SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NAM

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH
Năm học 2017 – 2018

Môn thi : **TOÁN**
Thời gian: **150 phút** (*không kể thời gian giao đề*)
Ngày thi : **17/4/ 2018**

Câu 1. *(5,0 điểm)*

a) Cho biểu thức $A=\dfrac{x+8}{x\sqrt{x}+8}+\dfrac{1}{x-2\sqrt{x}+4}+\dfrac{\sqrt{x+4-4\sqrt{x}}}{x-4}$ với $0\le x<4$.

Rút gọn biểu thức A. Tìm các số nguyên x để A là số nguyên.

b) Cho ba số thực a,b,c sao cho $1\le a\le 2;\ 1\le b\le 2;\ 1\le c\le 2$.

Chứng minh $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{a}\le 7$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Cho phương trình $x^2-2x+3-2m=0$. Tìm để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 trong đó có một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại.

b) Giải phương trình $2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}=3-x$.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\ge 1$ thì $(n+2)(n+1)(n+8)$ không thể là lập phương của một số tự nhiên.

b) Cho số nguyên tố $p\,(p>3)$ và hai số nguyên dương a,b sao cho $p^2+a^2=b^2$. Chứng minh a chia hết cho 12 và $2(p+a+1)$ là số chính phương.

Câu 4. *(3,5 điểm)*

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4 cm. E là điểm nằm trên cạnh BC (E khác B và C). Đường thẳng qua B, vuông góc với đường thẳng DE tại H và cắt đường thẳng CD tại F. Gọi K là giao điểm của AH và BD.

a) Chứng minh tứ giác $KDCE$ nội tiếp trong đường tròn và ba điểm K, E, F thẳng hàng.

b) Khi E là trung điểm cạnh BC, tính diện tích tứ giác $BKEH$.

Câu 5. *(3,5 điểm)*

Cho hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ cắt nhau tại hai điểm A,B. Tiếp tuyến tại A của (C_2) cắt (C_1) tại M (M khác A). Tiếp tuyến tại A của (C_1) cắt (C_2) tại điểm N (N khác A). Đường thẳng MB cắt (C_2) tại P (P khác B). Đường thẳng NB cắt (C_1) tại Q (Q khác B).

a) Chứng minh các tam giác AMP, AQN đồng dạng.

b) Chứng minh $MB.NA^2=NB.MA^2$

---------- *Hết* ----------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: …… Số báo danh: ……

Thí sinh được phép sử dụng máy tính cầm tay.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NAM

KỲ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2017 – 2018

HƯỚNG DẪN CHẤM
Môn: TOÁN
(Hướng dẫn chấm thi này có 06 trang)

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (5,0 đ)	*Cho biểu thức* $A=\dfrac{x+8}{x\sqrt{x}+8}+\dfrac{1}{x-2\sqrt{x}+4}+\dfrac{\sqrt{x+4-4\sqrt{x}}}{x-4}$ *với* $0\le x<4$. *Rút gọn biểu thức A; tìm số nguyên* x *để* A *là số nguyên.*	**3,0**
	$A=\dfrac{x+8}{(\sqrt{x})^3+2^3}+\dfrac{1}{x-2\sqrt{x}+4}+\dfrac{\sqrt{(\sqrt{x}-2)^2}}{x-4}$	0,5
	$=\dfrac{x+8}{(\sqrt{x}+2)(x-2\sqrt{x}+4)}+\dfrac{1}{x-2\sqrt{x}+4}+\dfrac{\lvert\sqrt{x}-2\rvert}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$	0,5
	$=\dfrac{x+8}{(\sqrt{x}+2)(x-2\sqrt{x}+4)}+\dfrac{1}{x-2\sqrt{x}+4}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$ (vì $0\le x<4$ nên $0\le\sqrt{x}<2$)	0,5
	$=\dfrac{x+8}{(\sqrt{x}+2)(x-2\sqrt{x}+4)}+\dfrac{1}{x-2\sqrt{x}+4}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}$ $=\dfrac{x+8+(\sqrt{x}+2)-(x-2\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+2)(x-2\sqrt{x}+4)}$	0,5
	$=\dfrac{3\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}+2)(x-2\sqrt{x}+4)}=\dfrac{3}{x-2\sqrt{x}+4}$	0,5
	Ta có : $x-2\sqrt{x}+4=(\sqrt{x}-1)^2+3\ge 3\Rightarrow 0<A\le 1$. + Để A là số nguyên (khi đó A =1) thì $x-2\sqrt{x}+4=3$ hay $x=1$	0,5
	Chú ý: Các học sinh có thể đặt $t=\sqrt{x}$ *(* $0\le t<2$*) – thực hiện các biến đổi đại số. Các thầy cô cho điểm thích hợp theo cách cho điểm từng phần trên đây.*	
	b) Cho ba số thực a,b,c *sao cho* $1\le a,b,c\le 2$. *Chứng minh* $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{a}\le 7$. *(1)*	**2,0**
	Vì a,b,c có vai trò như nhau và $1\le a,b,c\le 2$ nên giả sử $2\ge a\ge b\ge c\ge 1$ Khi đó: (b-a)(b-c) ≤ 0	0,25
	$\Rightarrow b^2+ac\le ab+bc$ (*) $\Rightarrow \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}\le 1+\dfrac{a}{c}$ (chia 2 vế (*) cho bc)	0,25
	và $\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}\le 1+\dfrac{c}{a}$ (chia 2 vế (*) cho ab)	0,25
	$\Rightarrow \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\le 2+2(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a})$	0,25

	Để chứng minh (1) ta tiếp tục chứng minh $2+2(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}) \le 7 \Leftrightarrow \frac{a}{c}+\frac{c}{a} \le \frac{5}{2}$ (2)	0,25
	Ta có: $2 \ge a \ge c \ge 1 \Rightarrow 1 \le x = \frac{a}{c} \le 2$	0,25
	(2) $\Leftrightarrow$ $x+\frac{1}{x} \le \frac{5}{2}$ $\Leftrightarrow 2x^2-5x+2 \le 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x-1) \le 0$ (đúng vì $1 \le x \le 2$ (2) được chứng minh $\Rightarrow$ (1) được chứng minh. Dấu "="xảy ra khi a=2, b=c=1 hoặc a=b=2, c=1 và các hoán vị của nó.	0,25

Câu 2 (4,0 đ)	*a) Cho phương trình* $x^2 - 2x + 3 - 2m = 0$. *Tìm để phương trình có hai nghiệm phân biệt* x_1, x_2 *trong đó một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại.*	**2,0**
	Cách 1: • Điều kiện pt có 2 nghiệm phân biệt là $\Delta' > 0 \Rightarrow 2m-2 > 0 \Rightarrow m > 1$.	0,25
	• Ta có : $x_1 + x_2 = 2$, $x_1.x_2 = 3 - 2m$ $x_1 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = 2x_2 + 2m - 3$	0,25
	$\Rightarrow x_1 + x_2 = 3x_2 + 2m - 3$ $\Rightarrow 3x_2 = 5 - 2m \Rightarrow 3x_1 = 1 + 2m$	0,5
	$\Rightarrow 9x_1.x_2 = (5 - 2m)(1 + 2m)$ $\Rightarrow 9(3 - 2m) = -4m^2 + 8m + 5$	0,5
	$\Rightarrow 4m^2 - 26m + 22 = 0 \Rightarrow m = 1, m = \frac{11}{2}$ - chọn $m = \frac{11}{2}$	0,5
	Cách 2: Điều kiện : $\Delta' > 0 \Rightarrow 2m-2 > 0 \Rightarrow m > 1$.	0,25
	• Ta có : $x_1 + x_2 = 2$, $x_1.x_2 = 3 - 2m$ Để phương trình có một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại thì $(x_1 - x_2^2)(x_2 - x_1^2) = 0$	0,5
	$\Rightarrow x_1x_2 - (x_1^3 + x_2^3) + x_1^2x_2^2 = 0$ $\Rightarrow x_1x_2 - (x_1 + x_2)^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2) + x_1^2x_2^2 = 0$	0,5
	$\Rightarrow x_1^2x_2^2 + 7x_1x_2 - 8 = 0 \Rightarrow x_1x_2 = 1$, $x_1x_2 = -8$.	0,25
	+ $x_1x_2 = 1 \Rightarrow 3 - 2m = 1 \Rightarrow m = 1$ *(loai)* + $x_1x_2 = -8 \Rightarrow 3 - 2m = -8 \Rightarrow m = \frac{11}{2}$(thỏa mãn)	0, 5
	Cách 3 : • Điều kiện : $\Delta' > 0 \Rightarrow 2m-2 > 0 \Rightarrow m > 1$.	0,25
	Phương trình có 2 nghiệm là $x_1 = 1 + \sqrt{2m-2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{2m-2}$	0,25

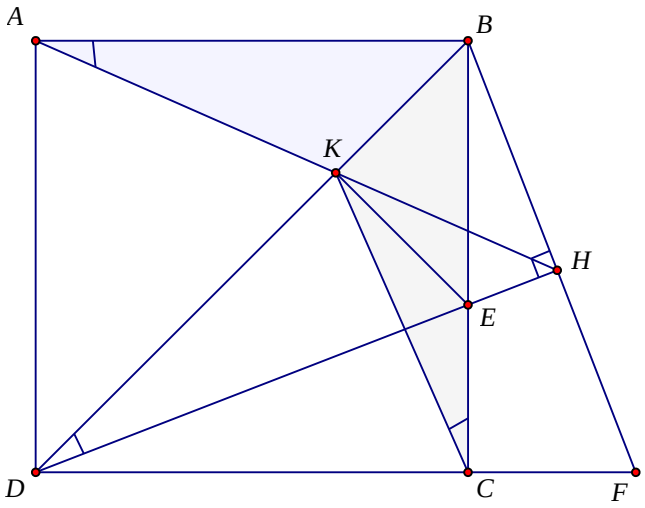
	Để phương trình có một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại thì $x_1 = x_2^2$ (không xảy ra trường hợp ngược lại $x_2 = x_1^2$ vì $0 < x_2 < 1,\ x_1^2 > 1$ (!))	0,25 0,25
	$\Rightarrow 1+\sqrt{2m-2} = 1-2\sqrt{2m-2}+2m-2$ $\Rightarrow (2m-2)-3\sqrt{2m-2} = 0 \Rightarrow \sqrt{2m-2} = 0 \vee \sqrt{2m-2} = 3$	0,5
	$\Rightarrow m = 1 \vee m = \frac{11}{2}$ - Chọn $m = \frac{11}{2}$	0, 5

	b) Giải phương trình $2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2} = 3-x$ *(1)*	**2,0**
	Cách 1: Điều kiện : $-1 \le x \le 1$	0,25
	(1) $\Leftrightarrow 2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}.\sqrt{1+x} = 3-x$ (2)	
	Đặt $\sqrt{1-x} = a;\ \sqrt{1+x} = b$ ($\Rightarrow$ a,b ≥ 0)	0,25
	.(2) viết lại: $2a+ab = 4-b^2$	0,5
	$\Rightarrow a(2+b) = (2+b)(2-b) \Rightarrow a = 2-b$ (do 2+b>0)	0,25
	$\Rightarrow \sqrt{1-x}+\sqrt{1+x} = 2 \Rightarrow$ x = 0 (Cô si – hoặc bình phương...) x = 0 thỏa điều kiện $\Rightarrow$ x = 0 là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.	0, 25 0, 25
	Cách 2: Điều kiện : $-1 \le x \le 1$	0,25
	(1) $\Leftrightarrow 2[\sqrt{1-x}-(1-x)]+[\sqrt{1-x^2}-(1+x)] = 0$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{1-x}(1-\sqrt{1-x})+\sqrt{1+x}(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow 2\sqrt{1-x}.\frac{x}{1+\sqrt{1-x}}+\sqrt{1+x}.\frac{-2x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} = 0$ $\Leftrightarrow x\left(\frac{\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow x = 0 \vee \frac{\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$ (*)	0,25
	(*) $\Leftrightarrow 1-x = \sqrt{1+x}$ $\Leftrightarrow 1+x^2-2x = 1+x \Leftrightarrow x = 0, x = 3$ (*loai*) Kết luận: x=0 là nghiệm duy nhất.	0, 5

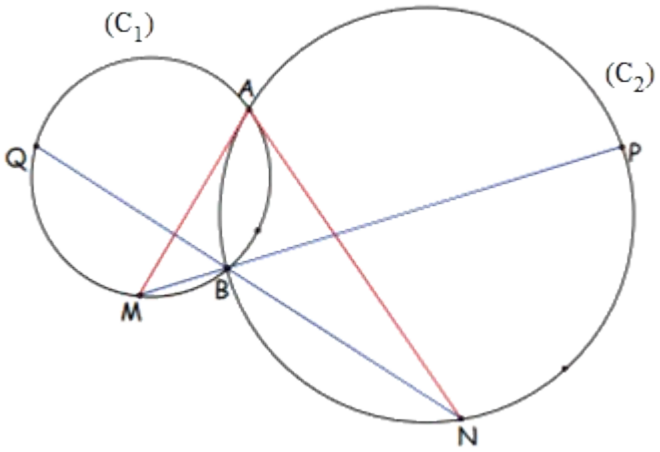
Câu 3 (4,0 đ)	*a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n $\ge$ 1 thì (n+2)(n+1)(n+8) không thể là lập phương của một số tự nhiên.*	**2,0**
	Ta có: $(n+2)^3 < (n+2)(n+1)(n+8) < (n+4)^3$ (*) $\Leftrightarrow n^3+6n^2+12n+8 < (n^2+3n+2)(n+8) = n^3+11n^2+26n+16 < n^3+12n^2+48n+64$ (đúng với mọi n $\ge$ 1)	0,5
	Giả sử có n$\in$N, n $\ge$ 1 sao cho (n+2)(n+1)(n+8) là lập phương của một số tự nhiên. Từ (*) suy ra: $(n+2)(n+1)(n+8) = (n+3)^3$	0,25 0,5

	$\Rightarrow n^3+11n^2+26n+16 = n^3+9n^2+27n+27$ $\Rightarrow 2n^2-n-11=0 \Rightarrow n=\frac{1\pm\sqrt{89}}{4}\notin N$ (!)	0,5
	Vậy $\forall n \geq 1$, $n \in N$ thì $(n+2)(n+1)(n+8)$ không là lập phương của một số tự nhiên.	0,25

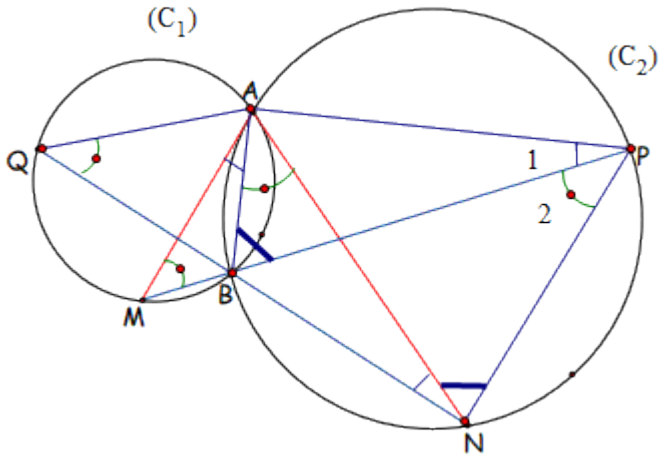
	b) Cho số nguyên tố $p\,(p>3)$ và hai số nguyên dương a, b thỏa mãn phương trình $p^2+a^2=b^2$. Chứng minh a chia hết cho 12 và $2(p+a+1)$ là số chính phương.	**2,0**
	Ta có: $p^2+a^2=b^2 \Leftrightarrow p^2=(b-a)(b+a)$.	0,25
	Các ước của p^2 là 1, p và p^2. Không xảy ra trường hợp $b+a=b-a=p$ Do đó chỉ xảy ra trường hợp $b+a=p^2$ và $b-a=1$. Khi đó $b=\frac{p^2+1}{2}$ và $a=\frac{p^2-1}{2}$ suy ra $2a=(p-1)(p+1)$.	0,5
	Từ p lẻ suy ra $p+1$, $p-1$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (p-1)(p+1)$ chia hết cho 8. Suy ra $2a$ chia hết cho 8 (1)	0,5
	Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Do đó p có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$. Suy ra một trong hai số $p+1$; $p-1$ chia hết cho 3 . Suy ra $2a$ chia hết cho 3 (2) Từ (1) và (2) suy ra $2a$ chia hết cho 24 hay a chia hết cho 12 (đpcm).	0,5
	Xét $2(p+a+1)=2\left(p+\frac{p^2-1}{2}+1\right)=2p+p^2+1=(p+1)^2$ là số chính phương.	0,25

Câu 4 (3,5 đ)	*Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 4 cm. E là điểm nằm trên cạnh BC (E khác B và C). Một đường thẳng qua B, vuông góc với đường thẳng DE tại H và cắt đường thẳng CD tại F. Gọi K là giao điểm của AH và BD.*	
	a)Chứng minh tứ giác KDCE nội tiếp đường tròn và ba điểm K, E, F thẳng hàng.	**2,5**
	 *(Không có hình vẽ không chấm bài)*	
	+ Hai tam giác BKA và BKC bằng nhau $\Rightarrow \widehat{BCK}=\widehat{BAK}$.	0,5

	+ Lại có *A, B, H, D* cùng nằm trên một đường tròn nên $\widehat{BAK} = \widehat{KDE}$. Suy ra $\widehat{BCK} = \widehat{KDE}$ Do đó tứ giác *KDCE* nội tiếp trong đường tròn.	0, 5 0,5
	+ Trong tam giác *BDF* có *BC* và *DH* là hai đường cao. Suy ra $FE \perp BD$ (1).	0,2 5
	Tứ giác *KDCE* nội tiếp trong đường tròn và $\widehat{ECD} = 90^0$ nên $\widehat{EKD} = 90^0$ hay $EK \perp BD$ (2). Từ (1) và (2) suy ra *K, E, F* thẳng hàng.	0,25 0,25
	b) Khi E là trung điểm cạnh BC , tính diện tích tứ giác BKEH .	**1,0**
	Ta có Δ BKE vuông cân, BK= KE = $\sqrt{2}$ $S_{BKE} = \frac{1}{2}BK.KE = \frac{1}{2}\sqrt{2}.\sqrt{2} = 1$	0,25
	Xét ΔBHE ta có BH = BE. sinE = 2. sinE = $2.\frac{DC}{DE} = 2\frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$ $HE^2 = BE^2 - BH^2 = 4 - \frac{16}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow HE = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $S_{BHE} = \frac{1}{2}HE.BH = \frac{4}{5}$	0.25 0.25
	$S_{BKEH} = S_{BKE} + S_{BHE} = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$ (cm^2)	0.25

Câu 5 (3,5 đ)	*Cho hai đường tròn (C_1),(C_2) cắt nhau tại hai điểm A,B. Tiếp tuyến tại A của (C_2) cắt (C_1) tại M ($M \neq A$). Tiếp tuyến tại A của (C_1) cắt (C_2) tại điểm N ($N \neq A$). Tia MB cắt (C_2) tại P ($P \neq B$). Tia NB cắt (C_1) tại Q ($Q \neq B$).*	
	a/ Chứng minh các tam giác AMP và ANQ đồng dạng.	**0,75**
	 *(Không có hình vẽ không chấm bài)*	
	Tứ giác ABNP nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ANB} = \widehat{APB}$	0,25
	Tứ giác ABMQ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AQB} = \widehat{AMB}$	0,25
	Suy ra: Δ ANQ đồng dạng Δ APM	0,25

	b/ Chứng minh: $MB.NA^2 = NB.MA^2$ *(1).*	**2,75**
	AM là tiếp tuyến , MBP là cát tuyến của (C_2) –chứng minh $MA^2 = MB.MP$	0,5
	Tương tự AN là tiếp tuyến , NBQ là cát tuyến của (C1), ta có: $NA^2 = NB.NQ$	0,25

	$\Rightarrow \frac{MA^2}{NA^2} = \frac{MB}{NB}.\frac{MP}{NQ}$ (2)	0,25
	Từ (2), để có (1), ta chứng minh $MP = NQ$. Để chứng minh $MP = NQ$ ta chứng minh $\Delta AMP = \Delta AQN$ *(AMP và AQN đồng dạng , cần chứng minh A N = AP hay* $\widehat{APN} = \widehat{ANP}$ *)*	
		
	+ Ta có $\widehat{P_1} = \widehat{ANB} = \widehat{MAB}$ (chắn cung AB của (C_2))	0,25
	+ Ta có $\widehat{P_2} = \widehat{NAB}$ (chắn cung NB của (C_2)) $\widehat{NAB} = \widehat{AMB}$(chắn cung AB của ($C_1$))	0,25
	+ Suy ra $\widehat{P_1} + \widehat{P_2} = \widehat{MAB} + \widehat{AMB}$ $\Rightarrow \widehat{APN} = \widehat{ABP}$ (Góc ngoài bằng tổng 2 góc trong không kề nó)	0,25
	+ Mặt khác $\widehat{ABP} = \widehat{ANP}$ (chắn cung AP của (C_2)) Suy ra: $\widehat{APN} = \widehat{ANP}$.	0,25
	Ta có: $\widehat{APN} = \widehat{ANP} \Rightarrow \Delta ANP$ *cân tại* $N \Rightarrow AN = AP$	0,25
	Tam giác AMP và AQN đồng dạng kết hợp AN= AP $\Rightarrow \Delta AMP = \Delta AQN \Rightarrow MP = NQ$ *(2)*	0,25
	Từ (1) (2) $\Rightarrow \frac{MA^2}{NA^2} = \frac{MB}{NB}$ hay $MB.NA^2 = NB.MA^2$.	0,25

Ghi chú: Nếu học sinh có cách giải khác đúng thì các thầy cô giám khảo thảo luận và thống nhất thang điểm cho phù hợp với Hướng dẫn chấm.