

CHỦ ĐỀ 3 : PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

LÍ THUYẾT

- ❖ Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_o(x_o; y_o; z_o)$ và có vector chỉ phương

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{a} \neq \vec{0} \text{ có dạng là: } \begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_o + a_3 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

- ❖ Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác không. Phương trình đường thẳng Δ viết dưới dạng chính tắc như sau:

$$\frac{x - x_o}{a_1} = \frac{y - y_o}{a_2} = \frac{z - z_o}{a_3}$$

- ❖ Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

- Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_o + a_3 t \end{cases} \quad d': \begin{cases} x = x'_o + a'_1 t' \\ y = y'_o + a'_2 t' \\ z = z'_o + a'_3 t' \end{cases} \text{ có VTCP } \vec{u} \text{ đi qua } M_o \text{ và } d' \text{ có vtcp } \vec{u}' \text{ đi qua } M'_o$$

$$(d) \parallel (d') \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}, \vec{u}'] = \vec{0} \\ M_o \notin d' \end{cases} \quad (d) \equiv (d') \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}, \vec{u}'] = \vec{0} \\ M_o \in d' \end{cases}$$

$$(d) \text{ cắt } (d') \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}, \vec{u}'] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}, \vec{u}'] \cdot \overrightarrow{M_o M'_o} = 0 \end{cases} \quad (d) \text{ chéo } (d') \Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{u}'] \cdot \overrightarrow{M_o M'_o} \neq 0$$

- ❖ Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

- Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng d đi qua điểm $M(x_o; y_o; z_o)$ và có vector chỉ phương

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \text{ và mặt phẳng } (\alpha): Ax + By + Cz + D = 0 \text{ có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = (A; B; C)$$

$$(d) \text{ cắt } (\alpha) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{n} \neq 0$$

$$(d) \parallel (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \\ M \notin (\alpha) \end{cases}$$

$$(d) \text{ nằm trên mặt phẳng } (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \\ M \in (\alpha) \end{cases}$$

- ❖ Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

- Khoảng cách từ $M_o(x_o; y_o; z_o)$ đến mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ cho bởi công thức

$$d(M_o, \alpha) = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- ❖ Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

- Khoảng cách từ đường thẳng d đi qua điểm M_o có VTCP $\vec{u}$ đến điểm M cho bởi công thức

$$d(M, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{M_o M} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

❖ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

- Trong không gian Oxyz cho đường thẳng d đi qua $M(x_o; y_o; z_o)$; có VTCP $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và đường thẳng d' đi qua $M'(x'_o; y'_o; z'_o)$ có VTCP $\vec{a}' = (a'_1; a'_2; a'_3)$. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng này là : $d(d, d') = \frac{|\vec{a}, \vec{a}', \overrightarrow{MM'}|}{|\vec{a}, \vec{a}'|} = \frac{V_{hop}}{S_{day}}$

❖ Góc giữa hai đường thẳng:

- Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

(Δ) đi qua $M(x_o; y_o; z_o)$ có VTCP $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$

(Δ') đi qua $M'(x'_o; y'_o; z'_o)$ có VTCP $\vec{a}' = (a'_1; a'_2; a'_3)$

- Khi đó góc giữa hai đường thẳng này được cho bởi công thức sau đây:

$$\cos \varphi = |\cos(\vec{a}, \vec{a}')| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{a}'|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{a}'|} = \frac{|a_1 \cdot a'_1 + a_2 \cdot a'_2 + a_3 \cdot a'_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{a'^2_1 + a'^2_2 + a'^2_3}}$$

❖ Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

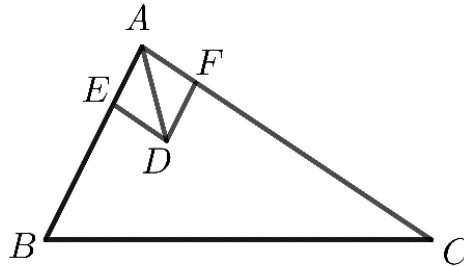
- Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng

(Δ) đi qua M_o có VTCP $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$

- Gọi φ là góc hợp bởi (Δ) và mặt phẳng (α) , khi đó góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là

$$\sin \varphi = |\cos(\vec{a}, \vec{n})| = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

- NOTE:** Cho tam giác ABC



- Đường phân giác trong của góc BAC có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \frac{1}{|\overrightarrow{AB}|} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{|\overrightarrow{AC}|} \overrightarrow{AC}$.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(-2; -2; 1)$, $B(1; 2; -3)$ và đường thẳng

$d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Tìm vector chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ qua A, vuông góc với d đồng thời cách điểm B một khoảng bé nhất.

- A. $\vec{u} = (1; 0; 2)$ B. $\vec{u} = (2; 2; -1)$ C. $\vec{u} = (25; -29; -6)$ D. $\vec{u} = (2; 1; 6)$

Lời giải**Cách 1**

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với d, B' là hình chiếu của B lên (P)

Khi đó đường thẳng Δ chính là đường thẳng AB' và $\vec{u} = \overrightarrow{B'A}$

Ta có $(P): \begin{cases} \text{Qua } A(-2; -2; 1) \\ \text{VTPT } \vec{n}_p = \vec{u}_d = (2; 2; -1) \end{cases} \Rightarrow (P): 2x + 2y - z + 9 = 0$

Gọi d' là đường thẳng qua B và song song $d' \Rightarrow d' \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$

B' là giao điểm của d' và $(P) \Rightarrow B'(-3; -2; -1) \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{B'A} = (1; 0; 2) \Rightarrow$ **Chọn A**

Cách 2: TƯ DUY TOÁN HỌC 4.0

Không cần viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với d.

Gọi d' là đường thẳng qua B và song song $d' \Rightarrow d' \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$

$B' \in d' \Rightarrow \overrightarrow{B'A} = (-2t - 3; -2t - 4; t + 4)$

$AB' \perp d \Rightarrow \vec{u}_d \cdot \overrightarrow{B'A} = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{B'A} = (1; 0; 2).$

VÍ DỤ 2: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC có phương trình đường phân giác trong góc A là: $\frac{x}{1} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-6}{-3}$. Biết rằng điểm $M(0; 5; 3)$ thuộc đường thẳng AB và điểm $N(1; 1; 0)$ thuộc đường thẳng AC. Vector nào sau đây là vector chỉ phương của đường thẳng AC.

- A. $\vec{u} = (0; 1; -3)$. B. $\vec{u} = (1; 2; 3)$. C. $\vec{u} = (0; 1; 3)$. D. $\vec{u} = (0; -2; 6)$

Lời giải**Chọn C**

Phương trình tham số của đường phân giác trong góc A: $\begin{cases} x = t \\ y = 6 - 4t \\ z = 6 - 3t \end{cases} (d)$

Gọi D là điểm đối xứng với M qua (d) . Khi đó $D \in AC \Rightarrow$ đường thẳng AC có một vector chỉ phương là $\overrightarrow{ND}$. Ta xác định điểm D .

Gọi K là giao điểm MD với (d) . Ta có $K(t; 6-4t; 6-3t)$; $\overrightarrow{MK} = (t; 1-4t; 3-3t)$.

Ta có $\overrightarrow{MK} \perp \vec{u}_d$ với $\vec{u}_d = (1; -4; -3)$ nên $t - 4(1-4t) - 3(3-3t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

$K\left(\frac{1}{2}; 4; \frac{9}{2}\right)$. K là trung điểm MD nên $\begin{cases} x_D = 2x_K - x_M \\ y_D = 2y_K - y_M \\ z_D = 2z_K - z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 3 \\ z_D = 6 \end{cases}$ hay $D(1; 3; 6)$.

Một vector chỉ phương của AC là $\overrightarrow{DN} = (0; -2; -6)$. Hay $\vec{u} = (0; 1; 3)$ là vector chỉ phương.

VÍ DỤ 3: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -3; 4)$, đường thẳng $d: \frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + z - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và song song với (P) .

A. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{2}$.

B. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{-2}$.

C. $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{-2}$.

D. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng $d: \frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-2}{-1}$ có một VTCP $\vec{u} = (3; -5; -1)$.

Mặt phẳng $(P): 2x + z - 2 = 0$ có một VTPT $\vec{n}(2; 0; 1)$.

Đường thẳng Δ có một VTCP $\vec{a} = [\vec{u}, \vec{n}] = -5(1; 1; -2)$.

Đường thẳng Δ có phương trình $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$.

VÍ DỤ 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 3 = 0$ đồng thời đi qua điểm $M(1; 2; 0)$ và cắt đường thẳng

$d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$. Một vector chỉ phương của Δ là.

A. $\vec{u} = (1; 1; -2)$

B. $\vec{u} = (1; 0; -2)$

C. $\vec{u} = (-1; 1; 2)$

D. $\vec{u} = (-1; -1; 2)$

Lời giải

Chọn A

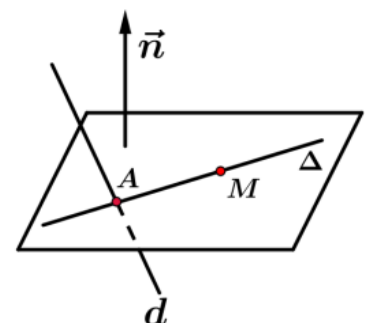
Cách 1:

Gọi $A(2+2t; 2+t; 3+t) \in d$ là giao điểm của Δ và d .

$\overrightarrow{MA} = (1+2t; t; 3+t)$, VTPT của (α) là $\vec{n}_{(\alpha)} = (1; 1; 1)$.

$\Delta \subset (\alpha) \Rightarrow \overrightarrow{MA} \perp \vec{n}_{(\alpha)}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \vec{n}_{(\alpha)} = 0 \Leftrightarrow 1+2t+t+3+t = 0 \Leftrightarrow t = -1$.



$$\Rightarrow \overrightarrow{MA}(-1; -1; 2) = -1(1; 1; -2). \text{ Vậy } \overrightarrow{u_d} = (1; 1; -2).$$

Cách 2:

$$\text{Gọi } B = d \cap (\alpha). B \in d \Rightarrow B(2+2t; 2+t; 3+t).$$

$$B \in (\alpha) \Rightarrow 2+2t+2+t+3+t-3=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow B(0;1;2). \overrightarrow{BM}(1;1;-2) \Rightarrow \overrightarrow{u_d}(1;1;-2).$$

VÍ DỤ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình của đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 2; -5)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x+3y-4z+5=0$ là

$$\text{A. } d: \begin{cases} x=2+t \\ y=3+2t \\ z=-4-5t \end{cases} \quad \text{B. } d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=-5+4t \end{cases} \quad \text{C. } d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=-5-4t \end{cases} \quad \text{D. } d: \begin{cases} x=2+t \\ y=3+2t \\ z=4+5t \end{cases}$$

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 2; -5)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x+3y-4z+5=0$ nên nhận $\vec{u} = (2; 3; -4)$ là vectơ chỉ phương

$$\text{Phương trình đường thẳng } d \text{ là } d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=-5-4t \end{cases}.$$

VÍ DỤ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $M(2; 2; -3)$ và $N(-4; 2; 1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M , nhận vectơ $\vec{u} = (a; b; c)$ làm vectơ chỉ phương và song song với mặt phẳng $(P): 2x+y+z=0$ sao cho khoảng cách từ N đến Δ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết $|a|, |b|$ là hai số nguyên tố cùng nhau. Khi đó $|a|+|b|+|c|$ bằng:

A. 14. B. 13. C. 16. D. 15.

Lời giải

Chọn D

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua $M(2; 2; -3)$ và song song với mặt phẳng (P) .

Suy ra $(Q): 2x+y+z-3=0$. Do $\Delta // (P)$ nên $\Delta \subset (Q)$.

$d(N, \Delta)$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \Delta$ đi qua N' , với N' là hình chiếu của N lên (Q) .

$$\text{Gọi } d \text{ là đường thẳng đi qua } N \text{ và vuông góc } (P), d: \begin{cases} x=-4+2t \\ y=2+t \\ z=1+t \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } N' \in d \Rightarrow N'(-4+2t; 2+t; 1+t); N' \in (Q) \Rightarrow t = \frac{4}{3} \Rightarrow N'\left(-\frac{4}{3}; \frac{10}{3}; \frac{7}{3}\right).$$

$$\vec{u} = (a; b; c) \text{ cùng phương } \overrightarrow{MN'} = \left(-\frac{10}{3}; \frac{4}{3}; \frac{16}{3}\right).$$

Do $|a|, |b|$ nguyên tố cùng nhau nên chọn $\vec{u} = (-5; 2; 8)$. Vậy $|a|+|b|+|c| = 15$.

VÍ DỤ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng song song với $(P): x+y+z-7=0$ và cắt d_1, d_2 lần lượt tại hai điểm A, B sao cho AB ngắn nhất. Phương trình của đường thẳng Δ là.

- A. $\begin{cases} x=12-t \\ y=5 \\ z=-9+t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=6-t \\ y=\frac{5}{2} \\ z=-\frac{9}{2}+t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=6 \\ y=\frac{5}{2}-t \\ z=-\frac{9}{2}+t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=6-2t \\ y=\frac{5}{2}+t \\ z=-\frac{9}{2}+t \end{cases}$

Lời giải

Chọn B

$$A \in d_1 \Rightarrow A(1+2a; a; -2-a); B \in d_2 \Rightarrow B(1+b; -2+3b; 2-2b)$$

$$\Delta \text{ có vectơ chỉ phương } \overrightarrow{AB} = (b-2a; 3b-a-2; -2b+a+4)$$

$$(P) \text{ có vectơ pháp tuyến } \overrightarrow{n_p} = (1; 1; 1)$$

$$\text{Vì } \Delta // (P) \text{ nên } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{n_p} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n_p} = 0 \Leftrightarrow b = a - 1. \text{ Khi đó } \overrightarrow{AB} = (-a-1; 2a-5; 6-a)$$

$$AB = \sqrt{(-a-1)^2 + (2a-5)^2 + (6-a)^2} = \sqrt{6a^2 - 30a + 62} = \sqrt{6\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{49}{2}} \geq \frac{7\sqrt{2}}{2}; \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } a = \frac{5}{2} \Rightarrow A\left(6; \frac{5}{2}; -\frac{9}{2}\right), \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{7}{2}; 0; \frac{7}{2}\right)$$

$$\text{Đường thẳng } \Delta \text{ đi qua điểm } A\left(6; \frac{5}{2}; -\frac{9}{2}\right) \text{ và vectơ chỉ phương } \overrightarrow{u_d} = (-1; 0; 1)$$

VÍ DỤ 5: Cho 2 mặt cầu $(S_1): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 4$, $(S_2): (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. Gọi d là đường thẳng đồng thời tiếp xúc với hai mặt cầu trên, cắt đoạn thẳng nối tâm hai mặt cầu và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất. Nếu $\vec{u} = (a; 1; b)$ là một vectơ chỉ phương của d thì tổng $S = 2a + 3b$ bằng bao nhiêu?

- A. $S = 0$ B. $S = 4$ C. $S = 2$ D. $S = 1$

Lời giải

Chọn C

$$(S_1) \text{ có tâm } I_1(3; 2; 2), \text{ bán kính } R_1 = 2. (S_2) \text{ có tâm } I_2(1; 0; 1), \text{ bán kính } R_2 = 1.$$

$$\text{Ta có: } I_1I_2 = 3 = R_1 + R_2, \text{ do đó } (S_1) \text{ và } (S_2) \text{ tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm } A\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Vì d tiếp xúc với hai mặt cầu, đồng thời cắt đoạn thẳng nối hai tâm I_1I_2 nên d phải tiếp xúc với hai mặt cầu tại $A \Rightarrow d \perp I_1I_2$. Mặt khác $d = d(O; d) \leq OA \Rightarrow d_{\max} = OA$ khi $d \perp OA$.

$$\text{Khi đó, } d \text{ có một vectơ chỉ phương là } [\overrightarrow{I_1I_2}, \overrightarrow{OA}] = (6; -3; -6) \Rightarrow \vec{u} = (-2; 1; 2). \text{ Vậy } S = 2.$$