\lambda)$ có nghiệm $\lambda = 0$, giả sử đó là $\lambda_n = 0$.

Ta có thể viết $P_n(\lambda) = \lambda P_{n-1}(\lambda) = \lambda[(-1)^n\lambda^{n-1} + b_{n-1}\lambda^{n-2} + \cdots + b_1]$

Trong đó các $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ là các nghiệm của $P_{n-1}(\lambda)$ và thỏa mãn hệ $n-1$ phương trình $s_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k = 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n-1$

Chứng minh tương tự trên ta có $b_1 = 0, b_2 = 0, \cdots, b_{n-1} = 0 \Rightarrow P_n(\lambda) = (-1)^n\lambda^n$

Ta lại có A là nghiệm của đa thức đặc trưng nên $A^n = 0 \Rightarrow A$ lũy linh.

Câu 5. (HV Quân Y)

Tính $det(A^n + B^n)$ với A, B là hai ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Đáp án. Ta có $A = D + E$ với $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D^2$.

Do đó $A^n = (D+E)^n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k D^k + E = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k D + E$

Do $B = A^T \Rightarrow B^n = (A^n)^T = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k D^T + E \Rightarrow A^n + B^n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k (D + D^T) + 2E$

Vậy $det(A^n + B^n) = \begin{bmatrix} 2^{n+1} & 2^n - 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{bmatrix} = 2^{n+1}[2^{n+2} - (2^n - 1)^2]$

Câu 6. (HV Quân Y) Tính định thức $\begin{vmatrix} d & a & b & c \\ a & d & c & b \\ b & c & d & a \\ c & b & a & d \end{vmatrix}$

Đáp án. Dễ thấy định thức trên T là một đa thức bậc 4 của d, có hệ số bậc cao nhất là 1.

Cộng tất cả vào dòng 1, ta thấy khi $a + b + c + d = 0$ thì $T = 0$.

Cộng dòng 2 vào dòng 1, dòng 4 vào dòng 3, ta thấy khi $a + d - b - c = 0$ thì $T = 0$

Cộng dòng 3 vào dòng 1, dòng 4 vào dòng 2, ta thấy khi $b + d - a - c = 0$ thì $T = 0$

Cộng dòng 4 vào dòng 1, dòng 3 vào dòng 2, ta thấy khi $c + d - a - b = 0$ thì $T = 0$

Do đó $T = (a + b + c + d)(a + d - b - c)(b + d - a - c)(c + d - a - b)$

Chương 3

Đề thi Olympic các năm 2007-2010

3.1 Đề thi Olympic môn Giải tích các năm 2007-2010

3.1.1 Đề thi olympic Toán sinh viên lần thứ XV (2007), Môn: Giải tích

Câu 1. Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định như sau $x_0 = 2007, \quad x_n = -\frac{2007}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} x_k$, $n \geqslant 1$. Tính tổng $S = \sum\limits_{n=0}^{2007} 2^n x_n$.

Câu 2. Dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi công thức $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + bu_n}{c}, \quad u_1 = a$, ở đây a, b, c là các số thực. Biết rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha, \quad \alpha \neq b - c$. Tìm $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{k} \frac{u_n}{u_{n+1}+b-c}$.

Câu 3. Giả thiết rằng hàm số $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ liên tục, và tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \alpha \int\limits_0^x f(t)dt, \qquad \text{với mọi} \quad x \geqslant 0.$$

Chứng minh rằng $f(x) \equiv 0$.

Câu 4. Tính tích phân

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \ln\left(\sin(2007x) + \sqrt{1 + \sin^2(2007x)}\right) dx.$$

Câu 5. Tìm hàm số $f(x)$ sao cho với mọi $x \neq 1$ thỏa mãn điều kiện

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2f(x) + \frac{3}{x-1}.$$

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $[0, +\infty)$. Biết rằng

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) + f'(x)] = A.$$

Chứng minh $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 0, \quad f'(x) \leqslant 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

1) Nếu $a > 0$ thì $\quad \int_0^a f(x)dx. \int_0^a xf^2(x)dx \leqslant \int_0^a xf(x)dx. \int_0^a f^2(x)dx.$

2) Nếu $a < 0$ thì $\int_0^a f(x)dx . \int_0^a xf^2(x)dx \geqslant \int_0^a xf(x)dx . \int_0^a f^2(x)dx.$

3.1.2 Đề thi olympic Toán sinh viên lần thứ XVI (2008), Môn: Giải tích

Câu 1. Cho dãy số $\{a_n\}$ được xác định như sau:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + a_n, \ n = 1, 2, \ldots$$

Tính a_{2008}?

Câu 2. Tính

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^{2008} + 2^{2008} + \cdots + n^{2008}}{n^{2009}}.$$

Câu 3. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0, \pi]$ với $f(0) = f(\pi) = 0$ và thoả mãn điều kiện

$$|f'(x)| < 1, \ \forall x \in (0, \pi).$$

Chứng minh rằng

(i) $\exists\, c \in (0, \pi)$ sao cho $f'(c) = \tan f(c)$.

(ii) $|f(x)| < \dfrac{\pi}{2}$, $\forall x \in (0, \pi)$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ và thoả mãn điều kiện

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 1, \ \forall x, y \in [0, 1].$$

Chứng minh rằng $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Câu 5. Giả sử $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[0, 1]$ với $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ và khả vi trong $(0, 1)$. Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in (0, 1)$, luôn tồn tại $x_1, x_2 \in (0, 1)$, sao cho

$$\frac{\alpha}{f'(x_1)} + \frac{1-\alpha}{f'(x_2)} = 1.$$

Câu 6. Cho hàm số $g(x)$ có $g''(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giả sử hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

$$f(0) > g(0), \ \int_0^\pi f(x)dx < g(0)\pi + \frac{g'(0)\pi^2}{2}.$$

Chứng minh rằng tồn tại điểm $c \in [0, \pi]$ sao cho $f(c) = g(c)$.

3.1.3 Đề thi olympic Toán sinh viên lần thứ XVI (2009), Môn: Giải tích

Bài toán 3.1. *Giả sử dãy số* $\{x_n\}$ *được xác định theo công thức*

$$\begin{cases} x_1 = 1; \;\; x_2 = 1; \\ x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2}), \;\; n = 3, 4, \dots . \end{cases}$$

Tính x_{2009}*?*

Bài toán 3.2. Cho hàm số $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ có đạo hàm cấp hai liên tục và $f''(x) > 0$ trên $[0,1]$. Chứng minh rằng

$$2\int_0^1 f(t)dt \geq 3\int_0^1 f(t^2)dt - f(0).$$

Bài toán 3.3. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện

$$\begin{cases} f(x) \leq 4 + 2009x, \;\; \forall x \in \mathbb{R}, \\ f(x+y) \leq f(x) + f(y) - 4, \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Bài toán 3.4. Giả sử $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện

$$f(g(x)) \equiv g(f(x)), \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng nếu phương trình $f(x) = g(x)$ không có nghiệm thực, thì phương trình $f(f(x)) = g(g(x))$ cũng không có nghiệm thực.

Bài toán 3.5. Cho hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ xác định theo công thức

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, \;\; x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}, \;\; y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}, \;\; n = 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng $x_n y_n \in (2,3), \;\; n = 2, 3, \dots$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Bài toán 3.6. Thí sinh làm một trong hai câu sau:

a) Cho $P(x)$ là đa thức bậc n với hệ số thực. Chứng minh rằng phương trình $2^x = P(x)$ có không quá $n+1$ nghiệm thực.

b) Cho $f(x) - x$ và $f(x) - x^3$ là những hàm số đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng hàm số $f(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ cũng là hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$.

3.1.4 Đề thi olympic Toán sinh viên lần thứ XVIII (2010), Môn: Giải tích

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \ln(x+1)$.

a) Chứng minh rằng với mọi $x > 0$, tồn tại duy nhất số thực c thỏa mãn điều kiện $f(x) = xf'(c)$ mà ta ký hiệu là $c(x)$.

b) Tìm $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{c(x)}{x}$.

Câu 2. Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi:

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = x_n\big(1 + x_n^{2010}\big), n \geq 1.$$

Tìm

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{x_1^{2010}}{x_2} + \frac{x_2^{2010}}{x_3} + \cdots + \frac{x_n^{2010}}{x_{n+1}}\Big).$$

Câu 3. Cho $a \in \mathbb{R}$ và hàm số $f(x)$ khả vi trên $[0,\infty)$ thỏa mãn các điều kiện $f(0) \geq 0$ và $f'(x) + af(x) \geq 0,\ \ \forall x \in [0,\infty)$.

Chứng minh rằng $f(x) \geq 0,\ \ \forall x \geq 0$.

Câu 4. Cho hàm $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0,1]$. Giả sử rằng

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $f'(c) = 6$.

Câu 5. Cho đa thức $P(x)$ bậc n với hệ số thực sao cho $P(-1) \neq 0$ và $-\dfrac{P'(-1)}{P(-1)} \leq \dfrac{n}{2}$. Chứng minh rằng $P(x)$ có ít nhất một nghiệm x_0 với $|x_0| \geq 1$.

Câu 6. Chọn một trong hai câu sau:

6a. Tìm tất cả các hàm số dương $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0,1]$ thỏa mãn các điều kiện $f(1) = ef(0)$ và

$$\int_0^1 \Big(\frac{f'(x)}{f(x)}\Big)^2 dx \leq 1.$$

6b. Tìm tất cả các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

$$f(1) = 2010,\ \ f(x+y) = 2010^x f(y) + 2010^y f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm*

3.2 Đề thi Olympic môn Đại số các năm 2007-2010

3.2.1 Đề thi olympic Toán sinh viên lần thứ XV (2007), Môn: Đại số

Câu 1. Cho ma trận

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tìm tất cả các ma trận vuông X cấp 5 sao cho $AX = XA$.

Câu 2. Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn

$$AB + aA + bB = 0$$

trong đó a, b là hai số thực thỏa mãn $ab \neq 0$. Chứng minh $AB = BA$.

Câu 3. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn

$$1 + P(x) = \frac{1}{2}[P(x-1) + P(x+1)].$$

Câu 4. Cho A là ma trận cấp n có dạng $A = (a_{ij})_{n\times n}$, trong đó phần tử $a_{ij} = i+j$, $(i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n)$. Tìm $\operatorname{rank} A$.

Câu 5. Cho $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ và B là các ma trận vuông cấp 2 khả nghịch. Chứng minh rằng ma trận

$$D = \begin{pmatrix} aA & bB \\ cA & dB \end{pmatrix}$$

khả nghịch.

Câu 6. Cho ma trận vuông $A = (a_{ij})_{r\times r}$ với các phần tử $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $(i, j = 1, 2, \dots, r)$ và tổng các phần tử trên một hàng đều bằng $n \quad (n \in \mathbb{Z})$ tức là

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ij} = n, \qquad (1 \leqslant i \leqslant r).$$

Chứng minh rằng n là ước của $\det A$.

Câu 7. Cho A là ma trận vuông cấp n, có đa thức tối thiểu $P_A(t) = t^k, \quad k \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng tồn tại ma trận vuông B cấp n sao cho $ABA = A$.

3.2.2 Đề thi olympic Toán sinh viên lần thứ XVI (2008), Môn: Đại số

Câu 1. Giả sử a_0, d là các số thực cho trước và dãy $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ lập thành cấp số cộng công sai d. Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_0 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

Câu 2. Cho A là ma trận thực, vuông cấp 2 thoả mãn điều kiện $\det A < 0$. Chứng minh rằng tồn tại hai số thực phân biệt λ_1, λ_2 và hai ma trận A_1, A_2 sao cho

$$A^n = \lambda_1^n A_1 + \lambda_2^n A_2, \quad \forall n = 1, 2 \ldots$$

Câu 3. Cho A là ma trận thực cấp 3, có vết (vết là tổng các phần tử trên đường chéo chính) là 8. Tổng các phần tử trên mỗi hàng của A bằng 4 và $\det A = 16$. Xác định các giá trị riêng của A.

Câu 4. Cho các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_{2008}$. Chứng minh rằng tồn tại các ma trận thực, vuông $A_1, A_2, \ldots, A_{2008}$ cấp n $(n > 1)$ thoả mãn điều kiện

$$\det A_k = a_k,\ k = 1, \ldots, 2008,\ \det\left(\sum_{k=1}^{2008} A_k\right) = 2009.$$

Câu 5. Cho A là ma trận khả nghịch, vuông cấp n, ma trận A, A^{-1} có các phần tử là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu A có n giá trị riêng đều là các số thực thì $|\det(A + A^{-1})| \geqslant 2^n$.

Câu 6. Tồn tại hay không tồn tại đa thức $P(x)$ bậc 2008 thỏa mãn điều kiện $P(k) = 2^k$ với $k = 1, 2, \ldots, 2008$.

3.2.3 Đề thi olympic Toán sinh viên lần thứ XVII (2009), Môn: Đại số

Câu 1. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn các đẳng thức sau

$$\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = 2 \\ x^3 + y^3 + z^3 & = 0 \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng với mọi số tự nhiên n ta luôn có $x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} = 0$.

Câu 2. Tồn tại hay không một ma trận thực A vuông cấp 2 sao cho

$$A^{2010} = \begin{pmatrix} -2008 & 2010 \\ 0 & -2009 \end{pmatrix}?$$

Câu 3. Cho A, B, C là các ma trận vuông cấp n sao cho C giao hoán với A và B, $C^2 = E$ (ma trận đơn vị) và $AB = 2(A+B)C$.

a) Chứng minh rằng $AB = BA$.

b) Nếu có thêm điều kiện $A+B+C = 0$, hãy chứng tỏ $\operatorname{rank}(A-C)+\operatorname{rank}(B-C) = n$.

Câu 4. Tính A^{2009}, trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Câu 5. Tìm tất cả các ma trận vuông A cấp n ($n \geq 2$) sao cho với mọi ma trận vuông B cấp n, ta đều có $\det(A+B) = \det A + \det B$.

Câu 6. Thí sinh chọn một trong hai câu sau:

a) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 = 1 \end{cases}$$

b) Ứng với mỗi đa thức $P(x)$ với hệ số thực và có nhiều hơn một nghiệm thực, gọi $d(P)$ là khoảng cách nhỏ nhất giữa hai nghiệm thực bất kỳ của nó. Giả sử các đa thức với hệ số thực $P(x)$ và $P(x) + P'(x)$ đều có bậc k ($k > 1$) và có k nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng $d(P + P') \geq d(P)$.

3.2.4 Đề thi olympic Toán sinh viên lần thứ XVIII (2010), Môn: Đại số

Câu 1. Cho A, B là các ma trận vuông cấp 2010 với hệ số thực sao cho

$$\det A = \det(A+B) = \det(A+2B) = \cdots = \det(A+2010B) = 0.$$

(i) Chứng minh rằng $\det(xA + yB) = 0$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) Tìm ví dụ chứng tỏ kết luận trên không còn đúng nếu chỉ có

$$\det A = \det(A+B) = \det(A+2B) = \cdots = \det(A+2009B) = 0.$$

Câu 2. Cho $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ là các dãy số được xác định bởi: $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ và $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= -u_n - 7v_n + 5w_n, \\ v_{n+1} &= -2u_n - 8v_n + 6w_n, \\ w_{n+1} &= -4u_n - 16v_n + 12w_n. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $v_n - 2$ là số nguyên chia hết cho 2^n.

Câu 3.

(i) Chứng minh rằng ứng với mỗi số n nguyên dương, biểu thức $x^n + y^n + z^n$ có thể biểu diễn dưới dạng đa thức $P_n(s, p, q)$ bậc không quá n của các biến $s = x + y + z$, $p = xy + yz + zx$, $q = xyz$.

(ii) Hãy tìm tổng các hệ số của đa thức $P_{2010}(s, p, q)$.

Câu 4. Xác định các đa thức thực $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$P(x)P(x^2) = P(x^3 + 2x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Câu 5. Chọn một trong hai câu sau:

5a. Cho A là ma trận thực, vuông cấp $n \geq 2$, có tổng các phần tử trên đường chéo bằng 10 và $\operatorname{rank} A = 1$. Tìm đa thức đặc trưng và đa thức tối tiểu của A (tức đa thức $p(t) \neq 0$ bậc nhỏ nhất với hệ số của lũy thừa bậc cao nhất bằng 1, sao cho $p(A) = 0$).

5b. Cho A, B, C là các ma trận thực, vuông cấp n, trong đó A khả nghịch và đồng thời giao hoán với B và C. Giả sử $C(A + B) = B$. Chứng minh rằng B và C giao hoán với nhau.

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Chương 4

Đáp án olympic Toán sinh viên lần thứ XVIII (2010)

4.1 Môn: Giải tích

g **Câu 1.** Cho hàm số $f(x) = \ln(x+1)$.

a) Chứng minh rằng với mọi $x > 0$, tồn tại duy nhất số thực c thỏa mãn điều kiện $f(x) = xf'(c)$ mà ta ký hiệu là $c(x)$.

b) Tìm $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{c(x)}{x}$.

Giải.

a) Yêu cầu bài toán tương đương với việc chứng minh phương trình
$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{1}{c+1}$$
có nghiệm duy nhất c với mọi $x > 0$. Ta có thể giải trực tiếp được
$$c = \frac{x}{\ln(x+1)} - 1.$$

b) Ta có thể tính giới hạn
$$\lim_{x\to 0+} \frac{c(x)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\dfrac{x}{\ln(x+1)} - 1}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$$
bằng cách sử dụng công thức Taylor: $\ln(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$ hoặc dùng quy tắc L'Hopitale:
$$\lim_{x\to 0+} \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \lim_{x\to 0+} \frac{x}{\ln(1+x)}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{1 - \dfrac{1}{1+x}}{2x} \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\dfrac{1}{1+x}} = \frac{1}{2}.$$

Câu 2. Cho dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi:
$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = x_n\big(1 + x_n^{2010}\big),\ n = 1, 2, \ldots$$

Tìm

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{x_1^{2010}}{x_2}+\frac{x_2^{2010}}{x_3}+\cdots+\frac{x_n^{2010}}{x_{n+1}}\Big).$$

Giải. Với mỗi $k\geq 1$, ta có

$$\frac{x_k^{2010}}{x_{k+1}}=\frac{x_k^{2011}}{x_kx_{k+1}}=\frac{x_{k+1}-x_k}{x_kx_{k+1}}=\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}.$$

Suy ra

$$\Big(\frac{x_1^{2010}}{x_2}+\frac{x_2^{2010}}{x_3}+\cdots+\frac{x_n^{2010}}{x_{n+1}}\Big)=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{k+1}}.$$

Rõ ràng $\{x_n\}$ là dãy tăng. Nhận xét rằng $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$. Suy ra giới hạn cần tính bằng 1.

Câu 3. Cho $a\in\mathbb{R}$ và hàm số $f(x)$ khả vi trên $[0,\infty)$ thỏa mãn các điều kiện $f(0)\geq 0$ và

$$f'(x)+af(x)\geq 0,\forall x\in[0,\infty).$$

Chứng minh rằng

$$f(x)\geq 0,\forall x\geq 0.$$

Giải. Từ giả thiết ta có

$$e^{ax}[f'(x)+af(x)]\geq 0,\forall x\in[0,\infty),$$

hay

$$[e^{ax}f(x)]'\geq 0,\forall x\in[0,\infty),$$

suy ra

$$e^{ax}f(x)\geq f(0)\geq 0,\forall x\in[0,\infty),$$

tức

$$f(x)\geq 0,\forall x\in[0,\infty).$$

Câu 4. Cho hàm $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0,1]$. Giả sử rằng

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=1.$$

Chứng minh rằng tồn tại điểm $c\in(0,1)$ sao cho $f'(c)=6$.

Giải. Nhận xét rằng hàm số $g(x)=6x-2$ thỏa mãn các điều kiện

$$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 xg(x)dx=1,$$

suy ra

$$\int_0^1 [f(x) - g(x)]dx = 0.$$

Hàm $h(x) = f(x) - g(x)$ liên tục trên $[0,1]$ và có tích phân $\int_0^1 h(x)dx = 0$, nên không thể xảy ra trường hợp $h(x) > 0$,$\forall x \in (0,1)$ hoặc trường hợp $h(x) < 0$, $\forall x \in (0,1)$.

Như thế phương trình $h(x) = 0$ phải có ít nhất một nghiệm trong $(0,1)$.

Giả sử rằng $h(x) = 0$ chỉ có một nghiệm $x = a \in (0,1)$. Xảy ra hai khả năng sau:

+) Nếu $h(x) < 0, \forall x \in (0,a)$, thì $h(x) > 0, \forall x \in (a,1)$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xf(x)dx - 1 &= \int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 xg(x)dx = \int_0^1 x[f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 xh(x)dx \\
&= \int_0^a xh(x)dx + \int_a^1 xh(x)dx > \int_0^a ah(x)dx + \int_a^1 ah(x)dx \\
&= a\Big[\int_0^a h(x)dx + \int_a^1 h(x)dx\Big] = a\int_0^1 h(x)dx = 0.
\end{aligned}$$

Suy ra $\int_0^1 xf(x)dx > 1$, mâu thuẫn với giả thiết của đề bài!

+) Nếu $h(x) > 0, \forall x \in (0,a)$, thì $h(x) < 0, \forall x \in (a,1)$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xf(x)dx - 1 &= \int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 xg(x)dx = \int_0^1 x[f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 xh(x)dx \\
&= \int_0^a xh(x)dx + \int_a^1 xh(x)dx < \int_0^a ah(x)dx + \int_a^1 ah(x)dx \\
&= a\Big[\int_0^a h(x)dx + \int_a^1 h(x)dx\Big] = a\int_0^1 h(x)dx = 0.
\end{aligned}$$

Suy ra $\int_0^1 xf(x)dx < 1$, mâu thuẫn với giả thiết của đề bài!

Vậy $h(x) = 0$ phải có ít nhất hai nghiệm trong $(0,1)$.

Giả sử hai nghiệm đó là $a, b \in (0,1)$ và $a < b$.

Ta có $h(a) = h(b) = 0$, nên $f(b) - f(a) = g(b) - g(a)$.

Theo định lý Lagrange tồn tại $c \in (a,b) \subset (0,1)$, sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = 6.$$

Câu 5. Cho đa thức $P(x)$ bậc n với hệ số số thực sao cho $P(-1) \neq 0$ và $-\dfrac{P'(-1)}{P(-1)} \leq \dfrac{n}{2}$. Chứng minh rằng $P(x)$ có ít nhất một nghiệm x_0 với $|x_0| \geq 1$.

Giải. Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các nghiệm của $P(x)$ trong $\mathbb{C}$, khi đó tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho

$P(x) = \lambda \prod\limits_{i=1}^{n}(x - x_i)$. Khi đó ta có công thức

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i} \Rightarrow -\frac{P'(-1)}{P(-1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i + 1}.$$

Do đó

$$\frac{n}{2} + \frac{P'(-1)}{P(-1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x_i+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - 1}{x_i + 1}.$$

Ta có

$$\frac{x_i - 1}{x_i + 1} = \frac{(x_i - 1)(\overline{x_i} + 1)}{|x_i + 1|^2},$$

suy ra

$$\mathrm{Re}\left(\frac{x_i - 1}{x_i + 1}\right) = \frac{|x_i|^2 - 1}{|x_i + 1|^2}, \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Vì $\dfrac{n}{2} + \dfrac{P'(-1)}{P(-1)} \in \mathbb{R}$ nên

$$\frac{n}{2} + \frac{P'(-1)}{P(-1)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|^2 - 1}{|x_i + 1|^2} \geq 0.$$

Do đó tồn tại ít nhất một nghiệm x_0 có $|x_0| \geq 1$.

Câu 6a. Tìm tất cả các hàm số dương $f(x)$ khả vi liên tục trên $[0,1]$ sao cho $f(1) = e.f(0)$ và

$$\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \leq 1.$$

Giải. Ta có

$$0 \leq \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - 1\right)^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx - 2\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx + 1$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx - 2\ln f(x)\Big|_0^1 + 1$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx - 2\ln\frac{f(1)}{f(0)} + 1$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx - 1.$$

Từ đó, ta có

$$\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \geq 1.$$

Mặt khác, theo giả thiết thì

$$\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \leq 1,$$

nên

$$\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - 1\right)^2 dx = 0.$$

Do f là hàm khả vi liên tục trên $[0,1]$, ta được

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1, \forall x \in [0,1]$$

hay $f(x) = f'(x), \forall x \in [0,1]$, do đó $f(x) = c.e^x, c > 0$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn.

Câu 6b. Ta có $f(x+y) = 2010^x f(y) + 2010^y f(x),\ \forall x,y \in \mathbb{R}$, hay

$$2010^{-(x+y)} f(x+y) = 2010^{-y} f(y) + 2010^{-x} f(x),\ \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Đặt $2010^{-x} f(x) = g(x)$. Ta có

$$g(x+y) = g(x) + g(y),\ \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Đây chính là phương trình hàm Cauchy quen biết, có nghiệm là $g(x) = ax$. Suy ra $f(x) = ax2010^x$. Từ điều kiện $f(1) = 2010$ đã cho suy ra $a = 1$ và $f(x) = 2010^x x$.

Thử lại, ta thấy thỏa mãn điều kiện bài toán.

4.2 Môn : Đại số

Câu 1. Cho A, B là các ma trận vuông cấp 2010 với hệ số thực sao cho $\det A = \det(A+B) = \det(A+2B) = \cdots = \det(A+2010B) = 0$.

(i) Chứng minh rằng $\det(xA+yB) = 0$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) Tìm ví dụ chứng tỏ kết luận trên không còn đúng nếu chỉ có $\det A = \det(A+B) = \det(A+2B) = \cdots = \det(A+2009B) = 0$.

Giải.

(i) Nhận xét rằng định thức $p(t) = \det(A+tB)$ là một đa thức bậc 2010 của t. Vì $p(0) = \cdots = p(2010) = 0$ nên ta có $p(t) = 0$. Định thức $q(t) = \det(tA+B)$ là một đa thức bậc 2010 của t. Chú ý rằng $q(t) = t^{2010}p(t^{-1})$ khi $t \neq 0$. Do đó ta cũng có $q(t) = 0$ với mọi t.

(ii) Có thể lấy ví dụ $A = \operatorname{diag}(0, 1, 2, \ldots, 2009)$ và $B = -I$.

Câu 2. Cho $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ là các dãy số được xác định bởi: $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ và $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} & = -u_n - 7v_n + 5w_n, \\ v_{n+1} & = -2u_n - 8v_n + 6w_n, \\ w_{n+1} & = -4u_n - 16v_n + 12w_n. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $v_n - 2$ là số nguyên chia hết cho 2^n.

Giải. Ký hiệu $A = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 5 \\ -2 & -8 & 6 \\ -4 & -16 & 12 \end{pmatrix}$ và với $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Ta có $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. Vậy nên $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = A^n X_0$. Đa thức đặc trưng của A là

$$P_A(x) = -x(x-1)(x-2).$$

Do đó A có 3 giá trị riêng phân biệt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ và A chéo hóa được. Từ đó, nếu kí hiệu $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ thì $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$. Đặt $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ thì $A = PBP^{-1}$. Từ đây suy ra $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = A^n X_0 = PB^nP^{-1}X_0$.

Do đó $v_n = -3\ 2^n + 2$.

Câu 3.

(i) Chứng minh rằng ứng với mỗi số n nguyên dương, biểu thức $x^n + y^n + z^n$ có thể biểu diễn dưới dạng đa thức $P_n(s, p, q)$ bậc không quá n của $s = x+y+z$, $p = xy+yz+zx$, $q = xyz$.

(ii) Hãy tìm tổng các hệ số của đa thức $P_{2010}(s, p, q)$.

Giải.

(i) Bằng qui nạp theo n.

(ii) Giả sử $x^{2010} + y^{2010} + z^{2010} = P(s,p,q)$. Ta cần tìm tổng các hệ số của $P(s,p,q)$ tức là cần tìm $P(1,1,1)$. Từ Định lí Vi-et, x,y,z phải là nghiệm của phương trình $t^3 - t^2 + t - 1 = 0$. Từ đó chỉ việc chọn $x = 1, y = i$ và $z = -i$, ta được $P(1,1,1) = -1$.

Câu 4. Xác định các đa thức thực $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$P(x)P(x^2) = P(x^3 + 2x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải. Ta nhận thấy đa thức hằng $P(x) \equiv 0$ và $P(x) \equiv 1$ thỏa mãn bài toán. Bây giờ ta chứng minh rằng các đa thức bậc dương không thỏa mãn. Chú ý rằng đẳng thức trong bài cũng đúng với các giá trị phức. Giả sử x_0 là một nghiệm (thực hoặc phức) của $P(x)$. Nếu $x_0 = 0$ thì $P(x) = x^s Q(x)$, trong đó $s \geq 1$, $Q(x)$ là đa thức với $Q(0) \neq 0$.

Thế vào điều kiện đã cho, ta thu được

$$x^{2s} Q(x) Q(x^2) = (x^2 + 2)^s Q(x^3 + 2x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $Q(0) \neq 0$.

Vậy nên $x_0 \neq 0$. Ta có thể giả thiết môđun $|x_0|$ có giá trị lớn nhất trong các nghiệm của $P(x)$. Khi đó $x_0^3 + 2x_0$ và $(\sqrt{x_0})^3 + 2\sqrt{x_0}$ cũng là nghiệm. Do đó $|x_0^3 + 2x_0| \leq |x_0|$ và $|(\sqrt{x_0})^3 + 2\sqrt{x_0}| \leq |x_0|$.

Đặt $x_0 = a + bi$. Điều kiện $|x_0^3 + 2x_0| \leq |x_0|$ tương đương với

$$(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 + 4(a^2 - b^2) + 3 \leq 0.$$

Từ đó $4b^2 \geq 3 + 4a^2$ và thay vào tiếp, ta lại có

$$4b^2 \geq 4a^2b^2 + 4a^2 + 3 \geq a^2 \cdot 3 + 4a^2 + 3 = 7a^2 + 3. \tag{$*$}$$

Điều kiện $|(\sqrt{x_0})^3 + 2\sqrt{x_0}| \leq |x_0|$ tương đương với $[(a+2)^2 + b^2]^2 \leq a^2 + b^2$ hay

$$(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + 8a + 7) + (4a + 4)^2 \leq 0. \tag{$**$}$$

Theo $(*)$ ta có:

$$a^2 + b^2 + 8a + 7 \geq \tfrac{1}{4}(11a^2 + 32a + 31) = \tfrac{1}{4}\left[\left(3a + \tfrac{16}{3}\right)^2 + 2a^2 + \tfrac{23}{9}\right] > 0,$$

mâu thuẫn với $(**)$.

Câu 5. Chọn một trong hai câu sau:

5a. Cho A là ma trận thực, vuông cấp $n \geq 2$, có tổng các phần tử trên đường chéo bằng 10 và $\operatorname{rank} A = 1$. Tìm đa thức đặc trưng và đa thức tối tiểu của A

(tức đa thức $p(t) \neq 0$ bậc nhỏ nhất với hệ số của lũy thừa bậc cao nhất bằng 1, sao cho $p(A) = 0$).

5b. Cho A, B, C là các ma trận thực, vuông cấp n, trong đó A khả nghịch và đồng thời giao hoán với B và C. Giả sử $C(A + B) = B$. Chứng minh rằng B và C giao hoán với nhau.

Giải.

Câu 5a.

Cách 1: Tính trực tiếp

Vì $\operatorname{rank}(A) = 1$ nên tồn tại véctơ khác 0 sao cho các véctơ dòng còn lại đều biểu diễn được tuyến tính qua nó. Do đó ma trận A có dạng sau

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_1 x_2 & \dots & \lambda_1 x_n \\ \lambda_2 x_1 & \lambda_2 x_2 & \dots & \lambda_2 x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_i x_1 & \lambda_i x_2 & \dots & \lambda_i x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n x_1 & \lambda_n x_2 & \dots & \lambda_n x_n \end{bmatrix},$$

trong đó

$$U := \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_i \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \neq 0, \qquad V := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \neq 0.$$

Khi đó $A = UV^t$ và

$$\begin{aligned} V^t U &= [\, x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_i \quad \dots \quad x_n \,] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_i \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_i x_i + \ldots + \lambda_n x_n = \operatorname{trace}(A). \end{aligned}$$

a) Ta có

$$\begin{aligned} A^2 = (UV^t)(UV^t) &= U(V^t U)V^t = U(\operatorname{trace}(A))V^t \\ &= \operatorname{trace}(A) UV^t = \operatorname{trace}(A) A = 10A \end{aligned}$$

Vậy đa thức tối tiểu là $P(t) = t^2 - 10t$.

b) Ta tính định thức $D_n(t) = \det(A + tI_n)$:

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda_1x_1+t & \lambda_1x_2 & \dots & \lambda_1x_n \\ \lambda_2x_1 & \lambda_2x_2+t & \dots & \lambda_2x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_ix_1 & \lambda_ix_2 & \dots & \lambda_ix_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_nx_1 & \lambda_nx_2 & \dots & \lambda_nx_n+t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1x_1+t & \lambda_1x_2 & \dots & \lambda_1x_n \\ \lambda_2x_1 & \lambda_2x_2+t & \dots & \lambda_2x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_ix_1 & \lambda_ix_2 & \dots & \lambda_ix_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_nx_1 & \lambda_nx_2 & \dots & \lambda_nx_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1x_1+t & \lambda_1x_2 & \dots & \lambda_1x_n \\ \lambda_2x_1 & \lambda_2x_2+t & \dots & \lambda_2x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_ix_1 & \lambda_ix_2 & \dots & \lambda_ix_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_nx_n \begin{vmatrix} \lambda_1x_1+t & \lambda_1x_2 & \dots & \lambda_1 \\ \lambda_2x_1 & \lambda_2x_2+t & \dots & \lambda_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_ix_1 & \lambda_ix_2 & \dots & \lambda_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & \dots & 1 \end{vmatrix} + tD_{n-1}$$

$$= \lambda_nx_n \begin{vmatrix} t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & \dots & 1 \end{vmatrix} + tD_{n-1} = \lambda_nx_nt^{n-1} + tD_{n-1}.$$

Ta dễ dàng chứng minh bằng quy nạp

$$D_n = t^{n-1}(\lambda_nx_n + \lambda_{n-1}x_{n-1} + \dots + \lambda_2x_2 + D_1)$$

$$= t^{n-1}(\mathrm{trace}(A) + t) = t^{n-1}(t+10).$$

Vậy đa thức đặc trưng là $(-1)^nt^{n-1}(t-10)$.

Cách 2: Vì $\dim \mathrm{Ker}\, A = n-1$ nên A có đúng $n-1$ véc tơ riêng ứng với 0. Do đó giá trị riêng còn lại là 1 số thực. Từ đó A chéo hoá được và trên đường chéo chỉ có 1 phần tử khác 0 chính là vết $= 10$. Từ đó tính ra ngay đa thức đặc trưng và đa thức tối tiểu.

Câu 5b. Từ giả thiết suy ra $A + C(A+B) = A + B$ hay

$$A = (I-C)(A+B). \tag{1}$$

Do A khả nghịch và đồng thời giao hoán với B và C nên từ (1) suy ra

$$I = (I-C)(A+B)A^{-1} = (I-C)A^{-1}(A+B),$$

tức $I - C$ khả nghịch và vì vậy

$$I = (A+B)A^{-1}(I-C) = A^{-1}(A+B)(I-C),$$

hay

$$A = (A + B)(I - C). \tag{2}$$

Từ (2) suy ra

$$A = A + B - (A + B)C,$$

hay $B = (A + B)C$. Vậy nên $(A + B)C = C(A + B)$ tức $BC = CB$, đpcm.