Ly Huân
Nguyễn Văn Thuận
ĐHSP Vinh

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM VINH

LÊ THỐNG NHẤT

RÈN LUYỆN NĂNG LỰC GIẢI TOÁN CHO HỌC SINH PHỔ THÔNG TRUNG HỌC THÔNG QUA VIỆC PHÂN TÍCH VÀ SỬA CHỮA CÁC SAI LẦM CỦA HỌC SINH KHI GIẢI TOÁN

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP GIẢNG DẠY TOÁN
Mã số : 5.07.02

LUẬN ÁN PHÓ TIẾN SĨ KHOA HỌC SƯ PHẠM - TÂM LÝ

Rèn luyện NLGT
Cho HS trường PTTH
Thông qua Việc Phát triển
Các Thao tác tư duy
của HS Khi giải toán

Người hướng dẫn khoa học :

VŨ DƯƠNG THỤY
Phó Giáo sư, Phó tiến sĩ Khoa học giáo dục

ĐÀO TAM
Phó Giáo sư, Phó tiến sĩ Khoa học giáo dục

Rèn luyện NLGT cho
HS trường PTTH theo
Hướng Phát triển
Một số thao tác tư duy trong dạy học giải bài toán

VINH - 1996

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả nêu trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kì công trình nào khác.

Tác giả luận án

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS.PTS Vũ Dương Thụy và PGS.PTS Đào Tam. Trong thời gian hoàn thành luận án, tác giả còn được sự giúp đỡ của Khoa Toán Trường Đại học Sư phạm Vinh, Phòng Toán Viện Khoa học Giáo dục, Bộ môn Phương pháp dạy học toán-tin Trường Đại học Sư phạm - Đại học Quốc gia Hà Nội, Khoa Đào tạo sau đại học Trường Đại học Sư phạm Vinh, Phòng Đào tạo sau đại học Trường Đại học Khoa học tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội, Vụ Đào tạo sau đại học Bộ Giáo dục và đào tạo, Ban Toán Nhà xuất bản Giáo dục. Đặc biệt tác giả nhận được nhiều góp ý bổ ích của PGS. PTS Trần Thúc Trình. GS.TS Nguyễn Bá Kim, PGS. PTS Trần Kiều, PGS.PTS Ngô Hữu Dũng, PGS.PTS Nguyễn Quý Dy, PTS Đào Thái Lai, PTS Đỗ Mạnh Hùng, PTS Nguyễn Việt Hải, PTS Bùi Gia Quang, PTS Nguyễn Hữu Châu, ...

Tác giả nhận được sự giúp đỡ tận tình của ông Nguyễn Kim Hoãn (Giám đốc Sở Giáo dục và đào tạo Hà Nội), ông Phạm Quý Hùng (Phó Giám đốc Sở Giáo dục và đào tạo Nghệ An), ông Phạm Đình Đậu, (Hiệu trưởng trường PTTH Chu Văn An, Hà Nội), ông Nguyễn Xuân Khang (Hiệu trưởng trường PTTH dân lập Marie-Curie, Hà Nội), ông Vũ Đức Thú (Hiệu trưởng trường PTTH Lê Hồng Phong, Nam Hà) và rất nhiều GV Toán các trường PTTH ở : TP Hà Nội, TP Hồ Chí Minh, Hà Tây, Nghệ An. Hà Bắc, Thái Bình, Ninh Bình, Long An, Thanh Hóa.

Trong thời gian hoàn thành luận án, tác giả rất nhớ tới những bài học đầu tiên về Phương pháp giảng dạy toán của thầy giáo Nguyễn Văn Bàng (Đại học sư phạm Huế).

Các thầy giáo Nguyễn Thái Hòe (ĐHSP Vinh), Lê Quang Phan (Viện KHGD) đã dành cho tác giả nhiều lời khuyên bổ ích.

Gia đình và bạn bè thân hữu luôn là những nguồn động viên rất hiệu quả để tác giả có thêm nghị lực, tinh thần hoàn thành luận án.

Trước khi trình bày nội dung chính của luận án, xin chân thành cảm ơn tất cả mọi tấm lòng đã ưu ái dành cho tác giả.

Tác giả luận án

CÁC KÍ HIỆU VIẾT TẮT

HS :	Học sinh
GV :	Giáo viên
PTTH :	Phổ thông trung học
?	Lời giải sai lầm
!	Phân tích sai lầm
SGK :	Sách giáo khoa

MỤC LỤC .

MỞ ĐẦU

1. LÍ DO CHỌN ĐỀ TÀI.

Hiến pháp nước CHXHCN Việt Nam năm 1992 đã ghi ở điều 35 : "Giáo dục - đào tạo là quốc sách hàng đầu". Báo cáo chính trị của BCHTW Đảng khóa VII tại Đại hội đại biểu toàn quốc lần thứ VIII của Đảng lại khẳng định : "Giáo dục và đào tạo là **quốc sách hàng đầu** nhằm nâng cao dân trí, đào tạo nhân lực, bồi dưỡng nhân tài".

Tầm quan trọng của giáo dục và đào tạo trong sự nghiệp của dân tộc đặt lên vai đội ngũ những người làm công tác giáo dục nhiều trách nhiệm nặng nề.

"Trong các môn khoa học và kĩ thuật, toán học giữ một vị trí nổi bật. Nó còn là **môn thể thao của trí tuệ**, giúp chúng ta nhiều trong việc rèn luyện phương pháp suy nghĩ, phương pháp suy luận, phương pháp học tập, phương pháp giải quyết các vấn đề, giúp chúng ta rèn luyện trí thông minh sáng tạo.

Nó còn giúp chúng ta rèn luyện nhiều đức tính quí báu khác như cần cù và nhẫn nại, tự lực cánh sinh, ý chí vượt khó, **yêu thích chính xác**, ham chuộng chân lí. Dù các bạn phục vụ ngành nào, trong công tác nào thì các kiến thức và phương pháp toán học cũng rất cần cho các bạn" [28, tr.1].

Các nhà giáo dạy toán chính là các huấn luyện viên trong môn thể thao trí tuệ này. Công việc dạy toán của chúng ta nhằm rèn luyện cho HS tư duy toán học cùng những phẩm chất của con người lao động mới để các em vững vàng trở thành những chủ nhân tương lai của Đất nước.

Ở trường phổ thông dạy học toán là dạy hoạt động toán học. Đối với HS có thể xem ***giải toán là hình thức chủ yếu của hoạt động toán học.***

Các bài toán ở trường phổ thông là một phương tiện rất có hiệu quả và không thể thay thế được trong việc giúp HS nắm vững tri thức, phát triển tư duy, hình thành kĩ năng, kĩ xảo ứng dụng toán học vào cuộc sống. Dạy học giải toán mang trong mình các chức năng : giáo dưỡng, giáo dục, phát triển và kiểm tra. Vì vậy hoạt động giải toán là điều kiện để thực hiện tốt các mục đích dạy học toán. Do đó, tổ chức có hiệu quả việc dạy học giải toán có vai trò quyết định đối với chất lượng dạy học toán [53, tr. 201].

Khảo sát thực tiễn dạy học toán ở nước ta trong nhiều năm qua có thể thấy rằng chất lượng dạy học toán ở trường phổ thông còn chưa tốt, thể hiện ở năng lực giải toán của HS còn hạn chế do HS còn vi phạm nhiều sai lầm về kiến thức, phương pháp toán học. Trong đó nhiều GV còn có ít kinh nghiệm trong các việc : phát hiện sai lầm của HS khi giải toán, tìm ra những nguyên nhân của những sai lầm đó và những biện pháp hạn chế, sửa chữa chúng. Trong các ấn phẩm nghiên cứu khoa học giáo dục ở nước ta, cho tới nay còn thiếu vắng những công trình nghiên cứu có hệ thống về lĩnh vực này. Từ đó có nhu cầu nhận thức về sai lầm, tìm ra những nguyên nhân và những biện pháp hạn chế, sửa chữa kịp thời các sai lầm này, nhằm rèn luyện năng lực giải toán cho HS đồng thời nâng cao hiệu quả dạy học toán trong các trường phổ thông, đặc biệt ở trường PTTH để đạt mục tiêu đào tạo chủ động hơn, tốt hơn. Chúng tôi chọn đối tượng là HS trường PTTH vì bậc học này có nhiệm vụ hoàn chỉnh giáo dục phổ thông, chuẩn bị cho HS ra cuộc sống và một bộ phận học lên bậc Cao đẳng, Trung học chuyên nghiệp, Đại học.

Trên thế giới, nhiều nhà khoa học nổi tiếng đã phát biểu nhiều ý kiến bổ ích về vấn đề này. Chẳng hạn, I.A.Komensky đã khẳng định : "Bất kì một sai lầm nào cũng có thể làm cho HS học kém đi nếu như GV không chú ý ngay tới sai lầm đó, bằng cách hướng dẫn HS tự nhận ra và sửa chữa, khắc phục sai lầm" [105, tr. 70]. A.A Stoliar còn nhấn mạnh : "Không được tiếc thời gian để phân tích trên giờ học các sai lầm của HS" [106, tr. 91]. G. Pôlya đã nói : "Con người phải biết học ở những sai lầm và những thiếu sót của mình" [53, tr. 204]. B.V.Gònhedencô khi nêu ra 5 phẩm chất của tư duy toán học thì đã có tới 3 phẩm chất liên quan tới việc tránh các sai lầm khi giải toán : 1) Năng lực nhìn thấy được tính không rõ ràng của suy luận; thấy sự thiếu các mắt xích cần thiết của chứng minh; 2) Có thói quen lí giải lôgic một cách đầy đủ; 3) Sự chính xác của lí luận [98, tr. 31-34].

Chính từ các yêu cầu cấp bách và nhận thức trên đây, chúng tôi đã chọn đề tài nghiên cứu luận án là :

"Rèn luyện năng lực giải toán cho HS PTTH thông qua việc phân tích và sửa chữa các sai lầm của HS khi giải toán".

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU.

Nghiên cứu các sai lầm phổ biến của HS PTTH khi giải toán, đồng thời đề xuất các biện pháp sư phạm để hạn chế và sửa chữa các sai lầm này, chủ yếu qua phân môn Đại số - Giải tích nhằm rèn luyện năng lực giải toán cho HS và góp phần nâng cao chất lượng dạy học môn toán trong các trường PTTH.

3. GIẢ THUYẾT KHOA HỌC.

Nếu các GV toán ở trường PTTH nắm bắt được các sai lầm phổ biến của HS khi giải toán, đồng thời biết cách phân tích và sử dụng các biện pháp dạy học thích hợp để hạn chế, sửa chữa các sai lầm này thì năng lực giải toán của HS sẽ được nâng cao hơn, từ đó chất lượng giáo dục toán học sẽ tốt hơn.

4. NHIỆM VỤ NGHIÊN CỨU.

Nhiệm vụ nghiên cứu củ . luận án bao gồm :

4.1. Điều tra các sai lầm phổ biến của HS PTTH khi giải toán.

4.2. Phân tích các nguyên nhân sai lầm của HS khi giải toán.

4.3. Đề xuất các biện pháp sư phạm với các tình huống điển hình để hạn chế, sửa chữa các sai lầm của HS PTTH khi giải toán.

4.4. Thực nghiệm sư phạm để xem xét tính khả thi và tính hiệu quả của các biện pháp được đề xuất.

5. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU.

5.1. Nghiên cứu lý luận : Cơ sở lý luận về tâm lý học, giáo dục học, lý luận dạy học môn toán, điều khiển học, thông tin học để phân tích các nguyên nhân và xây dựng các biện pháp dạy học nhằm hạn chế, sửa chữa các sai lầm của HSPTTH khi giải toán.

5.2. Điều tra tìm hiểu : Tiến hành tìm hiểu về các sai lầm thông qua các GV toán ở nhiều vùng trong cả nước, thông qua bài kiểm tra trực tiếp HS ở các trường PTTH.

5.3. Thực nghiệm sư phạm : Trực tiếp giảng dạy thực nghiệm ở khối 10. 11. 12 trường PTTH dân lập Marie Curie (Hà Nội) trong các năm học 1993-1994, 1994-1995, 1995-1996 và lớp 10D1 trường PTTH Chu Văn An (Hà Nội) năm học 1995-1996. Chọn lớp 10 chuyên toán trường PTTH Lê Hồng Phong (Nam Hà) làm đối chứng để xem xét tính khả thi. tính hiệu quả của các biện pháp đã đề xuất.

6. NHỮNG LUẬN ĐIỂM ĐƯA RA BẢO VỆ, NHỮNG ĐIỂM MỚI VÀ Ý NGHĨA THỰC TIỄN CỦA LUẬN ÁN.

6.1. Những luận điểm đưa ra bảo vệ :

* Thực trạng đáng lo ngại về các sai lầm của HS khi giải toán, đòi hỏi phải có các biện pháp cấp bách, thích hợp giúp các GV dạy toán vượt qua.

* Các dạng sai lầm phổ biến của HS khi giải toán

* Các nguyên nhân sinh ra các sai lầm của HS khi giải toán. Có thể hạn chế và sửa chữa được các sai lầm này nhờ các biện pháp sư phạm thích hợp.

6.2. Những điểm mới và ý nghĩa thực tiễn của luận án :

- Luận án nêu ra một cách có hệ thống các sai lầm phổ biến của HS PTTH khi giải toán thông qua 74 bài toán của 12 loại toán trong phân môn Đại số - Giải tích PTTH, cùng với việc phân tích các nguyên nhân gây nên các sai lầm này. Tác giả đề xuất bốn biện pháp sư phạm với ba phương châm chỉ đạo sử dụng trong các tình huống điển hình nhằm hạn chế và sửa chữa các sai lầm cho HS PTTH khi giải toán. Đặc biệt luận án đưa ra 8 dấu hiệu để rèn luyện cho HS tự nhận biết lời giải có sai lầm. Luận án góp phần hoàn thiện thêm lí luận dạy học môn toán ở nước ta.

- Luận án cung cấp một tài liệu tham khảo bổ ích để bồi dưỡng GV toán, sinh viên sư phạm toán góp phần nâng cao hiệu quả dạy và học ở các trường PTTH.

7. CẤU TRÚC LUẬN ÁN.

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, luận án có 3 chương :

* Chương I : Nghiên cứu các sai lầm phổ biến của HS PTTH khi giải toán.

* Chương II : Các biện pháp rèn luyện năng lực giải toán cho HS PTTH thông qua phân tích và sửa chữa sai lầm.

* Chương III : Thực nghiệm sư phạm

Luận án có 10 sơ đồ, 10 bảng và 1 phụ lục.

Chương 1

NGHIÊN CỨU VỀ CÁC SAI LẦM PHỔ BIẾN CỦA HỌC SINH PHỔ THÔNG TRUNG HỌC KHI GIẢI TOÁN

Theo Từ điển Tiếng Việt thì ***sai lầm*** là "trái với yêu cầu khách quan hoặc với lẽ phải, dẫn đến hậu quả không hay." [95, tr. 830], ***phổ biến*** là "có tính chất chung, có thể áp dụng cho cả một tập hợp hiện tượng, sự vật" [95, tr. 775].

Chúng tôi hiểu và sử dụng thuật ngữ ***sai lầm phổ biến của HS khi giải toán*** với ý nghĩa là : điều trái với yêu cầu khách quan (yêu cầu bài toán) hoặc lẽ phải (khái niệm, định nghĩa, tiên đề, định lí, quy luật, quy tắc, phương pháp suy luận...), dẫn tới không đạt được yêu cầu của việc giải toán mà những điều này xuất hiện với tần số cao trong lời giải của nhiều HS.

Cần phân biệt sai với sót. Có khi sót là sai : sót điều kiện, sót trường hợp. Nhưng có khi sót chỉ là thiếu hoặc chưa đầy đủ : sót việc tổng hợp kết quả, rút gọn kết quả.

Với cách hiểu trên, chúng tôi đã nghiên cứu các sai lầm phổ biến của HS PTTH khi giải toán.

1.1. TÌNH HÌNH THỰC TẾ QUA CÁC ĐIỀU TRA VÀ QUAN SÁT.

1.1.1. Điều tra từ giáo viên : [66, tr. 23]

Chúng tôi gửi phiếu điều tra về các trường PTTH ở nhiều tỉnh, thành trong cả nước. ***Đối tượng ghi phiếu điều tra*** là GV đang giảng dạy chương trình toán lớp 10 ở các trường PTTH Tiên Du (Tiên Sơn, Hà Bắc), Bỉm Sơn (Hà trung, Thanh Hóa), Lê Quý Đôn (Hà Đông, Hà Tây). Huỳnh Thúc Kháng (Vinh, Nghệ An), Lương Văn Tụy (Ninh Bình), Nguyễn Huệ (Hà Đông, Hà Tây), Quang Trung (Đống Đa, Hà Nội), Lê Hồng Phong (TP Hồ Chí Minh), Nguyễn Trãi (Vũ Thư, Thái Bình), Lê Quý Đôn (Long An), Phan Đăng Lưu (Yên Thành, Nghệ An).

Các trường trên ở nhiều vùng dân cư khác nhau và đặc điểm khác nhau : trường trung học, trường trung học chuyên ban, trường chuyên. Thời gian nhận phiếu điều tra là 30.3.1995.

* **Mục đích của điều tra :** Tìm hiểu năng lực giải toán của HS lớp 10 PTTH. Tuy nhiên, phiếu điều tra cũng còn quan tâm tới những mục đích phụ như mức độ chương trình toán hiện nay ở các trường PTTH, những khó khăn của GV về phương pháp và tài liệu tham khảo, những biện pháp mà GV thường sử dụng để dạy giải bài tập toán. Qua điều tra này, chúng tôi nhận thấy HS ***còn phạm nhiều sai lầm khi giải toán và mọi đối tượng HS đều có thể mắc sai lầm khi giải toán.*** Các GV được hỏi ý kiến về những nguyên nhân dẫn tới sai lầm của HS khi giải toán đã cho biết (bảng 1) :

Nguyên nhân sai lầm của HS	*% ý kiến đồng ý*
1. Không hiểu khái niệm, kí hiệu	38,5
2. Tính toán nhầm lẫn	73,0
3. Xét thiếu trường hợp	77,0
4. Không lôgic trong suy diễn	61,5
5. Hiểu sai đề toán	34,6
6. Thiếu điều kiện	69,2
7. Nhớ sai công thức, tính chất	50,0
8. Diễn đạt kém	65,3

1.1.2. Điều tra từ học sinh :

Ngoài các điều tra thường xuyên ở các trường Marie Curie, Chu Văn an (Hà Nội) mà chúng tôi có điều kiện trực tiếp giảng dạy trong các năm học 1993–1994, 1994–1995, 1995–1996, chúng tôi còn tiến hành điều tra toàn bộ HS trường PTTH chuyên và chuyên ban Lê Hồng Phong (Nam Định, Nam Hà) vào cuối năm học 1995–1996. Chúng tôi quan tâm tới lớp 10 gồm 13 lớp, 464 HS. Trường tổ chức coi thi nghiêm túc và động viên HS làm hết sức mình.

Đề điều tra thực hiện trong 90 phút :

Câu 1 : Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x + 1} = x + 1.$$

Câu 2 : Tìm m sao cho phương trình

$$x - \sqrt{1 - x^2} = m$$

có nghiệm duy nhất.

Câu 3 Chứng minh với mọi số a, b, c ta có :

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \geq 8a^2b^2c^2$$

Câu 4 : Tùy theo a, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$F = (2x + y + 1)^2 + (ax + y + 3)^2.$$

Lưu ý là HS vừa thi học kì xong nên toàn bộ kiến thức lớp 10 đã được ôn tập kĩ. Đề thi vừa sức và rất chú ý tới các "bẫy" sai lầm. Các sai lầm mà điều tra quan tâm là :

* S1 : { $AB \geq 0$ và $A \geq 0$} $\Leftrightarrow$ { $A \geq 0$ và $B \geq 0$} (câu 1)

* S2 : Chuyển bài toán sang bài toán không tương đương (câu 2, câu 1).

*S3 : Giải sai câu 4.

*S4 :{$A \geq B$ và $M \geq N$ } $\Rightarrow$ $AM \geq BN$ (câu 3).

*S5 : Tính toán nhầm lẫn.

Dưới đây là thống kê số HS mắc các sai lầm trên (bảng 2) :

Sai lầm / Lớp	S1	S2	S3	S4	S5
10 chuyên Tin	2	14	12	19	31
10 Hóa Sinh	35	37	41	34	42
10 chuyên Lý	10	23	32	14	36
10 chuyên Pháp	34	39	40	8	40
10 Văn Anh	30	46	54	15	54
10 Toán tin	18	29	26	13	40
10 chuyên Anh	9	30	33	16	33
10 Toán Lý	10	26	30	25	35
10 chuyên Nga	0	4	16	4	16
10 chuyên Toán	6	14	12	4	16
10 chuyên Sinh	19	30	28	12	33
10 chuyên Văn	32	33	33	25	33
10 chuyên Hóa	5	19	22	6	31
Tổng số HS	210	344	379	195	455
% HS sai lầm	46	75	82	42	99

1.1.3. Quan sát kết quả thi Đại học :

Trường Đại học Sư phạm Vinh có nhiệm vụ tuyển sinh chủ yếu ở các tỉnh Nghệ An, Quảng Bình, Thanh Hóa. Đề thi của trường bám sát chương trình phổ thông. Kết quả thi môn toán của các HS thi vào khối A trong 5 năm liên tục thể hiện ở bảng thống kê sau (năm 1990 không thống kê số bài dưới điểm 5 - tài liệu do Phòng đào tạo cung cấp) (bảng 3) :

Điểm \ Năm	1989	1991	1992	1993	1990
0,0	3	22	8	13	
0,5	91	86	2	15	
1,0	57	116	31	16	
1,5	67	70	36	13	
2,0	60	98	55	13	
2,5	63	75	34	18	
3,0	74	58	32	25	
3,5	73	54	41	27	
4,0	54	55	44	21	
4,5	74	43	41	28	
5,0	65	37	26	21	43
5,5	42	38	20	22	31
6,0	45	26	21	12	34
6,5	24	28	16	16	20
7,0	24	18	12	11	14
7,5	18	19	07	07	14
8,0	11	14	06	06	02
8,5	07	04	04	02	02
9,0	02	03	04	02	02
9,5	00	01	02	01	01
10,0	00	00	00	00	00
Tổng	854	865	442	289	
Số %HS từ 5 trở lên	27,9 (238)	21,7 (188)	26,7 (118)	34,6 (100)	(163)

1.1.4. Theo dõi các báo cáo khoa học :

Trong Hội nghị "Đổi mới phương pháp dạy học Toán ở trường phổ thông trong giai đoạn hiện nay" tại Vinh (20 - 21/12/1995), chúng tôi quan tâm tới 2 bảng thống kê sau đây;

a. Kết quả thi thử tốt nghiệp môn Toán 1995 (đề của Bộ GD ĐT) của HS trường PTTH Hương sơn, Hà tĩnh [58, tr. 124] (bảng 4) :

Điểm	0 đến 2	3 đến 4	5 đến 7	8 đến 10
Số HS	80	120	40	10

Như vậy số HS trung bình trở lên là 20%.

b. Kết quả kiểm tra chương II, ĐS 10 của trường PTTH chuyên ban Thanh Chương I, Nghệ An : [58, tr. 54-56] (bảng 5) :

Đối tượng HS	Từ 5 trở lên	Chú ý thêm
Lớp chọn ban A	65%	Không có điểm dưới 3
Lớp thường ban A	30%	
Ban C	13,3%	13,3% điểm 0 và 1

1.1.5. Những kết luận cần thiết

* HS còn mắc nhiều sai lầm khi giải toán, kể các lớp chuyên ở những trường có truyền thống học tốt, dạy tốt.

* Việc lĩnh hội các khái niệm toán học của HS, đặc biệt là các khái niệm mới được đưa vào chương trình phổ thông còn gặp nhiều khó khăn, mà đôi khi lại xuất phát từ sự lúng túng về phương pháp dạy học của GV.

*** Nhiều GV chưa lưu ý cho HS những sai lầm có thể mắc phải khi giải toán.**

* Sự cần thiết phải có một nghiên cứu nghiêm túc về các sai lầm của HS khi giải toán trên các phương diện : thể hiện, nguyên nhân, ngăn ngừa, khắc phục để bổ sung và hoàn thiện vào phương pháp giảng dạy môn Toán, nâng cao hiệu quả cho việc dạy học Toán.

2. MỘT SỐ SAI LẦM PHỔ BIẾN CỦA HỌC SINH PHỔ THÔNG TRUNG HỌC KHI GIẢI TOÁN ĐẠI SỐ - GIẢI TÍCH

Trong luận án này, chúng tôi không đặt nhiệm vụ thống kê hết mọi sai lầm của HS PTTH khi giải toán, mà chỉ nêu lên những ***sai lầm phổ biến của HS khá giỏi,*** đây là những sai lầm mà qua nghiên cứu, chúng tôi nhận thấy có tần số cao trong các lời giải toán của HS. Những sai lầm này có khi khá tinh vi, mà nhiều khi GV khó phát hiện kịp thời. Việc đưa ra các sai lầm phổ biến này nhằm tác dụng ngăn ngừa cho HS và GV khi giải toán. Kèm theo lời giải sai (kí hiệu ?) chúng tôi còn phân tích sai lầm của lời giải (kí hiệu !) giúp các đồng nghiệp tham khảo để xử lí các tình huống khi HS giải sai. Việc chỉ ra một lời giải sai không phải lúc nào cũng dễ dàng. Đây cũng là những cố gắng của chúng tôi góp phần nâng cao hiệu quả dạy học môn toán. Để thuận lợi cho việc theo dõi, chúng tôi xin trình bày 74 thí dụ theo 12 loại toán thường gặp trong chương trình Đại số - Giải tích PTTH. Các lời giải đúng cho các thí dụ chúng tôi đã trình bày trong [6]. Tuy nhiên với một vài thí dụ cần nhấn mạnh, lời giải đúng vẫn được dẫn ra.

1.2.1. Sai lầm khi biến đổi biểu thức :

Những sai lầm khi biến đổi biểu thức thường mắc khi sử dụng các đẳng thức không phải là hằng đẳng thức, đó là các "á hằng đẳng" - chỉ đúng với những điều kiện nào đó. Đôi khi sai lầm xuất hiện do hiểu nhầm công thức.

Ngoài 3 thí dụ trên, HS còn hay mắc sai lầm khi sử dụng các công thức biến đổi sau đây (bảng 6 :

Sai	Đúng
$\log_2 x^2 = 2\log_2 x$	$\log_2 x^2 = 2\log_2\lvert x\rvert$
$2^x \cdot 2^y = 2^{xy}$	$2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$
$2^{3^2} = 2^{3.2} = 2^6$	$2^{3^2} = 2^{(3^2)} = 2^9$
lc $= \log_{2^2 . x} 3 = \frac{1}{2}\log_{2x} 3$	$\log_{4x} 3 = \frac{1}{\log_3 4x} = \frac{1}{2\log_3 2 + \log_3 x}$
$x^2 = 2\log_2^2 x$	$\log_2^2 x^2 = \left[2\log_2\lvert x\rvert\right]^2 = 4\log_2^2\lvert x\rvert$
$2 \cdot 2^x = 4^x$	$2 \cdot 2^x = 2^{1+x}$
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 = a+b$	$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$ với $a \geq 0$ và $b \geq 0$

1.2.2. Sai lầm khi giải phương trình, bất phương trình

Những sai l...n khi giải phương trình thường mắc khi HS vi phạm quy tắc biến đ... ...g trình, bất phương trình tương dương. Đặt thừa hay thiếu các điề... đều dẫn đến những sai lầm, thậm chí sai đến mức... không gi... ...ược nữa ! Một số sai lầm còn do hậu quả của việc biến đổi ...ức không dúng, như dã chỉ ra ở mục 1.2.1 của chương này.

Thí dụ 1. ... ương trình

$$3... - 9x = 9(x^2 - 2x - 3) \qquad (*)$$

$$? \ (*) \Leftrightarrow \ ...^2 - 2x - 3) = 9(x^2 - 2x - 3)$$

$$\Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3.$$

! Có thể thấy ngay $x = -1$ cũng là nghiệm. Sai lầm là HS đã chia hai vế của phương trình cho $x^2 - 2x - 3$ mà quên rằng :

$ab = cb \Leftrightarrow b(a - c) = 0$

Thí dụ 2. Giải phương trình

$$\sqrt{-x^3 + 3x - 2} + \sqrt{x + 1} = \sqrt{2}$$

? Điều kiện căn thức có nghĩa :

$$\begin{cases} -x^3 + 3x - 2 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + 2 \leq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 (x + 2) \leq 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \leq 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Vậy không tồn tại giá trị của x để hai căn thức đồng thời có nghĩa nên phương trình vô nghiệm.

! Có thể chỉ ra với $x = 1$ thì cả hai căn thức đều có nghĩa và $x = 1$ chính là nghiệm của phương trình. HS đã sai khi giải bất phương trình $(x - 1)^2 (x + 2) \leq 0 \Leftrightarrow x + 2 \leq 0$.

Thí dụ 3. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x + 1} = x + 1$$

? Điều kiện căn thức có nghĩa :

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(x + 1) \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Khi đó phương trình có dạng

$$\sqrt{(x - 1)(x + 1)} - \sqrt{x + 1} = x + 1$$

Vì $x \geq 1$ nên $\sqrt{x + 1} > 0$, chia hai vế cho $\sqrt{x + 1}$ ta có : $\sqrt{x - 1} - 1 = \sqrt{x + 1}$.

Vì với $x \geq 1$ thì $\sqrt{x - 1} < \sqrt{x + 1}$, nên $\sqrt{x - 1} - 1 < \sqrt{x + 1}$.

Vậy phương trình vô nghiệm.

! Sai lầm khi giải hệ $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$, nhiều HS tưởng rằng

$$\begin{cases} A.B \geq 0 \\ A \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}.$$

Ở lời giải trên thiếu x = −1 và đó chính là nghiệm duy nhất của phương trình. HS đã quên rằng

$$\begin{cases} A.B \geq 0 \\ A \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A = 0 \\ B \text{ có nghĩa} \end{cases} \\ \begin{cases} A > 0 \\ B \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Lời giải đúng là : Điều kiện căn thức có nghĩa.

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{array}\right. \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x \geq 1 \end{array}\right.$$

Thay x = −1 thỏa mãn phương trình

Với x ≥ 1 làm như lời giải trên.

Tóm lại : phương trình có nghiệm x = −1.

Thí dụ 4. Giải và biện luận phương trình

$$a - 5 + \frac{2a + 5}{x - 2} = 0 \ (*) \text{ theo tham số a.}$$

? Điều kiện : $x \neq 2$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow (a - 5)(x - 2) + 2a + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow (5 - a)(x - 2) = 2a + 5$$

$$\Leftrightarrow x(5 - a) = 15$$

Nếu $a \neq 5$ thì $x = \dfrac{15}{5 - a}$

Nếu a = 5 thì phương trình vô nghiệm.

! Sai lầm là HS không để ý $x = \dfrac{15}{5 - a}$ khi nào không là nghiệm của phương trình. Vì nghiệm phải thỏa mãn $x \neq 2$ nên khi $\dfrac{15}{5 - a} = 2 \Leftrightarrow a = -\dfrac{5}{2}$ thì phương trình vô nghiệm. Lời giải phải bổ sung điều này và kết luận đúng là :

Nếu $\begin{cases} a \neq 5 \\ a \neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$ thì $x = \dfrac{15}{5 - a}$

Nếu $\left[\begin{array}{l} a = 5 \\ a = -\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$ thì phương trình vô nghiệm

Thí dụ 5. Giải phương trình

$$2x + \sqrt{x - 3} = 16 \qquad (*)$$

? Điều kiện : $x \geq 3$. Ta có

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x - 3} = 16 - 2x \Leftrightarrow x - 3 = 256 - 64x + 4x^2$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 65x + 259 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x = \dfrac{37}{4}. \end{array}\right.$

thỏa mãn $x \geq 3$. Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 7$ hoặc $x = \dfrac{37}{4}$.

! Sai lầm khi viết $\sqrt{x - 3} = 16 - 2x \Leftrightarrow x - 3 = 256 - 64x + 4x^2$. Cần lưu ý HS rằng :

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ a = b^2 \end{cases}$$

(không cần đặt điều kiện $a \geq 0$). Ta có $x = \dfrac{37}{4}$ không là nghiệm

Thí dụ 6. Giải phương trình

$$\log_2 x^2 = 2\log_2 (3x + 4) \qquad (*)$$

? Điều kiện : $\begin{cases} x^2 > 0 \\ 3x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -\dfrac{4}{3}. \end{cases}$

Khi đó $(*) \Leftrightarrow 2\log_2 x = 2\log_2 (3x + 4)$

$\Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 (3x + 4)$

$\Leftrightarrow x = 3x + 4 \Leftrightarrow x = -2.$

Giá trị này không thỏa mãn điều kiện đã đặt nên phương trình vô nghiệm.

! Sai lầm khi biến đổi $\log_2 x^2 = 2\log_2 x$, do đó mất nghiệm $x = -1$.

Thí dụ 7. Giải phương trình

$$4^{\log_2 x} + x - 6 = 0$$

? Ta có $4^{\log_2 x} = (2^{\log_2 x})^2 = x^2$ nên phương trình tương đương với

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

! Cần lưu ý HS : $2^{\log_2 x} = x$ chỉ khi $x > 0$. Do đó chỉ lấy được $x = 2$ là nghiệm.

Thí dụ 8. Tìm m sao cho phương trình

$$\lg(x^2 + 2mx) - \lg(x - 1) = 0 \qquad (*)$$

có nghiệm duy nhất.

? $(*) \Leftrightarrow \lg(x^2 + 2mx) = \lg(x - 1)$

$\Leftrightarrow x^2 + 2mx = x - 1$

$\Leftrightarrow x^2 + (2m - 1)x + 1 = 0 \qquad (**)$

Phương trình có nghiệm duy nhất khi $\Delta = 0$

$$\Leftrightarrow (2m - 1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1. \end{array}\right.$$

! Trong nhiều kì thi đại học, loại phương trình này xuất hiện làm khá nhiều HS giải sai. Trên đây chỉ là một kiểu sai. Sai lầm là khi mũ hóa khử logarit. HS đã không đặt điều kiện nhớ được $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$ (chú ý $f(x) = g(x)$ nên chỉ đặt điều kiện $f(x) > 0$, khi $f(x)$ đơn giản hơn $g(x)$).

Một số có lưu ý tới điều kiện $x > 1$ nhưng lại lí luận : (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (**) có nghiệm duy nhất $x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \dfrac{S}{2} > 1 \end{cases}$ (?)

Một số lại đặt hệ điều kiện $\begin{cases} x^2 + 2mx > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$

và vấp phải bế tắc không giải tiếp được nữa !

Thí dụ 9. Giải bất phương trình

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} < \frac{1}{x + 5} \qquad (*)$$

? (*) $\Leftrightarrow x + 5 < \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

$\Leftrightarrow (x + 5)^2 < x^2 - 2x - 3$

$\Leftrightarrow 12x + 28 < 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{7}{3}$

! HS sai lầm khi nghĩ rằng $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b} \Leftrightarrow b < a$,

mà đúng ra $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b} \Leftrightarrow \dfrac{a - b}{ab} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} ab > 0 \\ a > b \end{cases} \\ \begin{cases} ab < 0 \\ a < b \end{cases} \end{array}\right.$

Thí dụ 10. Giải bất phương trình

$$x \cdot e^x > \frac{-1}{e} \qquad (*)$$

? Ta có $f_1(x) = x$ và $f_2(x) = e^x$ là các hàm số đồng biến trên $R \Rightarrow f(x) = x \cdot e^x$ là tích của hai hàm đồng biến nên cũng đồng biến trên R.

Ta có $\qquad f(-1) = (-1) \cdot e^{-1} = \dfrac{-1}{e}$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \qquad f(x) > f(-1) \Leftrightarrow x > -1.$

! Sai lầm khi nghĩ rằng tích của hai hàm đồng biến là hàm đồng biến. Nếu các hàm đồng biến chỉ nhận các giá trị dương thì mới được kết luận như vậy.

Lời giải đúng là :

Xét $f(x) = x \cdot e^x$ với $x \in R$ ta có $f'(x) = e^x(x + 1)$ nên bảng biến thiên của $f(x)$ là :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó ta có $f(x) > -\frac{1}{e} \Leftrightarrow x \neq -1$.

1.2.3. Sai lầm khi chứng minh bất đẳng thức

Các sai lầm thường bắt nguồn từ việc vận dụng các bất đẳng thức cổ điển mà không để ý tới điều kiện để bất đẳng thức đúng, hoặc sử dụng sai sót các quy tắc suy luận khi từ bất đẳng thức này suy ra bất đẳng thức kia.

Thí dụ 1. So sánh

$$x + \frac{1}{x} \text{ và } 2$$

? Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số x và $\frac{1}{x}$ ta có

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

! Sai lầm vì không để ý điều kiện của các số a, b trong bất đẳng thức Cauchy :

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

với $a \geq 0$ và $b \geq 0$

Thí dụ 2. Chứng minh rằng với mọi a ta có :

$$a(1 - a) \leq \frac{1}{4} \qquad (*)$$

? Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số a và 1 - a ta có :

$$\sqrt{a(1 - a)} \leq \frac{a + 1 - a}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad a(1 - a) \leq \frac{1}{4}$$

! Lại vẫn sai như đã phân tích ở thí dụ 1, vì a và 1 - a chỉ không âm khi $a \in [0; 1]$

Lời giải đúng là :

$$(*) \qquad \Leftrightarrow a - a^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow a^2 - a + \frac{1}{4} \geq 0$$

$\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ hiển nhiên đúng với mọi a.

Thí dụ 3. Chứng minh rằng nếu $x > -1$ thì $x \cdot e^x > \frac{-1}{e}$.

? Ta có $\quad x > -1 \qquad (1)$

$$e^x > e^{-1} = \frac{1}{e} \qquad (2)$$

Nhân theo từng vế của (1) và (2) ta có :

$$x \cdot e^x > -\frac{1}{e} \text{ (dpcm).}$$

! Cần lưu ý HS rằng :

$$\begin{cases} a > b \geq 0 \\ c > d \geq 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd.$$

Không thể nhân từng vế của (1) và (2) để suy ra điều phải chứng minh.

Thí dụ 4. Chứng minh rằng : Nếu $x \geq y > 1$ thì

$$x + \sqrt{y} \geq y + \sqrt{x}.$$

? Với $x \geq y > 1$ ta có :

$$x \geq y \text{ và } \sqrt{x} \geq \sqrt{y}$$

Trừ theo từng vế ta có $x - \sqrt{x} \geq y - \sqrt{y} \Rightarrow x + \sqrt{y} \geq y + \sqrt{x}$

! Sai lầm khi trừ từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều. Cần lưu ý HS :

$$\begin{cases} a \geq b \\ c \geq d \end{cases} \not\Rightarrow a - c \geq b - d.$$

Lời giải đúng là : Xét $f(t) = t - \sqrt{t}$ với $t > 1$ ta có

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{2\sqrt{t} - 1}{2\sqrt{t}} > 0$$

Do đó f(t) đồng biến với $t > 1$.

Mà $x \geq y > 1$ nên $f(x) \geq f(y) \Rightarrow x - \sqrt{x} \geq y - \sqrt{y} \Rightarrow x + \sqrt{y} \geq y + \sqrt{x}$ (đpcm).

Thí dụ 5. Chứng minh với mọi $x > 0$ thì $\sin x < x$.

? Xét $f(x) = x - \sin x$ với $x > 0$

Ta có $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến với $x > 0$.

Từ $x > 0$ suy ra $f(x) > f(0)$

$\Rightarrow x - \sin x > 0 - \sin 0 = 0$

! Lời giải có vẻ đúng, nhưng sai lầm khá tinh vi ! Sau khi kết luận f(x) đồng biến trên $(0; +\infty)$ thì vì sao từ $x > 0$ suy ra được $f(x) > f(0)$. Cần lưu ý HS rằng : Nếu f(x) đồng biến với $x \in [a; b]$ và $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ thì $f(x_2) > f(x_1)$. Ở lời giải xét f(x) đồng biến trên miền $(0; +\infty)$ không chứa số 0 nên không thể so sánh f(x) và f(0), khi $x > 0$.

Thí dụ 6. Chứng minh rằng : Nếu

$$\begin{cases} a + b + c > 0 & (1) \\ ab + bc + ca > 0 & (2) \\ abc > 0 & (3) \end{cases}$$

thì $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$

? Do vai trò bình đẳng của a, b, c nên ta chỉ cần chứng minh $a > 0$.

Giả sử $a < 0$ thì từ (3) $\Rightarrow bc < 0$.

Từ (2) $\Rightarrow a(b + c) > -bc > 0 \Rightarrow b + c < 0$

Từ $a < 0$, $b + c < 0 \Rightarrow a + b + c < 0$ mâu thuẫn với (1). Do đó $a > 0$.

! Khi phủ định $a > 0$ để thực hiện phép chứng minh phản chứng thì phải xét $a \leq 0$. Lời giải trên thiếu trường hợp $a = 0$.

Thí dụ 7. Chứng minh rằng nếu a, b, c > 0 thì :

$$\frac{a^{96} + b^{96} + c^{96}}{a^{95} + b^{95} + c^{95}} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

? Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương ta có :

$$a^{96} + b^{96} + c^{96} \geq 3\sqrt[3]{(abc)^{96}} \qquad (1)$$

$$a^{95} + b^{95} + c^{95} \geq 3\sqrt[3]{(abc)^{95}} \qquad (2)$$

Các vế của (1) và (2) đều dương nên chia theo từng vế ta được

$$\frac{a^{96} + b^{96} + c^{96}}{a^{95} + b^{95} + c^{95}} \geq \sqrt[3]{\frac{(abc)^{96}}{(abc)^{95}}} = \sqrt[3]{abc}.$$

! Suy luận từ $A \geq B > 0$ và $C \geq D > 0$ để có $\frac{A}{C} \geq \frac{B}{D}$ là sai.

Chẳng hạn $3 > 1$ và $9 > 2$, nhưng không suy ra được $\frac{3}{9} > \frac{1}{2}$ (?).

Lời giải đúng là :

Do vai trò bình đẳng của các số a, b, c nên có thể giả sử

$0 < a \le b \le c \Rightarrow a^{95} \le b^{95} \le c^{95}$. Áp dụng bất đẳng Tchebycheff ta có :

$3(a.a^{95} + b.b^{95} + c.c^{95}) \ge (a + b + c)(a^{95} + b^{95} + c^{95})$

$$\Rightarrow \frac{a^{96} + b^{96} + c^{96}}{a^{95} + b^{95} + c^{95}} \ge \frac{a + b + c}{3} \qquad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$\frac{a + b + c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$ (2). Từ (1), (2) suy ra điều phải chứng minh.

1.2.4. Sai lầm khi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Những sai lầm khi tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số hay của biểu thức nhiều ẩn thường do vi phạm quy tắc suy luận lôgic :

"Nếu $f(x) \ge m$ (m là hằng số), với mọi $x \in A$ và tồn tại $x_o \in A$ sao cho $f(x_o) = m$ thì giá trị nhỏ nhất của f(x) trên miền A là m" (có quy tắc tương tự cho giá trị lớn nhất của f(x)).

Đối với biểu thức nhiều ẩn, cũng có quy tắc tương tự.

Thí dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$F(x, y) = (x + y)^2 + (x + 1)^2 + (y - 2)^2$

? Với mọi $x, y \in \mathbf{R}$ thì :

$(x + y)^2 \ge 0$

$(x + 1)^2 \ge 0$

$(y - 2)^2 \ge 0$

Vậy $F(x, y) \ge 0\ \forall x, y \in R$.

Từ đó suy ra $\min F(x, y) = 0$

! Sai lầm của lời giải là không chỉ ra các giá trị của x và y để $F(x;y) = 0$. Nhớ rằng : $F(x;y) \ge 0\ \forall x, y \in \mathbf{R}$ và nếu tồn tại x_o; y_o sao cho $F(x_o;y_o) = 0$ thì mới kết luận được $\min F(x;y) = 0$. Đối với bài toán này, không tồn tại x_o; y_o để $F(x_o;y_o) = 0$.

Lời giải đúng là :

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski với

$$a_1 = -1; \qquad a_2 = 1; \qquad a_3 = 1$$

$$b_1 = (x+y); \qquad b_2 = x+1; \qquad b_3 = y-2$$

ta có :

$$1 = |(-1).(x+y) + 1.(x+1) + 1.(y-2)|$$

$$\le \sqrt{3}\,.\,\sqrt{F(x, y)} \Rightarrow 1 \le 3F(x; y) \Rightarrow F(x; y) \ge \frac{1}{3}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2} = \dfrac{b_3}{a_3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Vậy : $\min F(x;y) = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{4}{3}$; $y = \dfrac{5}{3}$.

Thí dụ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5$$

? Đặt $t = x + \dfrac{1}{x}$ thì $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$ nên

$f(x) = g(t) = t^2 - 2t + 3 = (t-1)^2 + 2 \ge 2\ \forall t \in \mathbf{R}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t = 1$.

Do đó : $\min f(x) = 2 \Leftrightarrow t = 1$.

! Sai lầm là chuyển bài toán không tương đương. Giá trị nhỏ nhất của f(x) không trùng với giá trị nhỏ nhất của g(t) với $t \in \mathbf{R}$. Có thể thấy ngay với $t = 1$ thì không tồn tại x và thực ra sai lầm ở lời giải này lại trở về sai lầm ở thí dụ 1 vì không có giá trị của x để $f(x) = 2$.

Thí dụ 3. Biết rằng $x^2 + y^2 = x + y$. Tìm giá trị lớn nhất của $F = xy$.

? Ta có $(x - y)^2 \geq 0 \quad \forall x,y \in \mathbf{R}$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \quad \forall x,y \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{2} \geq F \quad \forall x,y \in \mathbf{R}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Thay $x = y$ vào hệ thức đã cho ta có $2x^2 = 2x$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Nếu $x = 0$ thì $y = 0$ nên $F = 0$.

Nếu $x = 1$ thì $y = 1$ nên $F = 1$.

Từ đó suy ra $\max F = 1 \Leftrightarrow x = y = 1$.

! Cần lưu ý HS rằng : $F \leq M$ với M là hằng số thì khi tồn tại x, y để $F = M$, mới kết luận $\max F = M$. Lời giải trên sau khi chứng minh $F \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$ đã coi $\frac{x^2 + y^2}{2}$ như là hằng số (!) và mắc sai lầm !

Thí dụ 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x} + 3}$$

? Ta có $f(x) = \sqrt{x} + 3 + \frac{1}{\sqrt{x} + 3} - 3$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương

$\sqrt{x} + 3$ và $\frac{1}{\sqrt{x} + 3}$ ta có

$$\sqrt{x} + 3 + \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \geq 2 \Rightarrow f(x) \geq 2 - 3 = -1$$

với mọi $x \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{x} + 3 = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 3} \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 3)^2 = 1$

Thấy ngay không có giá trị của x thỏa mãn vì $\sqrt{x} + 3 \geq 3 \Rightarrow (\sqrt{x} + 3)^2 \geq 9 > 1$.

Vậy f(x) không có giá trị nhỏ nhất.

! Không có giá trị của x để $f(x) = -1$ thì chỉ suy ra được giá trị min $f(x) > -1$ và lời giải trên không đi đến được minf(x).

Thí dụ 5. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{x^2 + 2x + 2}$$

? Ta có $f(x) = \sqrt{(x - 1)^2 + 1} + \sqrt{(x + 1)^2 + 1}$

Chọn trên mặt phẳng tọa độ các điểm

$$M(x;0)\ ;\ A(1;1)\ ;\ B(-1;1)$$

thì $f(x) = MA + MB$.

Theo bất đẳng thức tam giác thì :

$$f(x) = MA + MB \geq AB = \sqrt{(1 + 1)^2 + (1 - 1)^2} = 2.$$

Từ đó min $f(x) = 2$.

! Lại sai lầm vì không để ý có tồn tại vị trí của M để $MA + MB = AB$ hay không, nên không kết luận được gì. Ở đây : $MA + MB = AB \Leftrightarrow$ M thuộc đoạn thẳng AB, nhưng M thì thuộc Ox, AB // Ox nên không tồn tại M.

Thí dụ 6. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

$$y = \frac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$$

với $x \in (-\pi ; \pi)$.

? Ta tìm tập giá trị của y, tức là tìm y để phương trình $y = f(x)$ có nghiệm.

Vì $2\cos x - \sin x + 4 > 0\ \ \forall x$ nên $y = f(x)$

$\Leftrightarrow 2y\cos x - y\sin x + 4y = \cos x + 2\sin x + 3$

$\Leftrightarrow (2 + y)\sin x + (1 - 2y)\cos x = 4y - 3$

Phương trình có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow$

$(2 + y)^2 + (1 - 2y)^2 \geq (4y - 3)^2 \Leftrightarrow 11y^2 - 24y + 4 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq y \leq 2.\ \text{Do đó}\ \max y = 2\ ;\ \min y = \frac{2}{11}.$$

! Lời giải quên hẳn yêu cầu $x \in (-\pi\ ;\ \pi)$. Lẽ ra theo đường lối tìm tập giá trị thì phải tìm y để phương trình $y = f(x)$ có nghiệm $x \in (-\pi\ ;\ \pi)$.

Lời giải đúng là : Đặt $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ thì $x \in (-\pi\ ;\ \pi) \Leftrightarrow$

$\frac{x}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó phương trình $y = f(x)$ có nghiệm

$x \in (-\pi\ ;\ \pi)$ khi phương trình $y = \dfrac{t^2 + 2t + 2}{t^2 - t + 3}$ có nghiệm $t \in R$.

Từ đó có $y \in \left[\frac{2}{11}\ ;\ 2\right]$ nên $\max y = 2$ và $\min y = \frac{2}{11}$.

1.2.5. Sai lầm khi giải các bài toán tam thức bậc hai

Khi giải toán tam thức bậc hai, các sai lầm xuất hiện do không chú ý đến giả thiết của các định lí mà đã vội vàng áp dụng hoặc là lạm dụng suy diễn những mệnh đề không đúng hoặc xét thiếu các trường hợp cần biện luận. - Biện luận

Thí dụ 1. Tìm m để biểu thức

$$\sqrt{(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3}$$

có nghĩa với mọi x.

? Biểu thức có nghĩa với mọi x

$\Leftrightarrow\ f(x) = (m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3 \geq 0 \quad \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta'_x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 > 0 \\ (m - 1)^2 - 3(m - 1)(m + 1) \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ 2(m - 1)(m + 2) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m \le -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 1$$

Ta có kết quả $m \ge 1$.

!Cần lưu ý HS rằng $f(x) = ax^2 + bx + c \ge 0 \;\; \forall x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 0 \\ c \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Lời giải xét thiếu một trường hợp $a = 0$.

Xét thiếu TH. Hệ số [illegible] bằng 0

Thí dụ 2. Tìm m để phương trình

$$(m - 1)x^2 + (2m - 1)x + m + 5 = 0$$

có hai nghiệm phân biệt.

?Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi

$\Delta > 0 \Leftrightarrow (2m - 1)^2 - 4(m - 1)(m + 5) > 0$

$\Leftrightarrow -20m + 21 > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{21}{20}$.

!Có thể chỉ ra với $m = 1 < \dfrac{21}{20}$ mà phương trình chỉ có 1 nghiệm $x = -6$. Nhớ rằng : $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đúng hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \ne 0 \\ \Delta_x > 0 \end{cases}.$$

Thí dụ 3. Tìm m sao cho :

$$\frac{x^2 - 2mx + 3m + 2}{2x^2 - mx + 2} \le 1 \text{ với } \forall x \in \mathbf{R}. \qquad (*)$$

?(*) $\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 3m + 2 \le 2x^2 - mx + 2 \quad \forall x \in R$

$\Leftrightarrow x^2 + mx - 3m \ge 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$

$\Leftrightarrow \Delta_x \le 0 \Leftrightarrow m^2 + 12m \le 0$

$\Leftrightarrow -12 \le m \le 0$.

! Sai lầm khi nhân hai vế với $2x^2 - mx + 2$ khi chưa biết dấu của biểu thức này.

Thí dụ 4. Biết rằng (x;y) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = -m^2 + 6 \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

$$F = xy - 6(x + y).$$

? Ta có $x^2 + y^2 = -m^2 + 6 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 2xy$

$$= -m^2 + 6 \Leftrightarrow m^2 - 2xy = -m^2 + 6 \Leftrightarrow xy = m^2 - 3.$$

Do đó : $F = m^2 - 3 - 6m$

$$= m^2 - 6m - 3 = (m - 3)^2 - 12$$

Vậy min $F = -12 \Leftrightarrow m = 3$.

F không có giá trị lớn nhất vì F là hàm bậc hai với hệ số m^2 là $a = 1 > 0$. Thiếu điều kiện để ∃ x, y

! Lời giải không đặt điều kiện để tồn tại x và y. Do đó đã xét F với $\forall m \in \mathbf{R}$.

Thí dụ 5. Tìm m sao cho phương trình :

$$x^2 - (2m + 1)x + m^2 = 0$$

chỉ có một nghiệm thỏa mãn x > 3.

? *Cách 1 :* Phương trình có nghiệm duy nhất khi $\Delta_x = 0$. Khi đó phương trình có nghiệm $x_1 = x_2 = \dfrac{S}{2}$. Do đó phương trình chỉ có một nghiệm thỏa mãn $x > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_x = 0 \\ \dfrac{S}{2} > 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m + 1)^2 - 4m^2 = 0 \\ \dfrac{2m + 1}{2} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 1 = 0 \\ m > \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{1}{4} \\ m > \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy không có m thỏa mãn bài toán.

? *Cách 2 :* Xét hai trường hợp

* Trường hợp 1 : $3 < x_1 = x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_x = 0 \\ \dfrac{S}{2} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\dfrac{1}{4} \\ m > \dfrac{5}{2} \end{cases}$.

Không có m thỏa mãn trường hợp này.

* Trường hợp 2 : $x_1 \leq 3 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a\,f(3) \leq 0 \\ \dfrac{S}{2} > 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 6 \leq 0 \\ \dfrac{2m+1}{2} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \sqrt{3} \leq m \leq 3 + \sqrt{3} \\ m > \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} < m \leq 3 + \sqrt{3}.$$

Tóm lại : $m \in \left(\dfrac{5}{2} ; 3 + \sqrt{3} \right]$

!Cách 1 tỏ ra HS chưa hiểu cụm từ "chỉ có một nghiệm" nên đã "phiên dịch" từng đoạn yêu cầu, thành ra khác với nghĩa của bài toán. Cần lưu ý cho HS là phương trình chỉ có một nghiệm thỏa mãn $x > 3$ không có nghĩa là phương trình không được có hai nghiệm ! Cách 2 là lời giải cố gắng làm gọn hai trường hợp $x_1 < 3 < x_2$ và $3 = x_1 < x_2$ thành một trường hợp $x_1 \leq 3 < x_2$. Tiếc rằng khi viết điều kiện "tương đương" với yêu cầu này lại không đúng. Như vậy sẽ bỏ sót trường hợp $x_1 < \dfrac{S}{2} \leq 3 < x_2$. Chính vì vậy mà với $m = 2$, phương trình trở thành $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$ thỏa mãn bài toán. nhưng $m = 2$ không có trong kết luận của cách giải thứ hai.

Kết quả đúng là : $m \in (3 - \sqrt{3}\,; 3 + \sqrt{3}]$.

Thí dụ 6. Chứng minh rằng phương trình

$$(x - 95)(x - 96) + (x - 96)(x - 97) + (x - 97)(x - 95) = 0$$

có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 95.

? Gọi vế trái là f(x) thì

$$f(x) = 3x^2 - 2(95 + 96 + 97)x + 95.96 + 96.97 + 97.95.$$

Do đó : $\quad af(95) = 3(95 - 96)(95 - 97) > 0$

và $\quad \dfrac{S}{2} - 95 = \dfrac{95 + 96 + 97}{3} - 95 = 1 > 0$

Suy ra : $95 < x_1 < x_2$.

! Từ $af(95) > 0$ và $\dfrac{S}{2} > 95$ chưa kết luận được f(x) có hai nghiệm phân biệt. Thiếu TH

Lời giải thiếu công việc chứng minh quan trọng này.

1.2.6. Sai lầm khi xét các loại hệ phương trình, bất phương trình.

Sai lầm khi xét các loại hệ phương trình. bất phương trình thường xuất phát từ nguyên nhân không nắm vững các phép biến đổi tương đương hoặc không để ý biện luận đủ các trường hợp xảy ra

Thí dụ 1. Giải hệ :

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0 & (1) \\ x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Thiếu biện luận đủ các TH xảy ra

? Trừ từng vế của (1) cho (2) ta có :

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Sai lầm thường có nguyên nhân không nắm vững xét biến đổi tương đương; k nắm vững phép biến đổi tương đương

Vậy hệ có hai nghiệm $x = -1$ hoặc $x = 2$.

! Có thể thấy ngay khi thay $x = -1$ vào (1) ta có $-4 = 0$. Vậy làm sao $x = -1$ là nghiệm của hệ ? Cần lưu ý HS rằng :

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ A - B = 0 \end{cases}$$

Lời giải trên vi phạm tính tương đương vì hiểu rằng :

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A - B = 0$$

Thực ra thì $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow A - B = 0.$

Lời giải đúng là :

Hệ tương đương với

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0 & (1) \\ x^2 - x - 2 = 0 & (3) \end{cases}$$

Ta có (3) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Thử $x = -1$, $x = 2$ lần lượt vào (1) không thỏa mãn nên hệ đã cho vô nghiệm.

Thí dụ 2. Giải hệ :

$$\begin{cases} y + 2 = (3 - x)^3 & (1) \\ (2z - y)(y + 2) = 9 + 4y & (2) \\ x^2 + z^2 = 4x & (3) \\ z \geq 0 & (4) \end{cases}$$

? Ta có (2) $\Leftrightarrow y^2 + 2y(3 - z) + 9 - 4z = 0$

Do đó : y tồn tại khi $\Delta'y \geq 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z \geq 2 \\ z \leq 0 \end{array}\right. \qquad (5)$$

Mặt khác (3) $\Leftrightarrow x^2 - 4x + z^2 = 0$.

Vậy x tồn tại khi $\Delta'_x \geq 0 \Leftrightarrow 4 - z^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq z \leq 2$ (6).

Kết hợp (4), (5), (6) ta có $z = 0$ hoặc $z = 2$.

* Trường hợp $z = 0$ thay vào (2) ta có $y = -3$, thay vào (3) ta có $x = 0$ hoặc $x = 4$.

* Trường hợp $z = 2$ thay vào (2) có $y = -1$, thay vào (3) có $x = 2$.

Tóm lại : Hệ có 3 nghiệm

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases} .$$

! Có HS thực hiện xong lời giải trên còn nghĩ rằng : "hệ ra thừa phương trình (1)" (?)

Bài toán giải hệ tức là phải tìm các giá trị của ẩn thỏa mãn đồng thời tất cả các phương trình, bất phương trình trong hệ. Sau khi từ (2), (3), (4) tìm ra $(x_o;y_o;z_o)$ cần phải thử vào (1) xem có thỏa mãn không.

Đáp số đúng là : $(x, y, z) = \{(4 ; -3 ; 0) ; (2 ; -1 ; 2)\}$

Thí dụ 3. Giải và biện luận hệ

$$\begin{cases} ax - by = 2 \\ bx + ay = 1 \end{cases}$$

theo a, b.

? Ta có
$$D = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 .$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -b \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a + b$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & 2 \\ b & 1 \end{vmatrix} = a - 2b.$$

Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{array}\right.$ thì hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2a + b}{a^2 + b^2} ; \; y = \frac{D_y}{D} = \frac{a - 2b}{a^2 + b^2} .$$

Nếu $D = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ thì $D_x = D_y = 0$ nên hệ có vô số nghiệm.

! Đây là sai lầm khá phổ biến của HS. Có thể thấy ngay nếu $a = b = 0$ thì hệ vô nghiệm.

Cần lưu ý HS rằng hệ $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

nếu $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$ thì thỏa mãn với mọi x, y khi $c_1 = c_2 = 0$ và vô nghiệm khi $c_1 \neq 0$ hoặc $c_2 \neq 0$, lưu ý trong trường hợp này không xét D, D_x, D_y. HS chỉ bắt đầu xét D, D_x, D_y khi $a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 \neq 0$.

Kết quả đúng là :

* $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$ thì $x = \dfrac{2a + b}{a^2 + b^2}$; $y = \dfrac{a - 2b}{a^2 + b^2}$

* $a = 0$ và $b = 0$ thì hệ vô nghiệm.

Thí dụ 4. Giải và biện luận hệ

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 & (1) \\ x^2 - x - m > 0 & (2) \end{cases}$$

? Trừ từng vế của (1) cho (2) (vì (1) và (2) ngược chiều nhau) ta có :

$$-x + m - 3 < 0 \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \quad x > m - 3$$

Chứng tỏ với mọi m, hệ có nghiệm $x > m - 3$.

! Có thể thấy ngay : (1) $\Leftrightarrow -1 < x < 3$

Vậy thì sao tập nghiệm cho bởi lời giải trên lại có thể là $x > m - 3$?

Thử thay $m = 2$ vào hệ ta có :

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 3 \\ \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2 < x < 3.$$

Nếu như theo kết quả "tổng quát" của lời giải trên thì nghiệm của hệ phải là $x > -1$ (!).

Sai lầm là HS đã sử dụng tính chất

$$\begin{cases} a > b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d$$

$$\begin{cases} a < b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d$$

của bất đẳng thức, dùng để suy ra bất đẳng thức hệ quả (tất nhiên là bất đẳng thức đúng nếu hai bất đẳng thức ở giả thiết là đúng) vào việc "biến đổi tương đương" hệ bất phương trình. Do chất "hệ quả" của (3) quá mạnh mà tập nghiệm được mở rộng quá lớn và dẫn đến sai lầm. Với lời giải trên, HS chưa thấy mức độ phức tạp của bài toán.

Thí dụ 5. Giải hệ

$$\begin{cases} (x^2 - 2x - 3)(x^2 - 4x + 3) \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

? Hệ tương đương với $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq -1 . \end{array}\right.$$

! Hãy xem lại thí dụ 3, mục 1.2.2. Lời giải trên làm mất nghiệm $x = 1$.

Đáp số đúng là : $x \in (-\infty ; -1] \cup \{1\} \cup [3 ; +\infty)$.

Thí dụ 6. Tìm m để hệ

$$\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ x^2y + y^2x = m \end{cases}$$

có nghiệm.

? Đặt $u = x + y$ và $v = x.y$ ta có

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ u.v = m. \end{cases}$$

Theo định lí Viete đảo thì u, v là các nghiệm của phương trình :

$$t^2 - 3t + m = 0. \qquad (*)$$

Hệ có nghiệm ⇔ (*) có nghiệm ⇔ $\Delta'_t \geq 0$

$$\Leftrightarrow 9 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{9}{4}.$$

! Lời giải trên mới chỉ đảm bảo cho sự tồn tại u và v. Cũng theo định lí Viete thì x, y là các nghiệm của phương trình $z^2 - uz^2 + v = 0$. Do đó hệ hai ẩn x, y có nghiệm khi hệ hai ẩn u, v có nghiệm thỏa mãn $u^2 - 4v \geq 0$

$$\Leftrightarrow \text{Hệ} \begin{cases} u + v = 3 & (1) \\ u.v = m & (2) \\ u^2 - 4v \geq 0 & (3) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Kết quả đúng là $m \leq 2$

1.2.7. Sai lầm khi tính giới hạn.

Tiếp xúc với các bài toán tính giới hạn. HS bước từ "mảnh đất hữu hạn" sang "mảnh đất vô hạn" với những đại lượng vô cùng bé, vô cùng lớn nên rất dễ bị mắc sai lầm. Các sai lầm xuất phát từ việc không nắm vững quy tắc vận dụng các định lí về giới hạn, đặc biệt là phạm vi có hiệu lực của các định lí.

Thí dụ 1. Tính :

$$L = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)$$

? Ta có $L = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$

$$= 0 + 0 + \dots + 0 = 0.$$

! Cần lưu ý HS rằng, định lí về các phép toán của giới hạn chỉ phát biểu cho hữu hạn số hạng. Lời giải trên đã áp dụng cho giới hạn của một tổng vô hạn các số hạng nên dẫn tới sai lầm.

Lời giải đúng là : Ta có :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2}} \text{ với } k = \overline{1, n}$$

Do đó : $\dfrac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq 1$.

Mà $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1$

Theo nguyên lí kẹp thì $\lim \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + k}} = 1$.

Thí dụ 2. Cho $I_n = \int\limits_0^{\pi/4} tg^n x dx$. Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

? Ta có với $n \geq 3$ thì :

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/4} tg^{n-2}x \, . \, tg^2 x \, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{n-2} x \, . \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{n-2} x \, . \, d(tgx) - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} tg^{n-2} x \, dx$$

$$= \frac{1}{n - 1} - I_{n-2} .$$

Do đó $I_n + I_{n-2} = \dfrac{1}{n - 1}$

Giả sử $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = L$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} I_{n-2} = L$. Suy ra :

$$0 = \lim_{n \to -\infty} \frac{1}{n - 1} = \lim_{n \to +\infty} (I_n + I_{n-2}) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} I_n + \lim_{n \to +\infty} I_{n-2} = L + L = 2L$$

Từ đó ta có L = 0.

! Lời giải thiếu việc chứng minh $\lim_{n\to+\infty} I_n$ tồn tại. Ghi nhớ cho HS rằng chỉ có $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n$ khi $\lim_{n\to+\infty} u_n$ và $\lim_{n\to+\infty} v_n$ đều phải tồn tại hữu hạn.

Thí dụ 3. Cho $\{u_n\}$ với $u_n = (-1)^n$

Chứng minh $\{u_n\}$ không có giới hạn.

? Ta có $u_1 = -1 < u_2 = 1 > u_3 = -1$.

Chứng tỏ $\{u_n\}$ không tăng, không giảm. Theo định lí Veierstrass thì $\{u_n\}$ không có giới hạn.

! Sai lầm của lời giải do không hiểu định lí Veierstrass, định lí này chỉ nêu lên điều kiện đủ chứ không phải điều kiện cần để dãy số có giới hạn. đ/k cần và đ/k đủ

Lời giải đúng là :

Giả sử $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$ thì $\max\{|1 - L| ; |1 + L|\} \geq$

$$\geq \frac{|1 - L| + |1 + L|}{2} \geq \frac{|1 - L + 1 + L|}{2} = 1$$

Do đó, với $\varepsilon = \frac{1}{2}$ thì $|1 - L| > \varepsilon$ hoặc $|1 + L| > \varepsilon$ tức là $|u_{2k} - L| > \varepsilon$ hoặc $|u_{2k-1} - L| > \varepsilon$ với $\forall k \in N^*$. Chứng tỏ mâu thuẫn với giả thiết $\{u_n\} \to L$, nên $\{u_n\}$ không có giới hạn.

Thí dụ 4. Tính $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x + 5}{3x - 1}\right)^{2x}$

? Ta có $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x + 5}{3x - 1}\right)^{2x} = \left[\lim_{x\to\infty}\frac{3x + 5}{3x - 1}\right]^{x\to\infty} = 1^\infty = 1$

! Thử hỏi : 1^∞ tại sao lại là 1 ? Cần lưu ý HS rằng $1^n = 1$ với $\forall n \in R$, nhưng n phải là số xác định, chứ không là kí hiệu ∞.

Thí dụ 5. Tính $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$.

?Ta có $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$.

!Lời giải trên dã chia cả tử và mẫu của nhân thức $\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$ cho x để khử dạng $\frac{\infty}{\infty}$, nhưng sai lầm xuất hiện khi viết $\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$.

Điều đó chỉ viết được khi $x > 0$.

Thí dụ 6. Cho $f(x) = \begin{cases} \frac{x - 1}{\sqrt{x - 1}} & \text{với } x > 1 \\ 2 & \text{với } x \leq 1 \end{cases}$

Tính $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

?Ta có $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x - 1}} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x - 1} . \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x - 1}}$

$$= \lim_{x \to 1} \sqrt{x - 1} = 0 .$$

!Lời giải trên dã mặc nhiên chỉ xét $x > 1$ tức là xét giới hạn phải khi x tiến tới 1.

Lời giải đúng là :

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1}{\sqrt{x - 1}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x - 1} . \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x - 1}} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x - 1} = 0$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2 = 2 .$$

Vì $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ nên $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ không tồn tại.

Thí dụ 7. Chứng minh với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì

$$2 - \frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{n}$$

? Xét $\{u_n\}$ với $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ ta có $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

Xét $\{v_n\}$ với $v_n = \sqrt[n]{n}$.

Do $n \geq 2$ nên $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n]{1} = 1$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho $n - 2$ số bằng 1 và 2 số là $\sqrt{n}$ thì

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} \leq \frac{(n-2) + 2\sqrt{n}}{n} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Do $1 < \sqrt[n]{n} \leq 1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ và $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1$,

suy ra $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ tức là $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.

Vì $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2 > 1 = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n \Rightarrow u_n \geq v_n$ với $n \geq 2$.

! Ta có định lí : "Nếu $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ có giới hạn và $u_n \geq v_n$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \geq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$". Nhưng điều ngược lại, kết luận $u_n \geq v_n$ $\forall\, n \geq 2$ như lời giải trên là sai. Mệnh đề ngược lại có thể phát biểu : "Nếu $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ thỏa mãn $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \geq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ thì tồn tại n^* sao cho $\forall n \geq n^*$ thì $u_n \geq v_n$". Điều quan trọng là đối với bài toán cụ thể này, tại sao n^* có thể chọn là 2 ? Khẳng định chọn $n^* = 2$, chính là giải thí dụ 7.

Lời giải đúng là :

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho n số dương gồm 1 số là n và n - 1 số là 1 ta có :

$$\frac{n + (n - 1)}{n} \geq \sqrt[n]{n}$$

$$\Rightarrow \; 2 - \frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{n}$$

Đẳng thức không xảy ra vì $n \geq 2$.

1.2.8. Sai lầm khi giải các bài toán liên quan tới đạo hàm

Các sai lầm liên quan tới khái niệm đạo hàm thường gặp khi tính đạo hàm và khi vận dụng đạo hàm để giải toán.

Thí dụ 1 :

$$\text{Cho } f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

thay x = 0 vào rồi mới tính f(0)

Tính $f'(0)$.

? Ta có $f(0) = 0 \Rightarrow f'(0) = (0)' = 0$.

! Lời giải đã mắc sai lầm lớn khi thay $x = 0$ vào $f(x)$ rồi mới tính đạo hàm? Nếu cứ như vậy thì đạo hàm tại điểm bất kì của hàm số bất kì đều bằng 0 (!).

đây là một sai lầm hết sức phổ biến và hết sức hay gặp ở THPT

Lời giải đúng là : Theo định nghĩa ta có :

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin^2 \Delta x}{(\Delta x)^2}$$

$$= \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}\right]^2 = 1.$$

Thí dụ 2. Tính đạo hàm của hàm $y = (x^2 + 1)^x$

? Ta có $\quad y' = x\,(x^2 + 1)^{x-1} \cdot (x^2 + 1)'$

$$= x\,(x^2+1)^{x-1}\,.\,2x$$
$$= 2x^2\,(x^2+1)^{x-1}$$

! Lời giải đã vận dụng $(x^n)' = n.x^{n-1}$

Vận dụng như vậy là sai, vì ở bài này $y = (x^2+1)^x$ thì mũ x là biến số chứ không phải là hằng số như ở công thức trên.

Thí dụ 3. Tính giá trị của

$$f(x) = \text{arctg}\, x + \text{arctg}\, \frac{1}{x}$$

với $x \neq 0$.

? Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1}.\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$$= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Chứng tỏ $f(x) = c$ với $x \neq 0$.

Ta có $f(1) = \text{arctg}\,1 + \text{arctg}\,1 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

nên $c = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ với mọi $x \neq 0$.

! Có thể thấy ngay $f(-1) = \text{arctg}(-1) + \text{arctg}(-1)$

$= \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$. Vậy sai lầm ở đâu ?

Ta biết rằng "Nếu $f(x) = c$ với $x \in (a;b)$ thì $f'(x) = 0\ \forall x \in (a;b)$". Điều ngược lại, "Nếu $f'(x) = 0\ \forall x \in (a;b)$ thì $f(x) = c\ \forall x \in (a;b)$". Lời giải trên đã coi $R\backslash\{0\}$ là miền có dạng (a;b) để vận dụng điều ngược lại đó là sai lầm. Ở đây cần vận dụng mệnh đề đó cho từng khoảng $(-\infty\ ;\ 0)$ và $(0\ ;\ +\infty)$.

Kết quả đúng là : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{nếu } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

Thí dụ 4. Tìm m để hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m + 2)x + 1 \text{ đồng biến trên R.}$$

? y đồng biến trên R $\Leftrightarrow y' > 0 \quad \forall x \in R$

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 2 > 0 \quad \forall x \in R \Leftrightarrow \Delta'_x < 0$

$\Leftrightarrow m^2 - m - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 2.$

! $y' > 0$ với $x \in (a;b)$ là điều kiện đủ để y đồng biến trên (a;b), chứ không phải là điều kiện cần. Chẳng hạn $y = x^3$ đồng biến trên R, nhưng $y' = 3x^2 = 0$ khi $x = 0$. Nhớ rằng, nếu $y = f(x)$ xác định trên (a;b), $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a;b)$ nhưng $f'(x)$ chỉ triệt tiêu tại hữu hạn điểm thuộc (a;b) thì $y = f(x)$ đồng biến trên (a;b).

Vấn đề ĐK cần và đủ.

Lời giải đúng là :

(?) cần phải xét f(x) ≢ const

y đồng biến trên R $\Leftrightarrow y' \geq 0 \quad \forall x \in R \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 2 \geq 0$ $\forall x \in R \Leftrightarrow \Delta'_x \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2.$

Thí dụ 5. Tìm tập giá trị của hàm số

$$y = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

? Tập xác định là R

Ta có $$y' = \frac{-3x + 1}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

Do đó bảng biến thiên của y là :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
y'		+	0	−	
y	$-\infty$	↗	$\sqrt{10}$	↘	$-\infty$

điều kiện cần và đủ để f(x) đồng biến ∀x ∈ (a,b) là f'(x) ≥ 0 ∀x ∈ (a,b) và tập hợp tất cả điểm x sao cho f'(x) = 0 không chứa đoạn [α;β]

Nếu đủ Nó

Nhớ đến bao nhiêu

Chạy nữa

Suy ra tập giá trị của y là $(-\infty; \sqrt{10}]$.

! Sai lầm là HS tưởng $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

Nhưng $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Do đó tập giá trị của y là $(-1; \sqrt{10}]$.

1.2.9. Sai lầm khi xét bài toán về tiếp xúc và tiếp tuyến

Các sai lầm khi xét những bài toán loại này xuất phát từ việc không nắm vững thuật ngữ hoặc không hiểu đúng sự tiếp xúc của hai đồ thị là gì.

Thí dụ 1. Cho hàm số

$$y = x^3 - 3x + 1$$

Viết phương trình tiếp tuyến kẻ từ điểm A(3;19) tới đồ thị.

? Ta thấy $f(3) = 19 \Rightarrow$ A thuộc đồ thị. Vậy phương trình tiếp tuyến cần xác định là

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3)$$
$$\Leftrightarrow \; y = 24x - 53.$$

! Phương trình tiếp tuyến $y = 24x - 53$ là tiếp tuyến tại A (nhận A làm tiếp điểm) tất nhiên là kẻ từ A. Nhưng vẫn có thể có tiếp tuyến đi qua A mà A không phải là tiếp điểm.

Kết quả đúng là :

Có 2 tiếp tuyến thỏa mãn bài toán :

$$y = 24(x - 3) + 19$$
$$y = \frac{15}{4}(x - 3) + 19.$$

Thí dụ 2. Tìm các điểm trên trục Ox mà từ đó kẻ được đúng một tiếp tuyến tới đồ thị $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$.

? Gọi điểm cần tìm trên Ox là M(h;0). Dường thẳng d qua M có dạng

$$= k(x - h).$$

Đường thẳng này là tiếp tuyến của đồ thị khi phương trình

$$\frac{x^2 - 4}{x - 1} = k(x - h) \text{ có nghiệm kép}$$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 = k(x - 1)(x - h)$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow (k - 1)x^2 - k(h + 1)x + kh + 4 = 0$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta_x = 0 \Leftrightarrow k^2(h + 1)^2 - 4(k - 1)(kh + 4) = 0$

$\Leftrightarrow k^2(h - 1)^2 + 4(h - 4)k + 16 = 0 \; (*)$

Để có một tiếp tuyến thì phương trình (*) có đúng một nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta_k = 0$$

$$4(h - 4)^2 - 16(h - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h = 2 \\ h = -2. \end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm thuộc Ox thỏa mãn bài toán là $M_1(2;0)$ và $M_2(-2;0)$.

! Lời giải trên liên tiếp mắc sai lầm :

- Khử $x - 1$ ở mẫu không có điều kiện.
- Phương trình ẩn x có nghiệm kép còn thiếu điều kiện $k - 1 \neq 0$.
- Phương trình (*) có 1 nghiệm còn thiếu yêu cầu $k \neq 1$ nên dẫn tới thiếu các trường hợp cần xét.

Để giải đúng bài toán này phải nắm vững phép biến đổi tương dương và biện luận dủ các trường hợp xảy ra.

Thí dụ 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị

$$y = x^2 - x + 1,$$

biết rằng góc giữa tiếp tuyến với đường thẳng $y = 0$ là 45^o.

? Góc giữa tiếp tuyến và đường thẳng $y = 0$ là 45^o khi hệ số góc của tiếp tuyến là $tg45^o = 1$.

Do đó tiếp tuyến có dạng $y = x + k$. Đường thẳng này là tiếp tuyến của đồ thị ⇔ phương trình $x^2 - x + 1 = x + k$ có nghiệm kép ⇔ $x^2 - 2x + 1 - k = 0$ có nghiệm kép ⇔ $\Delta'_x = 0 \Leftrightarrow k = 0$.

Suy ra có 1 tiếp tuyến thỏa mãn bài toán là $y = x$.

! Lời giải trên đã không chú ý tới khái niệm về góc giữa hai đường thẳng. Cần lưu ý HS rằng : nếu hệ số góc của hai đường thẳng lần lượt là a_1, a_2 và góc giữa chúng là α thì $tg\alpha = \left|\dfrac{a_1 - a_2}{1 + a_1a_2}\right|$.

Ở đây đường thẳng $y = 0$ có hệ số góc $a_1 = 0$ nên hệ số góc a_2 của tiếp tuyến thỏa mãn $|a_2| = 1 \Leftrightarrow a_2 = \pm 1$.

Lời giải trên thiếu trường hợp $a_2 = -1$.

Kết quả đúng là : $y = x$ và $y = -x + 1$.

Thí dụ 4. Tìm các điểm của trục tung mà từ đó kẻ được đúng ba tiếp tuyến tới đồ thị

$$y = x^4 - x^2 + 1.$$

? Đồ thị có trục đối xứng là Oy. Do đó nếu d là tiếp tuyến của đồ thị không vuông góc với Oy thì d' đối xứng với d qua Oy cũng là tiếp tuyến của đồ thị. Suy ra từ 1 điểm trên Oy kẻ được đúng ba tiếp tuyến tới đồ thị thì trong các tiếp tuyến đó phải có tiếp tuyến vuông góc Oy. Gọi tiếp tuyến này là $y = m$ thì hệ

$$\begin{cases} x^4 - x^2 + 1 = m & (1) \\ 4x^3 - 2x = 0 & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm}$$

Ta có (2) ⇔ $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$

Nếu thay $x = 0$ vào (1) ta có $m = 1 \Rightarrow$ tiếp tuyến $y = 1$ cắt Oy tại A(0;1) nên A(0;1) thỏa mãn.

Nếu thay $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ vào (1) ta có $m = \frac{3}{4} \Rightarrow$ tiếp tuyến $y = \frac{3}{4}$ cắt Oy tại $B\left(0; \frac{3}{4}\right)$ nên $B\left(0; \frac{3}{4}\right)$ thỏa mãn.

Tóm lại, A(0;1) và $B\left(0; \frac{3}{4}\right)$.

! Lý luận phần đầu của lời giải trên là đúng, nhưng việc suy ra trong các tiếp tuyến phải có tiếp tuyến vuông góc với Oy thì đây chỉ là điều kiện cần. Khi tìm được $m = 1$ hoặc $m = \frac{3}{4}$ để có A(0;1) hoặc $B\left(0; \frac{3}{4}\right)$ lời giải trên vội vàng khẳng định cả 2 điểm này thỏa mãn nên đã sai lầm. Cần phải thử lại sẽ thấy với A(0;1) có 3 tiếp tuyến đi qua, còn với $B\left(0; \frac{3}{4}\right)$ thì có đúng 1 tiếp tuyến đi qua.

? Giả sử A(0 ; m) là điểm của trục tung. Gọi x_o là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua A thì $m = f'(x_o)(0 - x_o) + f(x_o)$

$$\Leftrightarrow 3x_o^4 - x_o^2 + m - 1 = 0 \quad (*)$$

Từ A kẻ được 3 tiếp tuyến $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có đúng 3 nghiệm khác nhau.

Điều kiện cần để (*) có 3 nghiệm là $x_o = 0$ thỏa mãn phương trình (*) $\Rightarrow m = 1$.

Thử lại : với $m = 1$ thì (*) trở thành $3x_o^4 - x_o^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o = 0 \\ x_o = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

Vậy A(0 ; 1) thỏa mãn.

? Sau khi lí luận (*) có 3 nghiệm phân biệt, đặt $t = x_o^2 \geq 0$ dẫn đến phương trình $g(t) = 3t^2 - t + m - 1 = 0$ có nghiệm $t_1 = 0$ và $t_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(0) = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 = 0 \\ \dfrac{1}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy A(0 ; 1) thỏa mãn.

! Hai lời giải sai lầm ở đâu ? (Mặc dù có dáp số đúng !). Cần lưu ý HS rằng : số tiếp điểm có hoành dộ x_o không đúng bằng số tiếp tuyến, nhất là dối với hàm số bậc 4. Với 3 tiếp điểm, biết đâu chỉ có 2 tiếp tuyến vì có những tiếp tuyến có 2 tiếp điểm với đồ thị. Tại sao không xét phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt vì biết đâu với 4 tiếp điểm ấy lại có đúng 3 tiếp tuyến di qua A ?

Thí dụ 5. Tìm m để đồ thị $y = x^3 - k(x - 1) - 1$ tiếp xúc với trục hoành.

? Đồ thị tiếp xúc với trục hoành $\Leftrightarrow$ phương trình

$x^3 - k(x - 1) - 1 = 0$ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ $(x - 1)(x^2 + x + 1 - k) = 0$ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ $x^2 + x + 1 - k = 0$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow$ $\Delta_x < 0 \Leftrightarrow 4k - 3 < 0 \Leftrightarrow k < \dfrac{3}{4}$.

! Do trước dây, nhiều HS quen xét việc tiếp xúc của đường bậc hai và đường bậc nhất hoặc của hai đường bậc hai sẽ thấy hình như (?) khi hai đường có một điểm chung thì sẽ tiếp xúc nhau. Sự suy diễn ra thành một tính chất tổng quát cho hai đường bất kỳ tiếp xúc nhau khi và chỉ khi chúng có một điểm chung là sai lầm.

Lời giải đúng là :

Đồ thị tiếp xúc Ox $\Leftrightarrow$ phương trình $x^3 - k(x - 1) - 1 = 0$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1 - k) = 0$ có nghiệm kép.

* *Trường hợp 1 :* $t(x) = x^2 + x + 1 - k$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow$ $\Delta_x = 0 \Leftrightarrow 4k - 3 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}$.

* *Trường hợp 2 :* $t(x)$ có nghiệm $x = 1 \Leftrightarrow t(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - k = 0 \Leftrightarrow$ $k = 3$.

Xét đủ trường hợp

Tóm lại : Đồ thị tiếp xúc với Ox $\Leftrightarrow$ $k = \frac{3}{4}$ hoặc $k = 3$.

Chú ý : Một số HS khi giải như trên lại sai lầm khi yêu cầu ở trường hợp 1 là $t(x)$ có nghiệm kép khác 1. Nếu $t(x)$ có nghiệm kép $x = 1$ thì vẫn thỏa mãn bài toán.

1.2.10. Sai lầm khi xét các đường tiệm cận của đồ thị.

Khái niệm về đường tiệm cận của đồ thị liên quan chặt chẽ tới phép tính giới hạn (kể cả phép tính giới hạn một phía). Nhiều HS không nắm được định nghĩa mà chỉ nhìn vào hình thức của hàm số và suy đoán một cách máy móc nên dẫn tới sai lầm. Tất nhiên việc tính các giới hạn sai cũng dẫn đến sai lầm khi tìm các đường tiệm cận.

Thí dụ 1. Tìm các đường tiệm cận của đường $y = \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}}$.

? Vì $\lim\limits_{x \to \pm 1} y = \infty$ nên đồ thị có hai đường tiệm cận đứng là $x = \pm 1$.

Vì tập xác định của hàm số là $(-1; 1)$ nên $\lim\limits_{x \to \infty} y$ không tồn tại, suy ra đồ thị không có tiệm cận ngang.

! Vì tập xác định là $(-1; 1)$ nên chỉ có $\lim\limits_{x \to -1^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} y = +\infty$. Do đó không viết $\lim\limits_{x \to \pm 1} y = \infty$.

Cần lưu ý thêm đồ thị cũng không có tiệm cận xiên vì tập xác định của hàm số là (-1 ; 1).

Thí dụ 2. Tìm m để đồ thị

$$y = \frac{x^2 + x - 2}{x - m}$$

không có tiệm cận đứng.

? Với mọi m thì $\lim\limits_{x \to m} y = \infty$ nên đồ thị luôn có đường tiệm cận đứng x = m. Vậy không có m thỏa mãn bài toán.

! Sai lầm khi viết $\lim\limits_{x \to m} y = \infty$. Nhiều HS khi tìm đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm phân thức $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ thường giải phương trình v(x) = 0 để tìm x (!?) và từ đó suy ra ngay (?) tiệm cận đứng. Đây là sự máy móc không có cơ sở nên rất dễ mắc sai lầm.

Thí dụ 4. Tìm tiệm cận của đồ thị

$$y = \frac{x^3}{x + 1}.$$

? Ta có $\lim\limits_{x \to -1} y = \infty$ nên đồ thị có tiệm cận đứng x = -1.

Ngoài ra $\lim\limits_{x \to \infty} [y - (ax + b)] =$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - (x + 1)(ax + b)}{x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - ax^2 - (a + b)x - b}{x + 1} = \infty$$

nên đồ thị không có tiệm cận ngang và tiệm cận xiên.

! Lưu ý : $\lim\limits_{x \to -1^-} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to -1^-} y = +\infty$ nên đồ thị có tiệm cận đứng x = -1.

Đúng là đồ thị không có tiệm cận ngang và xiên, nhưng nếu lưu ý :

$$y = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x + 1}$$

thì $\lim\limits_{x \to \infty}[y - (x^2 - x + 1)] = 0$ nên đồ thị có đường tiệm cận là parabol $y = x^2 - x + 1$.

1.2.11. Sai lầm khi làm toán giải tích tổ hợp

Đây là loại toán mới được đưa vào chương trình toán ở phổ thông cho nên nhiều HS lúng túng và dẫn tới sai lầm.

Cơ sở để giải các bài toán là việc vận dụng các quy tắc nhân, quy tắc cộng và các khái niệm chỉnh hợp, hoán vị, tổ hợp. Các sai lầm do không biết là vận dụng quy tắc nào, khái niệm nào cho bài toán đang giải.

Thí dụ 1. Một dạ tiệc có 10 nam và 6 nữ đều khiêu vũ giỏi. Người ta chọn 3 nam và 3 nữ để ghép thành 3 cặp nhảy. Hỏi có bao nhiêu cách ghép 3 cặp nhảy ?

? Mỗi cách sắp thứ tự 3 bạn nam trong 10 bạn nam là một chỉnh hợp 3 của 10 nên số cách chọn 3 bạn nam có thứ tự là

$$A_{10}^3 = 8.9.10 = 720 \text{ cách.}$$

Tương tự số cách chọn 3 bạn nữ có thứ tự là $A_6^3 = 4.5.6 = 120$ cách.

Vậy số cách bố trí 3 cặp nhảy là

$$A_{10}^3 . A_6^3 = 720 \times 120 = 86400.$$

! Tại sao lại sắp thứ tự cả 3 bạn nam và 3 bạn nữ. Giả sử có 3 bạn nam theo thứ tự là A, B, C ghép nhảy với 3 bạn nữ theo thứ tự là a, b, c tức là ta có 3 cặp nhảy (A, a), (B, b) và (C, c). Nếu lấy thứ tự khác của 3 bạn nam là (A, C, B) và thứ tự khác của 3 bạn nữ là (a, c, b) thì ghép 3 cặp nhảy (A, a), (C, c) và (B, b) vẫn là cách ghép 3 cặp nhảy trước. Sai lầm dẫn tới số cách ghép lớn hơn thực tế vì có những cách ghép 3 cặp nhảy được tính nhiều lần. Kết quả đúng là 14400 cách ghép.

Thí dụ 2. Từ 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể viết được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau mà số này phải có chữ số 1 ?

? Gọi số thỏa mãn bài toán là $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, vì $a_1 \neq 0$ nên a_1 có 4 cách chọn. Mỗi cách chọn a_2, a_3, a_4 là một chỉnh hợp chập 3 của 4 chữ số còn lại, nên với mỗi cách chọn a_1 sẽ có A_4^3 cách chọn a_2, a_3, a_4.

Do đó số các số thỏa mãn bài toán là

$$4 \times A_4^3 = 4 \times 4! = 96.$$

! Lí luận trên quên mất (và chưa có gì bảo đảm) để số thỏa mãn bài toán có chữ số 1.

Chú ý : Có thể xét $a_1 = 1$ thì mỗi cách viết a_2, a_3, a_4 là chỉnh hợp chập 3 của 4 chữ số còn lại nên có A_4^3 số. Với $a_2 = 1$ thì a_1 có 3 cách viết và khi đó mỗi cách viết a_3, a_4 là chỉnh hợp chập 2 của 3 chữ số còn lại, nên có $3 \times A_3^2 = 18$ số.

Tương tự, $a_3 = 1$ có 18 số, $a_4 = 1$ có 18 số. Vậy số các số thỏa mãn bài toán là $A_4^3 + 3 \times 18 = 78$ số.

Thí dụ 4. Trong một buổi họp mặt có 5 bạn nam và 5 bạn nữ. Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi quanh một bàn tròn sao cho các bạn nam, nữ ngồi xen kẽ nhau ?

? Hãy cố định chỗ ngồi cho 1 bạn nam thì mỗi cách xếp 4 bạn nam còn lại là một hoán vị của 4 nên có 4! cách xếp. Mặt khác 5 chỗ ngồi của 5 bạn nữ là xác định nên có 5! cách xếp các bạn nữ.

Vậy số cách xếp chỗ ngồi cho 10 bạn thỏa mãn bài toán là
$4!\,5! = 24 \times 120 = 2880$ cách.

! Đối với bài toán xếp chỗ ngồi cho một cuộc gặp mặt xung quanh một bàn tròn đang có nhiều quan điểm. Như thế nào là một cách bố trí vị trí ngồi cho mọi người ? Đề bài không nói rõ thì hiểu như thế nào đây ? Ta chỉ quan tâm tới thứ tự của mọi người với nhau hay quan tâm tới cả vị trí ngồi ? Với một thứ tự đã định vẫn có thể bố trí vị trí ngồi khác nhau.

Chẳng hạn có 2 bạn thôi thì chỉ có một thứ tự bố trí 2 bạn, nhưng vị trí ngồi thì rõ ràng là có hai cách bố trí vị trí ngồi khác nhau. Nếu giả thiết bài toán không nói rõ như thế nào là hai cách bố trí ngồi khác nhau thì lời giải không xác định hoặc là các bạn phải biện luận.

Nếu hiểu như bình thường thì tùy thứ tự ngồi không đổi nhưng vị trí ngồi khác nhau là các cách bố trí, khác nhau thì lời giải trên là sai lầm. Khi đó lời giải đúng là :

Hãy bố trí chỗ ngồi cho bạn nam A_1 thì có 10 vị trí khác nhau.

Với mỗi vị trí của A_1 thì mỗi cách bố trí 4 bạn nam còn lại là một hoán vị của 4 nên có 4! cách xếp các bạn nam và mỗi cách xếp vị trí cho 5 bạn nữ là một hoán vị của 5 nên có 5! cách xếp.

Vậy với mỗi vị trí của bạn nam A_1 sẽ có 4! 5! cách bố trí chỗ ngồi cho 9 bạn còn lại.

Do đó có $10 \times 4!\,5! = 28800$ cách bố trí thỏa mãn bài toán.

Thí dụ 4. Cho 10 điểm trên mặt phẳng trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Xét tập hợp các đường thẳng đi qua 2 điểm của 10 điểm đã cho. Hãy tính số giao điểm khác 10 điểm đã cho, do các đường thẳng này tạo thành nhiều nhất là bao nhiêu ?

?Mỗi đường thẳng đi qua đúng 2 trong 10 điểm đã cho (vì không có 3 điểm nào thẳng hàng). Do đó số các đường thẳng có được là

$$C_{10}^{2} = \frac{10!}{8!\,2!} = 45.$$

Để số giao điểm tạo thành do các đường thẳng khác 10 điểm đã cho là nhiều nhất thì các đường thẳng này không có cặp đường nào song song và không có 3 đường nào đồng quy.

Khi đó cứ 2 đường thẳng cho 1 giao điểm. Nên số giao điểm tạo thành là C_{45}^2 , trong đó có 10 điểm đã cho nên số giao điểm nhiều nhất khác 10 điểm đã cho là $C_{45}^2 - 10 = \dfrac{45!}{43!\,2!} - 10 = 980$

! Với mỗi điểm đã cho, khi nối với 9 điểm còn lại sẽ có 9 đường thẳng và 9 đường thẳng này đồng quy. Do đó giả thiết các đường thẳng không có 3 đường nào đồng quy là không thể có và từ đây dẫn tới sai lầm của lời giải. Kết quả đúng là 630 điểm.

Thí dụ 5. Cho 4 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Cứ qua 2 điểm trong 4 điểm người ta kẻ 1 đường thẳng. Hãy cho biết số giao điểm tạo thành khác 4 điểm đã cho sẽ ít nhất là bao nhiêu ?

? Thấy ngay số các đường thẳng là $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!\,2!} = 6$.

Để số giao điểm tạo thêm ngoài 4 điểm đã cho là ít nhất thì trong 6 đường thẳng này phải có nhiều cặp đường thẳng song song nhất. Do chỉ có 4 điểm nên không thể có 3 đường thẳng song song với nhau. Vì vậy các cặp đường thẳng song song sẽ khác phương nhau. Suy ra số cặp nhiều nhất là 2, khi 4 điểm là các đỉnh của một hình bình hành ABCD. Do đó số giao điểm được tạo thêm ít nhất là 1, chính là giao của AC và BD.

! Lời giải trên sẽ đúng nếu giả thiết 4 điểm đã cho thuộc một mặt phẳng. Trong không gian hãy lấy 4 điểm là 4 đỉnh của một tứ diện thì số giao điểm tạo thêm ngoài 4 điểm đã cho sẽ là ... 0!

Thí dụ 6. Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể viết được bao nhiêu số gồm 8 chữ số mà trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần và mỗi chữ số khác có mặt đúng 1 lần.

? Xét tập hợp A = {0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5}

Gọi số thỏa mãn bài toán là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$ thì a_1 có 5 cách viết trong 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5.

Với mỗi cách viết a_1 thì mỗi cách viết tiếp a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 là một hoán vị của 7 phần tử còn lại trong tập A, nên có 7! cách viết.

Suy ra, số các số thỏa mãn bài toán là $5 \times 7! = 25200$ số, nếu như coi 3 chữ số 1 khác nhau. Với 3 vị trí nào đó của 3 chữ số 1 sẽ cho 3! hoán vị như nhau. Do đó số các số thỏa mãn bài toán đúng là

$$\frac{5 \times 7!}{3!} = 4200 \text{ số.}$$

! Nếu coi 3 chữ số 1 là khác nhau thì a_1 phải có 7 cách viết. Sau đó lí luận tương tự như trên sẽ có đáp số đúng là $\frac{7 \times 7!}{3!} = 5880$ số.

Thí dụ 7. Một cửa hàng có 4 cửa ra, vào. Hỏi có bao nhiêu cách vào một cửa và khi ra cửa khác.

? Mỗi cách chọn vào một cửa và ra một cửa khác là một tổ hợp chập 2 của 4. Do đó số cách thỏa mãn là $C_4^2 = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$ cách.

! Vì phân biệt cửa vào và cửa ra nên mỗi cách vào một cửa, ra cửa khác không phải là một tổ hợp chập 2 của 4 mà phải là một chỉnh hợp chập 2 của 4. Do đó số cách thỏa mãn là $A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12$.

Thí dụ 8. Giải phương trình

$$A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$$

? Ta có $\frac{x!}{(x-3)!} + \frac{x!}{2!\,(x-2)!} = 14x$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2) + \frac{x(x-1)}{2} = 14x$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = \frac{5}{2} \end{array}\right.$.

Phương trình có hai nghiệm $x = 5$; $x = \frac{5}{2}$.

! Lời giải trên chưa có điều kiện để A_x^3 và C_x^{x-2} có nghĩa. Cần phải bổ sung điều kiện này là $x \geq 3$ và $x \in \mathbf{Z}$. Từ đó, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

1.2.12. Sai lầm khi giải toán nguyên hàm, tích phân

Những sai lầm thuộc phần này liên quan tới sự hiểu biết không đúng các khái niệm và vận dụng sai các định lí, quy tắc.

Thí dụ 1. Chứng minh : $F(x) = -(1+x)e^{-x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = xe^{-x}$. Từ đó hãy tìm nguyên hàm của $g(x) = (x-1)e^{-x}$.

? Ta có

$F'(x) = -e^{-x} + (1+x).e^{-x} = xe^{-x} = f(x) \Rightarrow F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

Ta có : $\int g(x)\,dx = \int (x-1)\,e^{-x}\,dx$

$= \int x\,e^{-x}\,dx - \int e^{-x}\,dx =$

$= [-(1+x)e^{-x} + c] - [-e^{-x} + c] =$

$= -(1+x)e^{-x} + e^{-x} = -x.e^{-x}$.

! Sai lầm của lời giải trên tương tự như sai lầm khi giải hệ phương trình lượng giác mà HS viết chung kí hiệu k với $k \in \mathbf{Z}$ cho biểu thức nghiệm của hai phương trình nên khi trừ từng vế của hai phương trình đã làm mất nghiệm của hệ.

Đối với việc lấy nguyên hàm cũng vậy, HS hay viết hằng số C cho mọi phép tính nguyên hàm nên dẫn tớ sai lầm. Cần sửa lại doạn cuối của lời giải trên.

Thí dụ 2. Tính $\int (2x + 1)^3\, dx$.

? Ta có $\int (2x + 1)^3\, dx = \dfrac{(2x + 1)^4}{4} + c.$

! Lời giải trên dã vận dụng công thức :

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ với } n \neq -1.$$

Ở dây phải đặt $u = 2x + 1 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{2}$ để có lời giải dúng.

Thí dụ 3. Tính $\int\limits_{-2}^{0} (x + 1)^2\, dx.$

? Đặt $u = (x + 1)^2 \Rightarrow du = 2(x + 1)dx \Rightarrow$

$\Rightarrow dx = \dfrac{du}{2(x + 1)} = \dfrac{du}{2\sqrt{u}}$. Với $x = -2$ thì $u = 1$; $x = 0$ thì $u = 1$.

Do dó

$$\int\limits_{-2}^{0} (x + 1)^2\, dx = \int\limits_{1}^{1} \frac{udu}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int\limits_{1}^{1} \sqrt{u}\, du = 0$$

! Lưu ý $u = (x + 1)^2$ không phải hàm số dơn diệu trên $[-2 ; 0]$ nên không thể dổi biến, đổi cận như lời giải trên được. Nếu muốn dổi biến thì phải viết tích phân cần tính thành tổng của hai tích phân mà $u = (x + 1)^2$ dơn diệu. Lời giải trên còn sai lầm khi viết $dx = \dfrac{du}{2(x + 1)} = \dfrac{du}{2\sqrt{u}}$, như vậy dã từ $u = (x + 1)^2$ suy ra $x + 1 = \sqrt{u}$, diều này chỉ được viết khi $x \geq -1$.

Thí dụ 4. Tính $\int\limits_{-1}^{2} \dfrac{dx}{x^2}$

? Áp dụng định lí Newton - Leibnitz :

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{2}x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_{-1}^{2} = \frac{-1}{2} - 1 = \frac{-3}{2}$$

! Hàm số $y = \frac{1}{x^2}$ gián đoạn tại $x = 0 \in [-1\,;\,2]$ nên không sử dụng được định lí Newton - Leibnitz để tính tích phân như ở trên. Nhớ rằng giả thiết của định lí Newton - Leibnitz là $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$, đó chính là phạm vi được sử dụng định lí này.

Lời giải đúng là :

Vì hàm số $y = \frac{1}{x^2}$ không xác định tại $x = 0 \in [-1\,;\,2]$ nên tích phân này không tồn tại.

Chú ý : Có thể nhận xét $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$ nên hàm số không bị chặn trên $[-1\,;\,2]$, do đó tích phân này không tồn tại.

Thí dụ 5. Tính $\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1 + \sin x}$

? Đặt $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ thì $dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$

Do đó $\int\frac{dx}{1 + \sin x} = 2\int\frac{dt}{(t + 1)^2} = 2\int(t + 1)^{-2}\,d(t + 1)$

$$= 2\,.\,\frac{-1}{(t + 1)} + c = \frac{-2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1} + c.$$

Áp dụng định lí Newton - Leibnitz thì

$$\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1 + \sin x} = \frac{-2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}\Big|_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{-2}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} + 1} + \frac{2}{\operatorname{tg}0 + 1}.$$

Vì tg $\frac{\pi}{2}$ không xác định nên tích phân cần tính không xác định.

! Đây là sai lầm của nhiều học sinh hay dùng công thức lượng giác để biểu diễn sinx, cosx, tgx, cotgx qua tg $\frac{x}{2}$.

Việc tg $\frac{\pi}{2}$ không xác định ở trên chỉ suy ra được tích phân đã cho không tính được bằng phương pháp đó.

Thí dụ 6. Với $0 < \alpha < \pi$, tính

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}.$$

? Ta có $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}$

$$= \frac{1}{\sin^2\alpha} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\left(\frac{x - \cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sin\alpha} \int_{-1}^{1} \frac{d\left(\frac{x - \cos\alpha}{\sin\alpha}\right)}{\left(\frac{x - \cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha} \operatorname{arctg}\left(\frac{x - \cos\alpha}{\sin\alpha}\right) \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{-1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right]$$

! Lời giải chưa thể dừng lại ở kết quả trên, tức là nếu dừng lại như thế HS đang còn "nợ" bài toán rút gọn. Cần tiếp tục lời giải :

$$I = \frac{1}{\sin\alpha} \left[\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha} \left[\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right)\right]$$

Vì $\frac{\alpha}{2} ; \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$

do $0 < \lambda < \pi$ nên $I = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sin\alpha}$.

Thí dụ 7. Tính $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x}\, dx$.

? Ta có $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x}\, dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2}\, dx$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) dx = 2\int_0^{2\pi} \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) d\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\left(-\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 2(1 + 1) = 4$$

! Lời giải sai lầm khi biến đổi biểu thức

$$\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2} = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$$

$$= -2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}} + 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= 2\sqrt{2} + 2 - 2 + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

Phần quan trọng của Chương I luận án

1.3. PHÂN TÍCH CÁC NGUYÊN NHÂN DẪN TỚI SAI LẦM CỦA HỌC SINH PHỔ THÔNG TRUNG HỌC KHI GIẢI TOÁN

Chúng tôi chủ yếu nghiên cứu những nguyên nhân về kiến thức của HS đã dẫn tới sai lầm. Đối với những nguyên nhân về ý thức và ý chí của HS, những nguyên nhân về năng lực chuyên môn và phẩm chất nghề nghiệp của GV, chúng tôi sẽ bàn đến khi nêu ra các yêu cầu cần thiết để thực hiện có hiệu quả các biện pháp được đề xuất ở chương 2.

1.3.1. Nguyên nhân 1: ***Hiểu không đầy đủ và chính xác các thuộc tính của các khái niệm toán học.***

Chúng ta biết rằng : ***Khái niệm là một trong các sản phẩm của tư duy toán học.*** Mỗi khái niệm đều có ***nội hàm và ngoại diên.*** Tập hợp các dấu hiệu đặc trưng cho bản chất của các đối tượng được phản ánh trong khái niệm chính là nội hàm của khái niệm. Tập hợp các đối tượng có chứa các dấu hiệu trên chính là ngoại diên của khái niệm. Việc *không nắm vững nội hàm và ngoại diên của một khái niệm sẽ dẫn HS tới sự hiểu không trọn vẹn, thậm chí sai lệch bản chất của khái niệm.* Từ đó, các sai lầm khi giải toán sẽ xuất hiện. Mặt khác nhiều khái niệm trong toán học là mở rộng hoặc thu hẹp của một khái niệm có trước đó. Việc HS *không nắm vững khái niệm này sẽ dễ dẫn tới việc không hiểu và không thể có biểu tượng về khái niệm khác.* Mối quan hệ giữa các khái niệm trong toán họccó tính liên kết lôgic. Nhiều khái niệm khó trong toán học mới được đưa vào trong chương trình PTTH như : vectơ, biến hình, nguyên hàm, tích phân... Nếu chúng ta không kịp thời có những cố gắng hoàn thiện mới về phương pháp giảng dạy các khái niệm thì HS sẽ rất khó khăn trong việc lĩnh hội các khái niệm đó.

Nhiều khi người ta hay nói tới sự "mất gốc" của HS về kiến thức thì trước hết cần hiểu rằng : đó là *sự "mất gốc" về các khái niệm.* Không hiểu sự mở rộng khái niệm góc hình học sang khái niệm góc lượng giác thì HS gặp ngay khó khăn trong việc nắm vững khái niệm về các hàm lượng giác và từ đó việc biểu diễn góc lượng giác, việc giải các phương trình, đặc biệt việc giải các bất phương trình lượng giác sẽ không tránh khỏi sai lầm. Nhiều HS đã viết $\sin x < 1 \Rightarrow x < \pi/2 + 2k\pi$, hay khi giải hệ phương trình lượng giác thì các số nguyên khác nhau đều được ký hiệu là k và dẫn tới sự thu hẹp tập nghiệm. Ngay hai đơn vị đo góc lượng giác là độ và radian mà HS cũng không hiểu được đây là hai đơn vị đo khác nhau dẫn tới cách viết sai lầm $60^\circ + 2k\pi$ (?). Một sai lầm khá phổ biến là nhiều HS không biết rằng : khi viết $y = \sin x$ và $y' = \cos x$ thì x phải đo bởi đơn vị radian, do đó viết sai rằng $y' = 0 \Leftrightarrow x = 90^\circ + k.180^\circ$ (?).

HS không nắm được khái niệm giới hạn của dãy số sẽ dẫn tới một loạt sự không hiểu các khái niệm tiếp theo như : giới hạn hàm số, tính liên tục của hàm số, đạo hàm, nguyên hàm, tiệm cận của các đường cong. Thậm chí nhiều HS còn hiểu các ký hiệu ∞, $+\infty$, $-\infty$ là các số, nên sẵn sàng viết : $\infty - \infty = 0$, $0 . \infty = 0$, $1^{\infty} = 1$ (?). Một số HS còn hiểu "x tiến tới a" tức là "thay x bởi a" (?). Một số thì nghĩ rằng "hai đường tiệm cận nhau thì không cắt nhau" (?). Nhiều HS không hình dung nổi khái niệm tiếp xúc của hai đường nên khẳng định sai lầm là "tiếp tuyến tại điểm uốn của đường bậc ba không tiếp xúc với đường bậc ba đó" (?) (chỉ vì thấy tiếp tuyến đặc biệt này "đi xuyên qua đồ thị").

HS không hiểu khái niệm về căn thức nên đã viết $\sqrt{a^2} = a$ hay $\sqrt{a^2} = -a$, từ đó dẫn tới sai lầm khi giải phương trình và khi biến đổi các biểu thức.

HS không hiểu khái niệm cực trị của hàm số (cực đại, cực tiểu) nên không phân biệt được khái niệm này với khái niệm về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số, đặc biệt là sự lạm dụng ký hiệu y_{max} , y_{min}.

HS không hiểu khái niệm ánh xạ sẽ dẫn tới không nắm vững các khái niệm về phép biến hình, hàm số, hàm số hợp, hàm số ngược. HS không hiểu khái niệm hàm hợp, nên nhận dạng các hàm hợp còn yếu, từ đó HS tính sai đạo hàm của các hàm số hợp, chẳng hạn $y = \sin(-2x)$ thì $y' = \cos(-2x)$ (?). HS không hiểu khái niệm hàm ngược, nên tưởng rằng hai hàm số $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$ ngược nhau, nhưng lại khó hiểu khi nghe nói hàm số $y = 2^x$ là hàm số ngược của hàm số $y = \log_2 x$ (?). HS không hiểu khái niệm hàm số đơn điệu nên nhận định sai lầm "hàm số $y = 1/x$ luôn nghịch biến" mà lẽ ra phải nói "hàm số nghịch biến trên hai khoảng $(-\infty ; 0)$ và $(0 ; +\infty)$".

HS không hiểu khái niệm nguyên hàm, dẫn tới việc chứng minh hệ thức giữa các nguyên hàm bằng cách chứng minh "đạo hàm hai vế bằng nhau" (?). Lẽ ra phải hiểu rằng nguyên hàm của một hàm số f(x) là một tập hợp các hàm F(x) sao cho F'(x) = f(x) nên chứng minh hai nguyên hàm bằng nhau, tức là phải theo nguyên tắc chứng minh hai tập hợp bằng nhau.

Rất hay, bằng nhau theo Nghĩa bằng nhau giữa 2 tập hợp

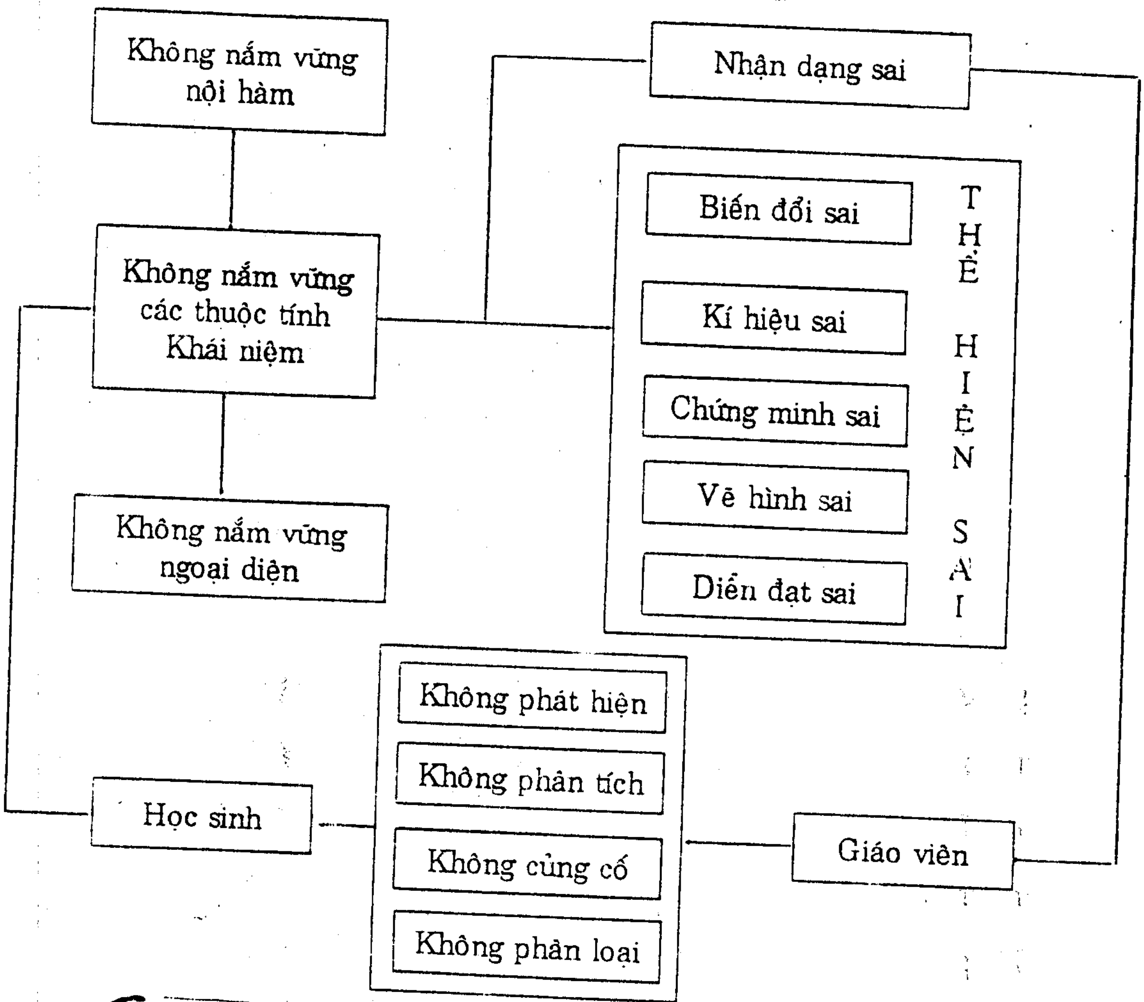
HS không nắm vững khái niệm về hệ trục tọa độ Đề các vuông góc, nên nhiều khi ***lấy đơn vị đo trên hai trục tọa độ khác nhau để "dễ vẽ" đồ thị của một hàm số nào đó.***

HS không nắm vững khái niệm về parabol nên đã nhầm lẫn khi gọi tên một số đường có hình dạng hơi giống parabol, chẳng hạn đường $y = x^4$. HS không nắm được khái niệm quỹ tích nên nhiều khi mới làm xong phần thuận đã diễn đạt sai : "quỹ tích các điểm thỏa mãn tính chất của bài toán là đường..." Thậm chí luôn nghĩ quỹ tích phải là một đường, chứ không bao giờ là một miền mặt phẳng tọa độ, đặc biệt không bao giờ quỹ tích chỉ gồm 1 điểm (!).

HS có khi còn ***nhầm lẫn khái niệm với định lý,*** chẳng hạn vì không nắm được khái niệm số mũ 0 của lũy thừa nên đã "chứng minh $2^0 = 1$". HS không nắm được mối quan hệ giữa khái niệm số mũ thực và khái niệm căn thức nên cứ tưởng $2^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{2}$ với mọi x thuộc R, từ đó dẫn tới giải sai phương trình $\sqrt[x]{2} = 2$ vì đưa phương trình về dạng $2^{\frac{1}{x}} = 2$ rồi dẫn tới nghiệm x = 1 (?).

HS không hiểu khái niệm về nghiệm của một hệ phương trình nên nhiều khi kết luận hệ hai ẩn x, y có "hai nghiệm là x = 1 và y = 2". ? Thừ

Như vậy, qua các dẫn chứng cụ thể trên chúng ta có thể thấy từ việc không nắm vững các thuộc tính của khái niệm, HS có thể bị dẫn tới các sai lầm trong lời giải. Chúng tôi xin lưu ý tới nguyên nhân này vì nếu GV không có các biện pháp sư phạm kịp thời thì chính từ đó sẽ gây ra hậu quả lớn cho HS, thể hiện qua sơ đồ sau (sơ đồ 1) :



1.3.2 Nguyên nhân 2 : *Không nắm vững cấu trúc lôgic của định lý.*

Định lý là một mệnh đề đã được khẳng định đúng. Cấu trúc thông thường của định lý có dạng $A \Rightarrow B$. Trong cấu trúc của định lý $A \Rightarrow B$ thì A là giả thiết của định lý và cho chúng ta biết phạm vi sử dụng được định lý. Người ta còn nói A là điều kiện đủ để có B. Nhưng khá nhiều HS lại không nắm vững hoặc coi thường giả thiết A nên dẫn tới sai lầm khi giải toán.

Điều kiện cần
Điều kiện đủ.

Khi học định lí Viete thuận, nhiều HS chỉ nhớ tổng và tích hai nghiệm là bao nhiêu, chứ không để ý tới giả thiết của định lý là phương trình phải là phương trình bậc hai có nghiệm ($a \neq 0$, $\Delta \geq 0$). Từ đó, HS sẽ mắc sai lầm khi áp dụng định lí này.

Khi học định lý về dấu của tam thức bậc hai, HS chỉ nhớ là nếu $\Delta < 0$ thì $f(x) = ax^2 + bx + c$ luôn cùng dấu với hệ số a mà không lưu ý $a \neq 0$ (xem thí dụ 1 mục 1.2.5 trang 30).

Nhiều HS nhầm giả thiết A của định lý cũng là điều kiện cần để có kết luận B nên mắc sai lầm. Khi học định lý về chiều biến thiên của hàm số "Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc (a;b) thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên (a;b)", khá nhiều HS nghĩ đây là điều kiện cần và đủ để hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên (a;b). Thực ra đây chỉ là điều kiện đủ (hàm số $y = x^3$ là hàm số đồng biến trên R, hàm số $y = \sqrt{x}$ đồng biến trên $[0;+\infty)$ nhưng không thỏa mãn giả thiết của định lý). Từ đó, HS sử dụng định lý này để xác định tham số sao cho hàm số đồng biến trên (a;b), dẫn tới thiếu các giá trị của tham số thỏa mãn yêu cầu bài toán (xem thí dụ 4, mục 1.2.8 trang 46). Khi học định lý : "Nếu $f'(x_o) = 0$ và $f''(x_o) > 0$ ($f''(x_o) < 0$) thì hàm số đạt cực tiểu (cực đại) tại $x = x_o$", HS cũng mắc sai lầm khi gặp tình huống $f'(x_o) = 0$ và $f''(x_o) = 0$ lại kết luận hàm số không có cực đại và cực tiểu (!). Tình huống này chỉ dẫn đến một suy nghĩ hợp lý là trở về quy tắc 1 xét cực trị hàm số nhờ đạo hàm bậc nhất, phản thí dụ cho sai lầm của HS là hàm $y = x^4$. Khi học định lý Veiersrtrass về sự tồn tại giới hạn dãy, nhiều HS cũng tưởng điều kiện dãy đơn điệu là điều kiện cần và lý luận sai lầm "Dãy không đơn điệu nên không có giới hạn" (?).

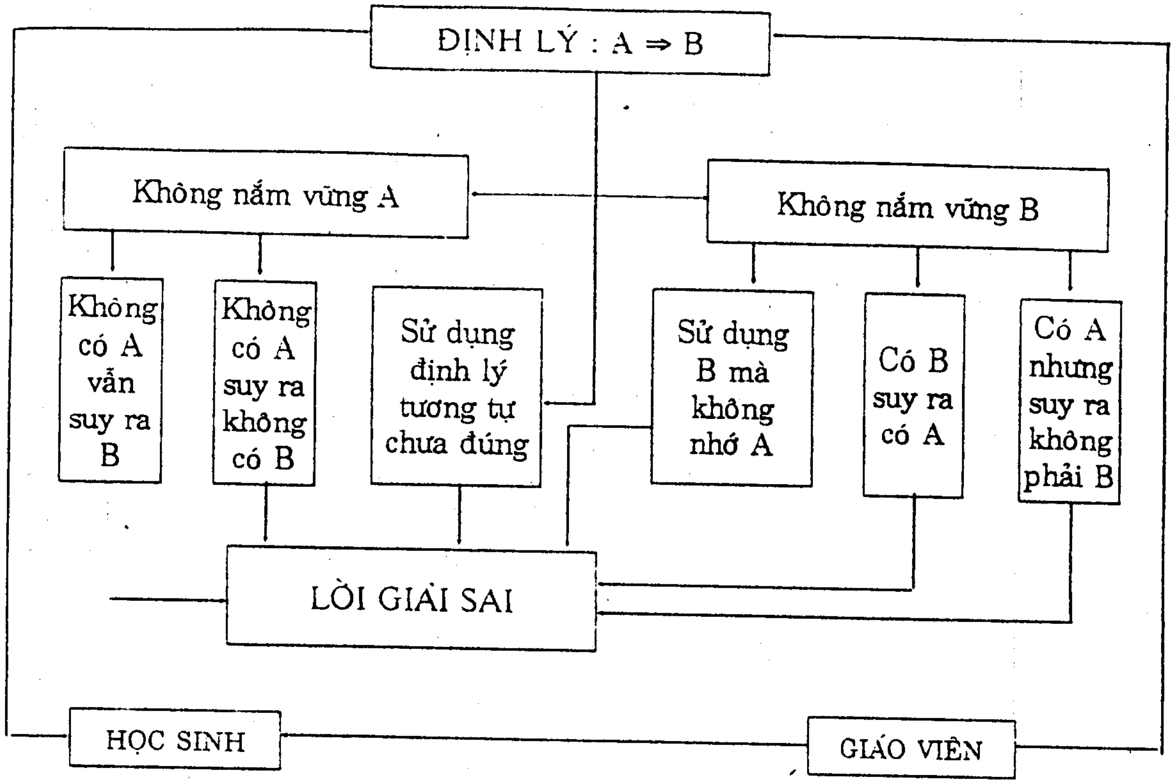
Khi dạy về điều [illegible] [illegible]

Không nắm vững giả thiết của định lý nên HS có thể áp dụng định lý ra ngoài phạm vi của giả thiết. Chẳng hạn, học quy tắc tính đạo hàm của hàm số $y = x^n$, HS không lưu ý rằng số mũ phải là hằng số nên đã áp dụng quy tắc trên để tính đạo hàm của hàm số $y = x^x$. Ngay HS PTTH mà còn nói rằng $\frac{x + 1}{x^2 + x + 1}$ là số nguyên khi và chỉ khi $x + 1$ chia hết (?) cho $x^2 + x + 1$ mặc dù x thuộc tập số thực R! Điều trên chỉ nói được nếu $x + 1$ và $x^2 + x + 1$ nhận giá trị thuộc tập các số nguyên Z. Khi học về bất đẳng thức Cauchy, HS không để ý tới giả thiết chỉ áp dụng bất đẳng thức cho các số không âm nên khi gặp bài toán so sánh $x + 1/x$ với số 2 đã áp dụng ngay để có kết luận sai lầm $x + 1/x > 2$ với $x \neq 1$ và $x + 1/x = 2$ với $x = 1$. (?). Lẽ ra HS xét $\left|x+\frac{1}{x}\right| = |x| + \left|\frac{1}{x}\right| \geq 2$ để đi tới kết luận đúng. $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^2}$ không tồn tại theo nghĩa thông tl Riemann

Nhiều HS lớp 12 vẫn dùng định lí Newton - Leibnitz để tính tích phân $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^2}$ mặc dù hàm số không xác định và liên tục tại $x = 0$ thuộc $[-2;1]$ để có đáp số sai là $-1{,}5$, thực ra tích phân này không tồn tại. Định lý về các phép toán của giới hạn dãy chỉ phát biểu cho giới hạn của một tổng hữu hạn dãy và các dãy này phải có giới hạn, nhưng nhiều học sinh áp dụng cho tổng vô hạn, thậm chí không cần từng dãy cho trước phải có giới hạn (xem thí dụ 1, mục 1.2.7 trang 39). Nguyên nhân này còn dẫn tới việc học sinh sử dụng sai các "á hằng đẳng thức" khi giải toán, chẳng hạn

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b},\ \log_2(xy) = \log_2 x + \log_2 y, \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c \ \ldots$$

Tóm lại, việc không nắm vững cấu trúc lôgic của định lý sẽ dẫn HS tới nhiều sai lầm trong khi học toán và giải toán. Chúng tôi xin lưu ý bởi sơ đồ sau (sơ đồ 2) :



1.3.3. Nguyên nhân 3 : ***Thiếu các kiến thức cần thiết về lôgic.***

Suy luận là một hoạt động trí tuệ đặc biệt của phán đoán - một trong các hình thức của tư duy. Hoạt động suy luận khi giải toán dựa trên cơ sở của lôgic học. HS thiếu các kiến thức cần thiết về lôgic sẽ mắc sai lầm trong suy luận và từ đó dẫn đến các sai lầm khi giải toán.

Trước hết, nhiều HS chưa nắm vững các phép toán của đại số mệnh đề : phủ định, kéo theo, tuyển, hội, tương đương. Ngay việc sử dụng từ nối "và", "hoặc" vẫn là điều khó khăn của rất nhiều HS. Lẽ ra cần khẳng định : "tam giác cân hoặc vuông" thì lại khẳng định "tam giác là vuông cân". Khi biến đổi phương trình tích $AB = 0$, HS vẫn viết $A = 0$ và $B = 0$.

Việc không có ý thức về phép tuyển và phép hội gây cho HS khó khăn ngay cả việc lĩnh hội các khái niệm, các định lý. Nhiều định lý có giả thiết và kết luận mang cấu trúc tuyển hoặc hội. Nhiều tính chất đặc trưng của một khái niệm cũng có các kiểu cấu trúc này. Chẳng hạn,

Chuẩn kiến thức
Võ Lương

Sử dụng ngôn ngữ

phủ định ?

định lý "Nếu hàm số đạt cực trị tại $x = x^*$ thì hàm số không có đạo hàm tại $x = x^*$ hoặc đạo hàm tại đó triệt tiêu". Nhiều HS không hiểu được từ đó suy ra một khẳng định " Nếu hàm số có đạo hàm tại điểm cực trị $x = x^*$ thì đạo hàm tại đó phải bằng 0".

Không nắm vững mối quan hệ giữa phép phủ định và các lượng từ $\forall$, $\exists$, HS rất dễ phát biểu sai các mệnh đề, nhận dạng sai các khái niệm và nhiều khi dẫn tới các phép chứng minh sai. Để khẳng định hàm số $y = 3x + 1$ không phải là hàm số chẵn, nhiều HS chứng minh $f(x) \neq f(-x)$ với $\forall x$, mà không biết rằng phủ định mệnh đề "đúng với mọi x" là mệnh đề "sai với ít nhất một giá trị của x". Như vậy chỉ cần nêu $f(1) \neq f(-1)$ là xong phép chứng minh. Để chứng minh phương trình có nghiệm, HS luôn nghĩ tới các điều kiện có nghiệm của phương trình (mà nhiều khi không có), ít để ý việc chỉ ra một nghiệm cụ thể là xong. Thậm chí, khi GV chỉ ra một nghiệm rõ ràng mà HS vẫn chưa chịu cho đấy là phép chứng minh (cứ tưởng phép chứng minh phải là một lý luận gì đó thật ghê gớm!).

Không nắm được phép phủ định, HS rất khó khăn khi phát biểu mệnh đề phản đảo của một định lý để suy ra mệnh đề phản đảo đó cũng là một định lý. Từ định lý "Nếu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ có $\Delta \leq 0$ thì $af(x) \geq 0$ với $\forall x$", nếu HS lập được mệnh đề phản đảo thì có ngay định lý "Nếu $\exists \alpha$ sao cho $af(\alpha) < 0$ thì $f(x) = ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm phân biệt". Để chứng minh hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại $x = x^*$, học sinh nhiều khi không dừng lại sau khi chỉ ra sự vi phạm một điều kiện mà lại tiếp tục tìm cách chỉ ra sự vi phạm cả những điều kiện khác và dẫn tới bế tắc trong lời giải vì nhiều khi hàm số đó chỉ vi phạm một điều kiện mà thôi (chẳng hạn hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \text{ với } x \neq 0 \\ 0 \text{ với } x = 0 \end{cases}$$

Chú ý khi chứng minh trong bài từ phủ định.

Về việc tùy tiện ... ngôn ngữ chưa xác.
Có thể cấp đến
VD: để pt có nghiệm khi và chỉ khi

thỏa mãn f(0) tồn tại, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ nhưng $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$ nên hàm số không liên tục tại $x = 0$). Không nắm được phép phủ định, HS rất khó khăn khi dùng phương pháp chứng minh phản chứng. Việc "phủ định không hoàn toàn" sẽ dẫn tới sai lầm trong lời giải phủ định $a > 0$ là $a < 0$ gây cho lời giải thiếu trường hợp $a = 0$ (xem thí dụ 6, mục 1.2.3 trang 25).

Phép toán kéo theo ⇒ Quan trọng

Phép toán kéo theo của lôgic là phép toán rất quan trọng trong việc phát biểu các định lý, khái niệm và trong lập luận của lời giải. Trong 1.3.2, chúng tôi đã phân tích nguyên nhân HS không nắm vững cấu trúc lôgic của định lý nên dẫn tới nhiều sai lầm ~~khi giải toán~~. Nhưng sự thiếu hiểu biết về lôgic, mà đặc biệt là phép toán kéo theo lại là "nguyên nhân của nguyên nhân" dẫn đến các sai lầm. Nhiều HS không hiểu đâu là điều kiện cần, điều kiện đủ và thậm chí thế nào là điều kiện cần, thế nào là điều kiện đủ, HS nhiều khi cũng khó trả lời. Việc sử dụng các từ "nếu", "thì", "vì", "do đó", "mà", "nên", "bởi vậy", "dẫn đến", "từ", "suy ra" chưa được HS sử dụng đúng. Hiện tượng trong bài giải của HS tràn ngập ký hiệu ⇒, ⇔ một cách tùy tiện không phải sự đáng mừng cho việc lôgic hóa lời giải. Nhiều trường hợp HS viết $A \Rightarrow B$ nhưng A không phải là điều kiện đủ để có B. Thậm chí khi tìm điều kiện cần và đủ, HS vẫn diễn đạt một từ "để" thật phi lôgic : "Để phương trình... có nghiệm khi và chỉ khi...", lẽ ra phải bỏ từ này. Một "sáng kiến" cho việc không dùng các phép kéo theo hoặc tương đương khi biến đổi các mệnh đề là HS cứ viết xong mỗi mệnh đề lại xuống dòng mà giữa hai dòng không hề có ký hiệu lôgic gì cả ! Biết bao nhiêu HS thường băn khoăn : bài quỹ tích này có cần làm phần đảo hay không ?

HS còn *thiếu những hiểu biết về các quy tắc suy luận nên dẫn tới nhiều sai lầm khi thực hiện các phép chứng minh.* Phân tích các suy luận trong chứng minh toán học, ta thấy mỗi chứng minh bao gồm một số bước cơ bản, mà mỗi bước được thực hiện theo những quy tắc nhất định gọi là các quy tắc suy luận.

HS nhiều khi nhầm phép suy ngược tiến là một phép chứng minh. Chẳng hạn, để chứng minh với mọi a, b, c ta có bất đẳng thức

$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$ có HS đã viết

$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$

$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac \geq 0$

$\Rightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$, do bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng nên bất đẳng thức cần chứng minh cũng đúng.

HS dễ bị nhầm khi sử dụng các quy tắc sai :

$$\frac{A \rightarrow B,\ B}{A}$$

$$\frac{A \rightarrow B,\ \overline{A}}{\overline{B}}$$

Chẳng hạn những suy luận sai lầm như "Nếu dãy số tiến và bị chặn trên thì có giới hạn, mà dãy có giới hạn nên dãy phải tiến và bị chặn trên" hoặc "Nếu dãy số tiến và bị chặn trên thì có giới hạn, nhưng dãy số không tiến và cũng không bị chặn trên nên dãy không có giới hạn".

HS còn chưa hiểu thực chất của phép quy nạp toán học, nhiều khi dùng phép tương tự thay phép chứng minh bằng quy nạp toán học. Chẳng hạn, để tính đạo hàm bậc n của hàm số $y = e^{2x}$, HS lần lượt tính $y' = 2e^{2x}$, $y'' = 4e^{2x}$, $y''' = 8e^{2x}$ và tương tự suy ra $y^{(n)} = 2^n e^{2x}$ mà không chứng minh gì thêm (?). Khi chứng minh quy nạp toán học, HS luôn xét n = 1, mặc dù bài toán yêu cầu chứng minh với n > 2. HS chưa hiểu được vì sao lại giả sử bài toán đúng với n = k để chứng minh bài toán đúng với n = k + 1, thậm chí còn thắc mắc : với n = k ta chưa chứng minh thì sao lại đúng được!

Khi chứng minh phản chứng, như đã nói ở trên ***HS không biết phủ định một mệnh đề***. Nhiều em tuy biết là phải dẫn tới mâu thuẫn thì mới kết thúc phép chứng minh phản chứng, nhưng thường chỉ nghĩ dẫn đến mâu thuẫn với giả thiết mà không biết rằng có khi phải phối hợp với giả thiết để dẫn đến mâu thuẫn với một chân lý nào đó đã được khẳng định hoặc dẫn tới hai mệnh đề mâu thuẫn nhau. HS không biết đầy đủ về 3 hình thức suy luận phản chứng thường dùng

$$\frac{\overline{A} \Rightarrow B,\ \overline{B}}{A}$$

$$\frac{B,\ \overline{A} \Rightarrow \overline{B}}{A}$$

$$\frac{\overline{A} \Rightarrow \overline{B}}{B \Rightarrow A}$$

$$\frac{A \Rightarrow B,\ \overline{B}}{\overline{A}}$$

đổi A thay $\overline{A}$

Vì $\overline{A}$ thay A mới kiểu sai, khó

Một trong những nguyên nhân làm cho HS định hướng sai lầm khi giải toán, thậm chí không tìm ra lời giải là có những mệnh đề B do nhiều mệnh đề có thể độc lập suy ra được mà HS không nhớ được hết. Do đó phép phân tích đi lên để tìm lời giải không phải lúc nào cũng thực hiện được trong hoàn cảnh HS không nắm được các điều kiện đủ để có B.

Trong SGK thì các phép chứng minh được trình bày theo phương pháp tổng hợp mà không qua phương pháp phân tích để dẫn tới cách chứng minh, trong khi đó thì GV lại không thể hiện dưới dạng tường minh các kiến thức về các quy luật, quy tắc, phương pháp suy luận đã được sử dụng.

1.3.4. Nguyên nhân 4 : ***Học sinh không nắm vững phương pháp giải các bài toán cơ bản***

HS không nắm vững phương pháp giải của các bài toán cơ bản thì dẫn tới sai lầm trong lời giải.

Không nắm vững phương pháp giải, HS không nghĩ được đủ các khả năng cần xét và dẫn tới đặt điều kiện sai (xem các thí dụ 1, 2, 4, mục 1.2.5 trang 30–32).

Không nắm vững phương pháp giải, HS sẽ biện luận không đủ các trường hợp xảy ra của bài toán.

Không nắm vững phương pháp giải, HS sẽ áp dụng không đúng phạm vi và dẫn tới bế tắc không đi tới lời giải. Chẳng hạn, sau khi giải các phương trình cụ thể $3^x + 4^x = 5^x$, $6^x + 3^x = 2^x$ HS có thể được hình thành một phương pháp giải cho lớp các phương trình $a^x + b^x = c^x$ với

$$\begin{cases} a,\ b,\ c, > 0 \\ \left[\begin{array}{l} a,\ b > c \\ a,\ b < c \end{array}\right. \end{cases}$$

$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

và phương trình có một nghiệm đã biết x_o như sau :

- Đưa phương trình về dạng $\left(\frac{a}{c}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x = 1$

- Chỉ ra $x = x_o$ là nghiệm

- Nếu $\frac{a}{c}, \frac{b}{c} > 1$ thì $f(x) = \left(\frac{a}{c}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x$ đồng biến nên $x = x_o$ là nghiệm duy nhất.

- Nếu $0 < \frac{a}{c}, \frac{b}{c} < 1$ thì f(x) nghịch biến và nghiệm $x = x_o$ cũng duy nhất.

Với phương pháp giải này, HS sẽ thành công khi giải phương trình $12^x + 5^x = 13^x$ $(x = 2)$, nhưng sẽ thất bại nếu áp dụng với phương trình $4^x + 6^x = 9^x$. Phương trình này không dùng được phương pháp giải trên vì không nhẩm ra nghiệm x_o. Mặc dù với phương pháp giải trên ta vẫn chứng minh được tính duy nhất của nghiệm. HS quên mất phương pháp giải cho lớp các phương trình dạng

$$A(a^2)^{f(x)} + B(ab)^{f(x)} + C(b^2)^{f(x)} = 0$$

(ở đây $A = B = 1$; $C = -1$; $a = 2$, $b = 3$, $f(x) = x$) là đặt ẩn phụ $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$ để đưa phương trình về dạng

$$At^2 + Bt + C = 0.$$

Không nắm vững phương pháp giải HS có thể bỏ qua những bước quan trọng và đi ngay tới kết luận (xem thí dụ 5 và 1, mục 1.2.4 trang 26–29).

Không nắm vững các phương pháp giải của cùng 1 loại toán, HS không chọn ra được phương pháp giải tối ưu cho một bài toán cụ thể. Chẳng hạn : "Tìm m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - m}{x + m}$ trên $[0; 1]$ đúng bằng 2", khá nhiều HS sử dụng phương pháp giải dùng đạo hàm, chia các trường hợp và lập bảng biến thiên của y trên $[0;1]$, từ đó tìm m. Lời giải này vẫn ra kết quả đúng nhưng quá phức tạp. Trong khi đó chỉ cần để ý $f(0) = -1$ với $m \neq 0$ thì HS dễ dàng xét hai trường hợp $m \neq 0$; $m = 0$ và chứng minh được ngay không có m thỏa mãn bài toán.

Sự phức tạp của phương pháp giải cùng với những nguyên nhân về tâm lí rất dễ đưa HS tới lời giải sai lầm.

Không nắm vững phương pháp giải, lời giải của HS sẽ không có trình tự lôgic và sẽ không biết khi nào kết thúc lời giải.

KẾT LUẬN

Tất cả kết quả nghiên cứu ở chương này, cho phép chúng tôi khẳng định :

* HS còn mắc nhiều sai lầm khi giải toán.

Mắc nhiều sai lầm khi giải t

* Những sai lầm của HS có thể hệ thống lại để giúp GV dễ phát hiện trong lời giải của HS.

* Những sai lầm khi giải toán của HS xuất phát từ nhiều nguyên nhân về kiến thức.

* Từ những nghiên cứu này, chúng tôi có cơ sở thực tiễn và lí luận để đề nghị các biện pháp hiệu quả nhằm phân tích, sửa chữa và hạn chế các sai lầm của HS khi giải toán. Từ đó, góp phần hoàn thiện lí luận dạy học môn toán và rèn luyện năng lực giải toán cho HS PTTH.

Chương 2

CÁC BIỆN PHÁP RÈN LUYỆN NĂNG LỰC GIẢI TOÁN CHO HỌC SINH PHỔ THÔNG TRUNG HỌC THÔNG QUA PHÂN TÍCH VÀ SỬA CHỮA SAI LẦM

2.1. CƠ SỞ LÍ LUẬN

Trong quá trình nghiên cứu để xây dựng các biện pháp hạn chế và sửa chữa các sai lầm của HS khi giải toán, chúng tôi đã dựa trên cơ sở lí luận khoa học sau đây.

2.1.1. Lí luận về phương pháp dạy học

Căn cứ này là tiền đề để bổ sung vào phương pháp dạy học môn toán nhằm đạt mục đích đề ra là hạn chế, sửa chữa các sai lầm của HS khi giải toán. Theo Nguyễn Ngọc Quang, "phương pháp dạy học là cách thức làm việc của thầy và của trò trong sự phối hợp thống nhất và dưới sự chỉ đạo của thầy, nhằm làm cho trò tự giác, tích cực, tự lực đạt tới mục đích dạy học" [76, tr. 23]. Khái Niệm ppdhọc

Phương pháp dạy phải có hai chức năng là truyền đạt và chỉ đạo. Phương pháp học cũng có hai chức năng là tiếp thu và tự chỉ đạo [76, tr. 24].

Phương pháp khoa học toán học và phương pháp dạy học toán học là đẳng cấu, nhưng không đồng nhất. Người HS chỉ chủ động sáng tạo trong khuôn khổ của sự chỉ đạo sư phạm của GV, của chương trình đào tạo, phát hiện lại chân lí mới cho bản thân [76, tr. 31].

Các nhà tâm lí học khẳng định rằng "mọi trẻ em bình thường không có bệnh tật gì ***đều có khả năng đạt được học vấn toán học*** *phổ thông,* cơ bản, dầu cho chương trình toán dã hiện dại hóa" [40, tr. 49].

Như vậy có thể thấy rằng ***các sai lầm của HS khi giải toán là có thể khắc phục được.***

Giáo dục học môn toán liên hệ khăng khít với một số khoa học khác : khoa học duy vật biện chứng và duy vật lịch sử, toán học, giáo dục học, tâm lí học lôgic học, điều khiển học và lý thuyết thông tin.

Các biện pháp sửa chữa sai lầm cho HS khi giải toán cũng phải ***dựa trên mối liên hệ hữu cơ của các bộ môn khoa học trên.***

Các biện pháp sửa chữa sai lầm cho HS, cũng như phương pháp dạy học nói chung phải phản ánh được : cấu trúc bên ngoài và cấu trúc bên trong, đặc biệt đối với cấu trúc bên trong phải chỉ ra được các thao tác trí tuệ, cách thức tổ chức lôgic của sự nhận thức và lĩnh hội của HS.

Đối với việc chỉ ra các sai lầm của HS khi giải toán cũng có nhiều quan điểm khác nhau trên thế giới.

Nửa thế kỉ sau của thế kỉ XIX, một số nhà giáo dục học người Đức mà tiêu biểu là Aphogut Lai cho rằng : việc chú ý tới các sai lầm của HS trong giờ học ***có ảnh hưởng xấu*** đến việc tiếp thu bài giảng. Đặc biệt quan điểm này đề nghị ***không viết lại lời giải sai*** lên bảng vì điều này làm củng cố thêm sai lầm trong ý thức HS. [105, tr. 70].

Đây là một quan niệm có tính chất máy móc giáo điều, không dựa trên qui luật tiếp thu tri thức một cách có ý thức của HS.

Chúng tôi đồng nhất quan điểm với R.A.Axanop : "Việc tiếp thu tri thức một cách có ý thức được kích thích bởi việc tự HS phân tích một cách ***có suy nghĩ nội dung của từng sai lầm*** mà HS phạm phải, giải thích nguồn gốc của các sai lầm này và tư duy, lí luận về bản chất của các sai lầm" [105, tr. 70].

Chính A.A. Stoliar cũng đã đặt ra một số bài toán phương pháp giảng dạy mà trong đó ***liên quan tới các tình huống HS mắc sai lầm khi giải toán*** và đã khẳng định cần phải có biện pháp nhằm dạy học môn toán dựa trên các sai lầm, khi các sai lầm của HS xuất hiện [106, tr. 89-93].

Mặt khác, ngoài các phương pháp dạy học truyền thống, các nhà nghiên cứu về phương pháp dạy học đã đưa ra một số phương pháp mới mà ***tình huống mắc sai lầm của HS tạo điều kiện để phát huy ưu điểm*** của các phương pháp này.

Chúng tôi xin minh họa rõ ý trên bằng quan điểm cụ thể dưới đây.

Phương pháp dạy học giải quyết vấn đề dựa trên ***tình huống có vấn đề*** trong dạy học. Khi HS mắc sai lầm ở lời giải là xuất hiện tình huống có vấn đề, không phải do GV đề ra theo ý mình mà ***tự nó này sinh từ lôgic bên trong của việc giải toán.*** Sai lầm của HS tạo ra mâu thuẫn và mâu thuẫn này chính là động lực thúc đẩy quá trình nhận thức của HS. Sai lầm của HS làm nảy sinh nhu cầu cho tư duy mà "tư duy sáng tạo luôn bắt đầu bằng một tình huống gợi vấn đề" (Rubinstein [53, tr. 115]).

Sai lầm của HS xuất hiện thì sẽ khêu gợi được hoạt động học tập mà HS sẽ được hướng đích, gợi động cơ để tìm ra sai lầm và đi tới lời giải đúng. Tìm ra cái sai của chính mình hay của bạn mình đều là ***sự khám phá.*** Từ sự khám phá này, HS chiếm lĩnh được kiến thức một cách trọn vẹn hơn. Tuy nhiên ***cần gây niềm tin*** cho HS là bản thân mình có thể tìm ra được sai lầm trong một lời giải nào đó. HS có thể tự suy nghĩ hoặc trao đổi để tìm ra các sai lầm.

Trong tình trạng phân cực trình độ của HS như hiện nay (ngay trong một lớp) thì phương pháp dạy học phân hóa có tác dụng rút bớt dần sự phân cực.

GV có thể đối xử cá biệt ngay trong những pha dạy học đồng loạt nhằm hạn chế và sửa chữa các sai lầm của HS khi giải toán.

Sự phân hóa trong nhờ thông qua những mức độ "bẫy" sai lầm khác nhau cho từng đối tượng HS, thể hiện ngay ở việc GV giao bài tập trên lớp hoặc bài tập về nhà.

Sự phân hóa ngoài nhờ thông qua các công việc tổ chức học tập theo nhóm, tổ và phụ đạo riêng cho những HS mắc nhiều sai lầm trầm trọng.

Không xem nhẹ

Tuy nhiên, chúng ta không được quên tận dụng các ưu điểm của các **phương pháp dạy học truyền thống** vào mục đích mà chúng ta đang hướng tới.

Các biện pháp được đề xuất đều dựa trên quan điểm hoạt động trong phương pháp dạy học với các tư tưởng chủ đạo đã được G.S Nguyễn Bá Kim đúc kết như sau :

a) Cho HS thực hiện và tập luyện những hoạt động và hoạt động thành phần tương thích với nội dung và mục đích dạy học.

b) Gây động cơ hoạt động và tiến hành hoạt động.

c) Truyền thụ tri thức, đặc biệt là tri thức phương pháp, như phương tiện và kết quả của hoạt động.

d) Phân bậc hoạt động làm chỗ dựa cho việc điều khiển quá trình dạy học [53, tr. 73].

2.1.2. Những vấn đề cơ bản của tâm lí học dạy học

Ngay trong các nguyên nhân dẫn tới sai lầm của HS khi giải toán có các nguyên nhân về tâm lí của HS. Chính vì vậy khi đưa ra các biện pháp sư phạm, chúng tôi lấy các qui luật của tâm lí học dạy học làm cơ sở lí luận.

Nhờ lí thuyết hoạt động mà ngành tâm lí học sư phạm đã nghiên cứu được nhiều kết quả do thực tiễn dạy và học dặt ra.

Chúng tôi rất tán thành quan diểm "suy cho cùng giáo dục là quá trình biến năng lực của loài người thành năng lực của mỗi trẻ em" [31, tr. 59]. Để làm được công việc này cần phải thông qua ***hoạt động dạy học***. Tất nhiên, ***hoạt động dạy không thể tách rời hoạt động học.***

"Chất lượng hoạt động học phụ thuộc vào trình độ diều khiển và tổ chức (trình độ nghề nghiệp) của thầy, kết tinh ở trình độ phát triển những hành động học tập tích cực của HS" [31, tr. 61].

Chúng tôi rất quan tâm tới bản chất của hoạt động học của HS dã được khẳng dịnh :

a) Tri thức và những kĩ năng, kĩ xảo tương ứng với tri thức ấy là dối tượng của hoạt động học. Việc lĩnh hội tri thức, kĩ năng, kĩ xảo của xã hội sẽ không thể thực hiện được nếu người học là ***khách thể bị động của những tác động sư phạm.***

b) Hoạt động học làm cho chính chủ thể hoạt động này thay dổi và phát triển. Chỉ có thông qua đó người học mới giành được những khả năng khách quan để ***ngày càng tự hoàn thiện chính mình.***

c) Hoạt động học cần làm cho HS có cả những tri thức về hoạt động học mà chúng ta thường gọi là phương pháp học tập [31, tr. 62-64].

Các biện pháp sửa chữa sai lầm cho HS khi giải toán phải ***tác động và nhằm đích vào hoạt động học của HS.*** Trước hết cần tạo ra động cơ học tập sửa chữa các sai lầm. HS phải thấy việc sửa chữa các sai lầm khi giải toán là một nhu cầu và cần phải ***tham gia như một chủ thể một cách tự nguyện, say mê hào hứng.*** HS phải có được "***động cơ hoàn*** *thiện tri thức*". Cần lấy hoạt động học tập của HS để làm cơ sở cho quá trình lĩnh hội tri thức.

Hoạt động học của HS phải thông qua các hành động cụ thể : hành động phân tích, hành động cụ thể hóa.

Căn cứ vào những kết quả nghiên cứu về tâm lí học dạy học, chúng tôi thấy cần hình thành ở HS những ***năng lực tạo ra năng lực***, mà trong đó bản thân năng lực tìm ra các sai lầm khi giải toán sẽ tạo ra năng lực giải toán cho HS. Từ đó ***HS tự tin để sửa chữa các sai lầm.***

Tâm lí học khẳng định "muốn hình thành khái niệm ở HS phải lấy hành động của các em làm cơ sở" [31, tr. 107]. Nếu tổ chức hành động cho HS không tốt thì HS không thể nắm vững các thuộc tính của khái niệm và nguyên nhân gây ra sai lầm sẽ xuất hiện.

Hơn nữa, các biện pháp phải tập trung vào phát triển hoạt động, rèn luyện các kỹ năng học tập của HS (kỹ năng nhận thức, kỹ năng thực hành, kỹ năng tổ chức hoạt động, kỹ năng tự kiểm tra, đánh giá).

2.2 BA PHƯƠNG CHÂM CHỈ ĐẠO Việc SỬ DỤNG CÁC BIỆN PHÁP SƯ PHẠM NHẰM HẠN CHẾ VÀ SỬA CHỮA CÁC SAI LẦM CỦA HỌC SINH KHI GIẢI TOÁN.

2.2.1 Phương châm 1 : *Tính kịp thời*

Các biện pháp phải chú ý thích ứng với thời điểm thích hợp. Biện pháp chỉ phát huy hiệu quả nếu được áp dụng đúng lúc. Không thể tùy tiện trong việc phân tích và sửa chữa, cũng như hạn chế các sai lầm của HS. Đặc biệt, thời gian mà GV tiếp xúc trực tiếp với HS là có hạn. Sự không kịp thời sẽ gây lãng phí thời gian và GV sẽ khó có điều kiện lấy lại thời gian đã mất.

Tính kịp thời của các biện pháp đòi hỏi sự nhanh nhạy của GV trước các tình huống điển hình, nhằm tác động đúng hoạt động học của HS. Tính kịp thời đòi hỏi sự tích cực hóa hoạt động nhận thức của cả GV và HS.

Tính kịp thời đòi hỏi GV phải nghiên cứu và dự đoán được các sai lầm của HS ở từng thời điểm của năm học, từng giờ lên lớp.

Tính kịp thời đòi hỏi GV luôn ở tư thế thường trực với mục tiêu dạy học nhằm hạn chế và sửa chữa sai lầm của HS khi giải toán. Sai lầm càng sửa muộn bao nhiêu thì sự vất vả của thầy và trò càng tăng bấy nhiêu. Tính kịp thời đòi hỏi GV phải vững vàng về tâm lí nghề nghiệp, biết chủ động trong thái độ, biết kìm chế khi khó chịu và biết đồng cảm với mọi điều sai, đúng của HS.

Tính kịp thời đòi hỏi GV phải tranh thủ giao tiếp với HS, không chỉ ở trên lớp mà còn trong nhiều hoàn cảnh khác để tận dụng cơ hội thực hiện các biện pháp dạy học.

Tính kịp thời đòi hỏi GV phải tìm cách hạn chế các nguyên nhân sai lầm của HS kể cả khi các sai lầm chưa xuất hiện.

Tính kịp thời còn đòi hỏi GV phải củng cố thường xuyên các sai lầm đã sửa chữa cho HS, nhằm không để các sai lầm tái diễn.

2.2.2 Phương châm 2 : *Tính chính xác.*

Sự chính xác trong lời giải là đòi hỏi của toán học, cũng là sự đòi hỏi của nhiệm vụ dạy học môn toán trong nhà trường phổ thông để "đào tạo có chất lượng những người lao động mới".

Các biện pháp đề xuất phải đi tới mục tiêu làm cho lời giải của HS bảo đảm độ chính xác cao.

Tính chính xác đòi hỏi GV phải diễn đạt chính xác, từ ngôn ngữ thông thường đến ngôn ngữ toán học. GV phải là mẫu mực về phương pháp, tư duy chính xác, về lời giải chính xác cho các bài toán.

Tính chính xác đòi hỏi GV phải chỉ ra chính xác nguyên nhân sai lầm của HS trong lời giải.

Không Nên phủ định vậy. Lời giải sai một cách chung chung.

GV không được phủ định lời giải sai của HS một cách chung chung.

Tính chính xác đòi hỏi các bài toán của GV đưa ra không được sai lầm. Đối với HS giỏi thì có thể sự sai lầm của bài toán sẽ được HS phát hiện, nhưng đối với HS yếu hoặc trung bình thì bài toán sai dễ gây hoang mang và mất niềm tin vào GV.

Tính chính xác đòi hỏi sự đánh giá chính xác mức độ sai lầm của HS. Chẳng hạn, khi HS viết $2^x.2^y = 2^{xy}$ thì thông thường, các GV cho đây là một sai lầm nghiêm trọng về kiến thức cơ bản. Tuy nhiên, đối với một số HS cụ thể thì sai lầm này có khi chỉ do sự vô ý thức gây nên.

Tính chính xác đòi hỏi GV đánh giá bài giải của HS qua điểm số một cách công bằng.

Tính chính xác đòi hỏi GV phải biết hướng dẫn điều chỉnh, sửa chữa một lời giải sai để HS tự tìm ra một lời giải đúng.

Tính chính xác đòi hỏi GV phải lựa chọn đúng biện pháp tối ưu trong từng tình huống điển hình.

2.2.3 Phương châm 3 : *Tính giáo dục.*

Tính giáo dục đòi hỏi GV phải lấy sự phát triển nhân cách của HS làm mục tiêu cho các biện pháp.

Tính giáo dục giúp cho HS thấy được tầm quan trọng của sự chính xác trong lời giải.

Tính giáo dục giúp cho HS tránh được các sai lầm khi sai lầm chưa xuất hiện.

Tính giáo dục giúp cho HS xác định được động cơ học tập môn toán. Tính giáo dục đòi hỏi GV phải có phẩm chất và năng lực xứng đáng là người thầy.

Tính giáo dục đòi hỏi GV không làm cho HS bị xúc phạm về nhân cách khi mắc sai lầm trong lời giải.

Tính giáo dục làm cho HS có ý chí trong học toán, giải toán. HS không ngại khó, biết kiên trì và cẩn thận để đi tới lời giải đúng. Tính giáo dục giúp cho HS có những thói quen tốt, như biết tự kiểm tra việc làm của mình, biết phủ định sai lầm của chính mình và biết giúp bạn nhận ra sai lầm.

Tính giáo dục giúp cho HS không dấu dốt, dám hỏi khi không hiểu, không biết, tránh gian lận quay cóp để mong lời giải đúng.

Tính giáo dục giúp cho HS tích cực suy nghĩ, tăng cường hoạt động học đưa đến sự ham mê chiếm lĩnh kiến thức chuẩn xác.

Tính giáo dục đòi hỏi GV phải biết khen ngợi, khích lệ HS khi đã sửa chữa được sai lầm.

Tính giáo dục làm cho HS thấy được mọi sai lầm đều có thể sửa chữa được nếu tìm ra nguyên nhân và có ý chí khắc phục.

Tính giáo dục làm cho HS biết được ưu điểm của trực giác là có thể giúp nghĩ ra, kiểm tra lời giải nhưng cũng chính trực giác có thể đưa HS đến các sai lầm.

Tính giáo dục đòi hỏi GV dám nhận ra sai lầm của mình trong lời giải, trong cách đánh giá HS.

Tính giáo dục đòi hỏi GV không nóng vội trong việc thực hiện các biện pháp để mong muốn chấm dứt ngay sai lầm của HS. Có những sai lầm đòi hỏi GV phải huy động nhiều biện pháp đồng bộ và qua một thời gian dài mới khắc phục nổi.

Tính giáo dục đòi hỏi các biện pháp phải dựa trên tình thương yêu học sinh, mong HS tiến bộ và tuyệt đối không xúc phạm hay quy kết sai nguyên nhân sai lầm của HS.

Ba phương châm trên hỗ trợ, bổ sung cho nhau làm cho các biện pháp thực hiện đúng mục đích và kết quả. Tính kịp thời làm cho tính giáo dục đạt được nhanh hơn và ngược lại tính giáo dục giúp cho các biện pháp thực hiện được kịp thời, thuận lợi hơn.

Tính chính xác củng cố cho tính giáo dục và tạo điều kiện cho tính kịp thời. Ngược lại, tính kịp thời là chuẩn bị điều kiện thể hiện tính chính xác.

Một biện pháp, một hoạt động của GV hay HS nhiều lúc thể hiện cả ba phương châm chỉ đạo quan trọng trên. Chẳng hạn sự tích cực hóa trong việc nhận thức các khái niệm vừa có tính kịp thời đề phòng các sai lầm, vừa có tính chính xác để đạt được sự hiểu biết sâu sắc khái niệm và có tính giáo dục trong việc giúp HS chủ động chiếm lĩnh các kiến thức chuẩn.

biện pháp chủ yếu

2.3 BỐN BIỆN PHÁP SƯ PHẠM CHỦ YẾU NHẰM HẠN CHẾ VÀ SỬA CHỮA SAI LẦM CHO HỌC SINH

2.3.1. Biện pháp 1 : *Trang bị đầy đủ, chính xác các kiến thức về bộ môn Toán.*

Biện pháp này giải quyết bốn tình huống cụ thể sau đây :

**** Tình huống 1 : Dạy khái niệm toán học như thế nào để tránh sai lầm cho HS khi giải toán ?***

Ngoài các hoạt động dạy học khái niệm đã được G.S Nguyễn Bá Kim và P.G.S Vũ Dương Thụy trình bày ở [53], chúng tôi muốn nhấn mạnh và hoàn thiện thêm một số biện pháp.

GV cần ***dự đoán trước*** (bằng kinh nghiệm bản thân hoặc trao đổi với đồng nghiệp), các khả năng không hiểu hết những thuộc tính của khái niệm. Chẳng hạn đối với ***khái niệm hàm số ngược*** thì HS có các khả năng nào không hiểu hết thuộc tính của khái niệm ? Dù xây dựng qua khái niệm song ánh đi chăng nữa, cuối cùng đối với HS phổ thông, chúng ta đều ***dựa vào phương trình $f(x) = y$ với y thuộc tập giá trị của hàm f cho trước.*** Nếu phương trình này ***có nghiệm duy nhất*** thì chúng ta ***có thể xây dựng được*** hàm g sao cho nếu $f(x) = y$ thì $g(y) = x$ và hàm g gọi là hàm ngược của hàm f. Không những thế, người ta có thể thu hẹp tập xác định của f để tồn tại g. Nhiều HS khi nói tới hàm f thường chỉ quan tâm tới việc f cho bởi 1 biểu thức giải tích, mà ***không để ý tới những hàm f cho bởi nhiều biểu thức giải tích***, thậm chí cho bởi các cách khác như ***bảng giá trị tương ứng, đồ thị*** v.v... Nhiều HS ***không để ý tới tập xác định*** của f. Chẳng hạn hàm $y = f(x) = x^2$ là không đơn điệu trên R, nhưng đơn điệu trên R^+. HS coi hàm $y = f(x) = x^2$ trên R và trên R^+ là ***như nhau vì cùng một cách tương ứng mỗi x với $y = x^2$***. Từ đó, HS hoạt động nhận dạng và thể hiện dễ mắc sai lầm. Một số HS còn nói ***hàm y = arcsinx là hàm ngược của hàm y = sinx***, chứ không nhấn mạnh là hàm ngược của hàm y = sinx với $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. HS còn nghĩ rằng hai hàm ngược nhau f và g ***là khác nhau*** !

Do đó khi tìm hàm ngược của hàm $y = x$ hay $y = \frac{1}{x}$; $y = \frac{x+1}{x-1}$ HS ngỡ ngàng không dám kết luận hàm ngược của hàm f chính là hàm f.

Khi ***không có phương trình $f(x) = y$*** thì HS không biết tìm hàm ngược như thế nào. Chẳng hạn cho hàm số cho bởi bảng giá trị tương ứng (bảng 7) :

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	8	7	6	5	4	3	2	1

thì HS ***không tìm ra hàm ngược.***

Có khi HS còn không nắm được nếu hàm g là hàm ngược của hàm f thì hàm f cũng là hàm ngược của hàm g.

Nếu dự đoán được các sai lầm trên thì chắc chắn GV sẽ chuẩn bị bài giảng của mình để đề phòng trước sai lầm cho HS. ***Sự chủ động đề phòng sai lầm xuất hiện*** bao giờ cũng mang tính tích cực hơn là lo sửa chữa sau này. Những sai lầm của HS về khái niệm toán học mang dấu ấn khó phai và rất mất công chỉnh lại cho chính xác.

Ở dây cũng lưu ý phân biệt việc ***chưa hiểu hết*** với ***hiểu sai***. Có những khái niệm khó, HS không hiểu hết các thuộc tính ***ngay một lúc*** mà phải qua các hoạt động nhận dạng và thể hiện mới di tới sự trọn vẹn. Chính việc ***chưa hiểu hết*** các thuộc tính của khái niệm sẽ rất dễ dẫn đến việc ***hiểu sai*** khái niệm. Do đó có những sai lầm của HS phải làm cho HS ***hiểu hết các thuộc tính*** của khái niệm thì mới mong HS ***hết hiểu sai***. Chẳng hạn ngay việc dùng kí hiệu y_{max}, y_{min} từ lớp 10, lớp 11 được HS coi là kí hiệu cho giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số, nhưng lúc đó HS chưa hiểu hết được cái sai mà phải lên lớp 12 thì HS mới được giải thích thỏa đáng.

Trong lí thuyết thông tin, để chống nhiễu thông tin, người ta đề ra các biện pháp mà chúng ta có thể vận dụng vào phương pháp dạy học [76, tập 1, tr. 65-81].

HS có nhiệm vụ ***giải mã*** thông tin mà GV đưa đến. Làm sao để ***vừa sức giải mã*** của HS ? Hay phải ***đổi mã*** để HS dễ ***giải mã*** hơn. Các biện pháp về giáo cụ trực quan dã được nhiều tác giả nghiên cứu, ở dây chúng tôi đề cập tới ***một biện pháp đổi mã*** cho HS bằng cách ***nâng giá mang*** của thông tin. Chẳng hạn, khi dạy khái niệm hàm số liên tục, chúng ta có dịnh nghĩa :

"Hàm số $y = f(x)$ gọi là liên tục tại diểm $x = x_o$ nếu :

1) x_o là một điểm thuộc tập xác dịnh của hàm số,

2) $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$" [11, tr. 115].

Một dịnh nghĩa khác :

"Một hàm số $f(x)$ xác dịnh trên tập số D, gọi là liên tục tại điểm $x \in D$, nếu $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$" [59, tr. 150].

Thực ra ***khi viết $f(x_o)$ đã mang thông tin là x_o thuộc tập xác dịnh***, nhưng các dịnh nghĩa trên đều nhấn mạnh riêng yêu cầu này chính là tạo diều kiện cho HS giải mã tốt hơn (dễ hơn !).

Thậm chí, theo chúng tôi là rất tốt, trong [59] các tác giả còn lưu ý ngay dưới định nghĩa :

"Như vậy một hàm số f(x) liên tục tại điểm x_o nếu và chỉ nếu ba điều kiện sau được thỏa mãn đồng thời :

1) f(x) xác định tại $x = x_o$,

2) $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ tồn tại,

3) $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$".

Chúng ta thấy với lưu ý này các tác giả ***tiếp tục tạo điều kiện giải mã*** cho HS. Hãy hình dung lẽ ra ***chỉ cần 3***, nhưng ***đã thêm 1***, và cuối cùng ***thêm cả 2***. Hiểu được ***dụng ý sư phạm*** và ***ý nghĩa thông tin*** này, GV sẽ tổ chức hoạt động nhận dạng tốt hơn.

Trong hoạt động nhận dạng thì các ***phản thí dụ*** giữ vai trò rất quan trọng trong việc tránh các sai lầm của HS khi lĩnh hội khái niệm. Nội hàm mang cấu trúc hội thì chúng ta đưa ra lần lượt ***các phản thí dụ vi phạm từng thuộc tính của khái niệm***. Chẳng hạn, hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+1}$ không liên tục tại x = −1 (vi phạm 1), $y = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x+1} & \text{với } x \neq -1 \\ 0 & \text{với } x = -1 \end{cases}$ không liên tục tại x = −1 (vi phạm 3), $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{với } x \neq 0 \\ 1 & \text{với } x = 0 \end{cases}$ không liên tục tại x = 0 (vi phạm 2).

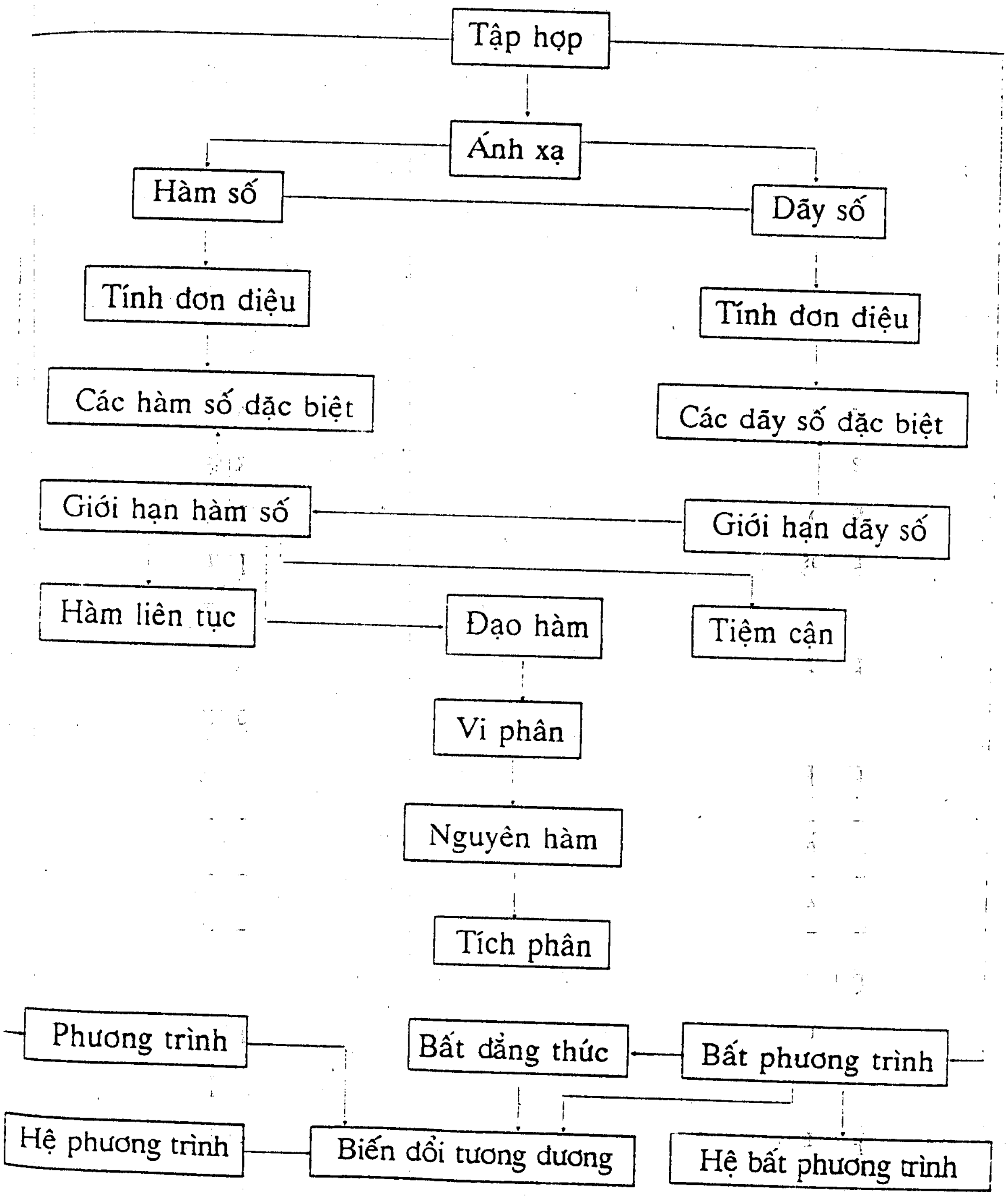
Khi HS đã đi qua một loạt khái niệm, GV cần ***chỉ ra mối liên hệ giữa các khái niệm*** bằng các sơ đồ rất dễ ghi dấu ấn cho HS. Chẳng hạn, mối liên hệ giữa 3 khái niệm quan trọng của giải tích (sơ đồ 3) :

$$\boxed{\text{f(x) khả vi trên (a ; b)}} \Rightarrow \boxed{\text{f(x) liên tục trên (a ; b)}} \Rightarrow \boxed{\text{f(x) khả tích trên (a ; b)}}$$

Ngay việc phân loại khái niệm, GV cũng cần ***chỉ ra sự phát triển theo con đường toán học*** đã đi để HS thấy được nội hàm và ngoại diên của khái niệm.

Khả vi ⟹ liên tục ⟹ Khả tích Rieman

Có thể, GV còn phải biết *"bức tranh toàn cảnh" về các khái niệm quan trọng* trong một phân môn Toán, chẳng hạn các khái niệm quan trọng trong chương trình Đại số - Giải tích ở PTTH (sơ đồ 4) :



* ***Tình huống 2 : Dạy các định lí toán học như thế nào để HS tránh sai lầm khi giải toán ?***

Nói tới định lí toán học là nói tới ***một khẳng định đúng*** (dù chúng ta có dạy phép chứng minh định lí hay không). Tuy nhiên, việc quan trọng mà GV cần ***quan tâm đầu tiên là cấu trúc lôgic của định lí***. Như chúng tôi đã phân tích ở 1.3.2, việc không nắm vững cấu trúc định lí sẽ dẫn HS tới sai lầm khi giải toán. Các định lí toán học thường được diễn đạt theo cấu trúc A ⇒ B. Ai cũng biết A là giả thiết và B là khẳng định, kết luận của định lí. Nhưng chúng tôi xin lưu ý thêm : A cho biết ***dùng định lí khi nào*** và B cho biết sẽ ***kết luận, suy ra được gì khi có A.***

Dạy định lí toán học có thể được thực hiện theo hai con đường : con đường suy diễn và con đường có khâu suy đoán [53, tr. 188]. Bá Kim Thụy

Nhằm hạn chế và đề phòng các sai lầm của HS khi giải toán chúng tôi thấy cần thiết phải ***phân tích rõ giả thiết*** của định lí. HS nhiều khi không quan tâm tới giả thiết định lí mà chỉ quan tâm tới kết luận của định lí nên dẫn tới sai lầm.

GV cần nhấn mạnh giả thiết của định lí có ***cấu trúc hội hay tuyển.*** Chẳng hạn, định lí Viete :

Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có nghiệm x_1, x_2 thì tổng và tích các nghiệm của nó là :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Cấu trúc của giả thiết có cấu trúc hội : $\{a \neq 0\} \wedge \{\Delta \geq 0\}$. Trước khi dùng định lí này phải kiểm tra hoặc đặt điều kiện để bài toán thỏa mãn đồng thời hai điều kiện của giả thiết. HS rất hay quên điều kiện $a \neq 0$. Nhiều HS vẫn tính tổng và tích các nghiệm của phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ mặc dù phương trình này vô nghiệm.

GV cần tạo ra những thí dụ mà các điều kiện của ***giả thiết chưa thỏa mãn hoàn toàn*** để HS thấy rằng mọi điều kiện của giả thiết là ***không thể thiếu được.***

Thí dụ khi dạy định lí : "Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 0$ trên khoảng $(a ; b)$ thì y là một hàm hằng số trên khoảng đó, tức là $f(x) = c$ với mọi $x \in (a ; b)$ [35, tr. 54].

Nhiều HS chỉ để ý tới việc $f'(x) = 0$ mà không để ý tới $(a ; b)$ nên dẫn tới sai lầm như ở thí dụ 3, mục 1.2.8 (trang 45).

GV có thể sử dụng thí dụ này để lưu ý : định lí phát biểu cho ***một khoảng (a ; b)*** chứ không phát biểu cho ***hợp của nhiều khoảng***. Nếu gặp ***hợp của nhiều khoảng*** thì phải vận dụng định lí ***cho từng khoảng*** thì mới tránh được sai lầm.

Khi định lí có cấu trúc $A \Rightarrow B$ thì A là điều kiện đủ để có B chứ ***chưa chắc là điều kiện cần.***

GV cũng cần nêu ra thí dụ để thuyết phục, chứ không chỉ dừng lại ở việc nhắc nhở. Các thí dụ mà đặc biệt là ***các phản thí dụ bao giờ cũng tạo ấn tượng sâu*** đối với HS. Phản thí dụ có ấn tượng sâu

Chẳng hạn, khi dạy định lí :

"Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(a ; b)$. Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a ; b)$, thì $y = f'(x)$ đồng biến (tức là thực sự tăng) trên khoảng đó" [35, tr. 54].

GV cần chỉ ra hàm $y = x^3$ thực sự tăng trên R nhưng $y' = 3x^2$ vẫn triệt tiêu tại $x = 0$, thậm chí hàm $y = \sqrt{x}$ thực sự tăng trên $[0 ; +\infty)$ nhưng $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ không xác định tại $x = 0$, điều này chứng tỏ giả thiết $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a ; b)$ ***chỉ là điều kiện đủ chứ không phải là điều kiện cần*** để tránh sai lầm như ở thí dụ 4, mục 1.2.8 trang 46.

Để khắc sâu định lí, GV cần chỉ ra định lí này là khái quát cho định lí nào mà HS đã biết trước đó. Chẳng hạn định lí hàm số cosin là khái quát của định lí Pitago. Định lí hàm số sin làm HS nhìn lại định lí về quỹ tích cung chứa góc.

Khi dạy một định lí cần chỉ ra cho HS ***các hướng ứng dụng của định lí*** để tạo ra ***sự nhạy cảm của HS*** khi đứng trước một bài toán biết nghĩ tới việc vận dụng định lí nào.

Chẳng hạn đối với định lí Lagrange ở chương trình giải tích lớp 12, giáo viên cần chỉ ra 3 hướng ứng dụng của định lí này : chứng minh hệ thức hoặc rút gọn biểu thức, chứng minh phương trình có nghiệm, chứng minh bất đẳng thức.

Chúng tôi xin dẫn ra 3 **thí dụ cho 3 hướng ứng dụng** này.

Hướng 1 : thí dụ 3, mục 1.2.8 trang 45.

Hướng 2 : "Cho $m > 0$ và a, b, c là các số thỏa mãn

$$\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0.$$

Chứng minh : phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thuộc $(0 ; 1)$.

Bài toán này HS lớp 10 giải nhờ định lí đảo về dấu của tam thức bậc hai, HS lớp 11 dựa vào định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục, cả hai lời giải đều khá phức tạp, HS lớp 12 có thể dựa vào định lí Lagrange.

Qua bài toán này, GV cần giúp HS thấy được một bài học thú vị : khi được cung cấp ***thêm các kiến thức ở lớp trên thì cũng có thêm những cách nhìn mới về cùng một bài toán*** và từ đó có thêm ***những lời giải mới***. HS thấy rằng ***sự phát triển của kiến thức chính là mở rộng tầm nhìn***, chứ không phải là mang thêm một gánh nặng trong trí óc.

Hướng 3 : "Chứng minh rằng nếu $0 < b < a$ thì

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}\text{''}.$$

Có thể gợi ý HS viết bất đẳng thức cần chứng minh về dạng "gần với kết luận" của định lí Lagrange :

$$\frac{1}{a} < \frac{\ln a - \ln b}{a-b} < \frac{1}{b}.$$

Gần với đlý Lagrange

Từ đó HS thấy ngay : xét hàm số $y = \ln x$ khả vi trên $(0 ; +\infty)$ nên tồn tại $c \in (b ; a)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{\ln a - \ln b}{a-b}$. Mà

$0 < b < c < a$ nên $\frac{1}{b} > \frac{1}{c} > \frac{1}{a}$, từ các kết quả trên suy ra điều phải chứng minh.

Điều đặc biệt cần lưu ý là khi dạy định lí toán học cho HS là : GV cần cho HS thấy rõ ***phương pháp phân tích để chứng minh định lí.*** Chính biện pháp này giúp cho HS dễ đi tới chứng minh đúng trong giải toán sau này. Dạy định lí chính nhằm mục đích truyền thụ những tri thức phương pháp liên quan tới phép chứng minh.

* **Tình huống 3 :** ***Cung cấp các kiến thức về lôgic như thế nào để HS tránh sai lầm khi giải toán ?***

Nhằm giải quyết tình huống này, chương trình môn toán PTTH chuyên ban đã chính thức đưa "một số hình thức suy luận toán học" vào phân môn Đại số lớp 10. GV khi dạy theo chương trình cải cách giáo dục cần tham khảo thêm vấn đề này để tiến hành biện pháp cung cấp các kiến thức về lôgic cho HS ngay từ đầu cấp PTTH.

Trước hết cần lưu ý tới mệnh đề và các phép toán mệnh đề như phủ định, hội, tuyển, kéo theo, tương đương. Các phép toán tiên các Mệ

Theo thực nghiệm của chúng tôi, việc đưa ra các thí dụ theo ngôn ngữ tự nhiên cần đi trước các thí dụ theo ngôn ngữ toán học. Đây chính là con đường đi từ "trực quan sinh động" đến "tư duy trừu tượng" của nhận thức. Chẳng hạn, có thể nêu mệnh đề A = {Trời nắng} ; B = {Đội mũ} thì thông thường học sinh được nhắc nhở "Nếu trời nắng thì đội mũ" nên HS dễ hình dung ra ý nghĩa của phép kéo theo $A \Rightarrow B$.

A là đủ để có B, nhưng lưu ý là nhiều khi HS vẫn đội mũ khi trời không nắng, nghĩa là A chưa phải điều kiện cần để có B.

Đặc biệt, nếu $A \Rightarrow B$ là đúng thì đây là một thí dụ để nhấn mạnh mệnh đề đảo $B \Rightarrow A$ không đúng. HS có thể thấy ngay việc mình đội mũ không làm cho trời nắng !

Một thí dụ khác, để phủ định mệnh đề do một bạn nêu ra : "Tớ thường xuyên tập thể dục buổi sáng" thì chỉ cần chỉ ra một buổi sáng mà bạn ấy không tập. Từ đó dẫn đến mối quan hệ giữa hai lượng từ "với mọi" và "tồn tại". Từ ngôn ngữ thông thường, GV bắt đầu sử dụng các khái niệm, tính chất, định lí toán học mà HS đã biết để phân tích tính chân lí của các mệnh đề là hội, tuyển, phủ định, kéo theo, tương đương của các mệnh đề cho trước (các khái niệm, tính chất, định lí toán học có thể lấy ở chương trình PTTH cơ sở thì HS càng dễ hình dung).

Chẳng hạn, nếu A = {số tự nhiên có tận cùng là 0}; B = {số tự nhiên có tận cùng là 5}; C = {số tự nhiên chia hết cho 5} thì ta có $(A \vee B) \Rightarrow C$ đồng thời $C \Rightarrow (A \vee B)$, do đó $(A \vee B) \Leftrightarrow C$ là tiêu chuẩn chia hết cho 5 của số tự nhiên. Khi kiểm tra một số chia hết cho 5 hay không chỉ cần kiểm tra A hoặc B. Từ đó phủ định mệnh đề này ta có $(\overline{A} \wedge \overline{B}) \Leftrightarrow \overline{C}$, qua đây HS thấy được thêm mối quan hệ giữa các phép toán hội, tuyển, phủ định và tương đương.

Một sai lầm cần tránh là sử dụng các kí hiệu lôgic tùy tiện. Nhiều HS viết $A \Rightarrow B$ mà A không phải điều kiện để có B. Chẳng hạn, có HS viết "$x \geq 1 \Rightarrow x = 1$", lẽ ra viết "$x \geq 1$ và $x \leq 1 \Rightarrow x = 1$". Kí hiệu kéo theo ($\Rightarrow$) đôi khi còn được viết trong câu văn : "Đoàn xe đi ⇒ một đám bụi mù mịt".

Ngôn ngữ không chính xác . sử dụng NN c chính xác đến mức có thể

- Việc trang bị các kiến thức lôgic không chỉ dừng lại ở "một số hình thức suy luận toán học" trong phần đầu chương trình Đại số lớp 10 mà cần được thường xuyên củng cố.

Phép chứng minh quy nạp toán học, có nhiều dịp để GV khắc rõ cho HS. Chẳng hạn khi chứng minh hệ thức

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

thì ngoài cách đã được SGK trình bày, GV nên yêu cầu HS dùng thêm cách thứ hai nhờ phương pháp quy nạp toán học. Khi dạy HS tính đạo

Phân biệt suy đoán với suy diễn

hàm bậc cao, GV lại một lần nữa sử dụng phương pháp này để giải toán. Cần phân biệt suy đoán với suy diễn. Chẳng hạn để tính dạo hàm bậc n của hàm số $y = e^{2x}$, HS có thể suy doán $y^{(n)} = 2^n . e^{2x}$ nhưng phải chứng minh, tốt nhất ở dây là phương pháp quy nạp toán học.

GV cần không tường minh dạy học sinh phép tam đoạn luận để khẳng dịnh, phủ dịnh, lựa chọn, bắc cầu.

GV có thể chủ động đưa ra các suy luận sai để HS phân tích và tránh vấp phải sau này.

Đặc biệt, cần làm cho HS nắm được phương pháp phân tích đi lên, phân tích, tổng hợp, phản chứng, quy nạp.

GV cần tận dụng bất cứ cơ hội nào, miễn là hợp lí, để khắc sâu kiến thức lôgic cho HS. Chẳng hạn ở lớp 10 đối với hệ phương trình

$$\begin{cases} bx + y = a \\ x + by = c^2 + c \end{cases}$$

Bài toán rất khó hiểu đó.

thì việc phân tích hai yêu cầu sau đây là khác nhau chính là tăng cường kiến thức lôgic :

- Tìm a sao cho với mọi b luôn tồn tại c để hệ có nghiệm
- Tìm a sao cho tồn tại c để hệ có nghiệm với mọi b.

bản 2 V/đ rất tuyệt

HS nắm vững các kiến thức về lôgic sẽ hạn chế được nhiều sai lầm khi giải toán.

* **Tình huống 4 :** ***Trang bị phương pháp giải các bài toán cơ bản như thế nào để tránh sai lầm của HS khi giải toán ?***

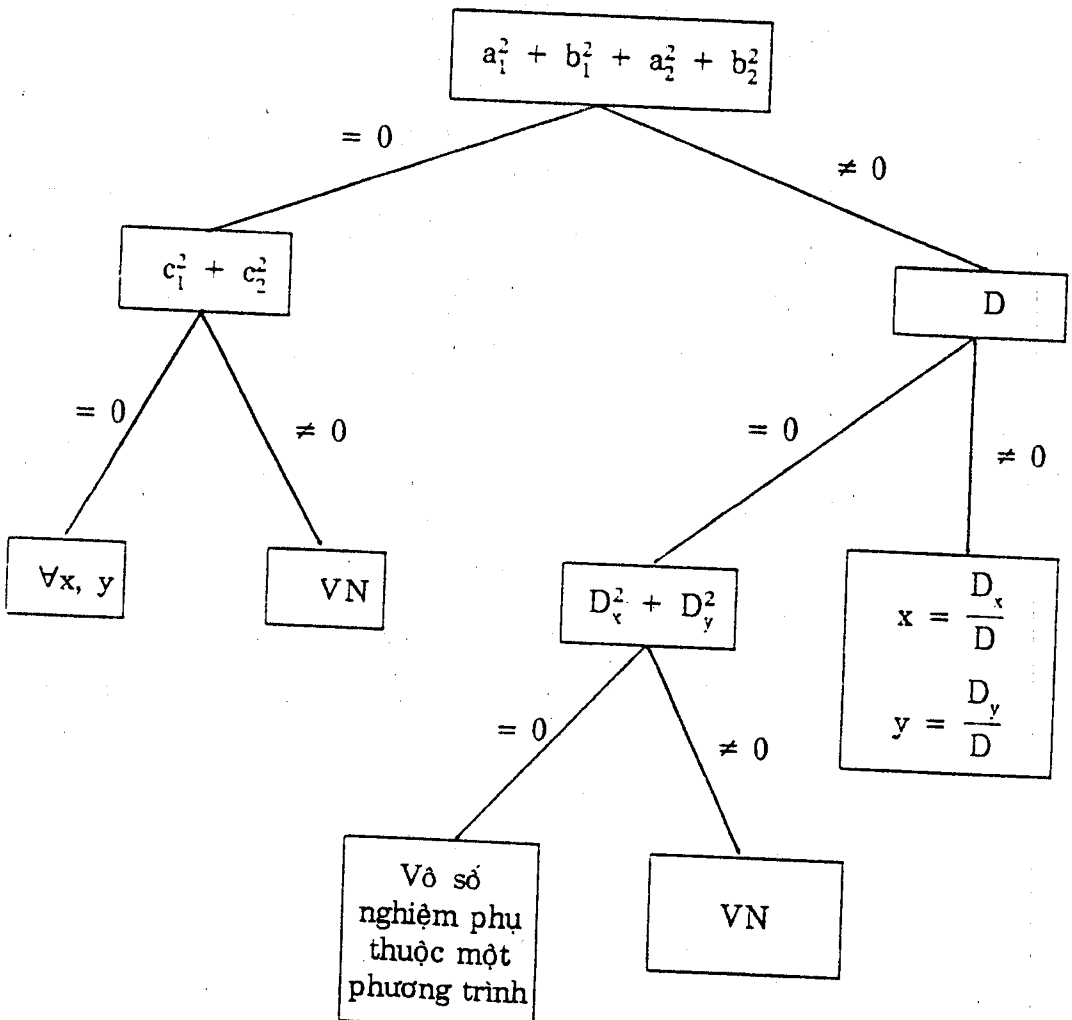
Có thể nói rằng các loại toán cơ bản trong chương trình Đại số - Giải tích PTTH đều có phương pháp giải. Việc trang bị các phương pháp giải này chính làm cho HS có điều kiện nắm vững các loại toán cơ bản.

Phương pháp giải hệ $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

được đề cập trong chương trình phổ thông hai lần để cung cấp tới 4 cách giải : phép thế, phép cộng đại số, phương pháp đồ thị và phương pháp định thức.

Nhiều HS thường tính ngay $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ khi bắt đầu lời giải (xem thí dụ 3, mục 1.2.6, trang 36).

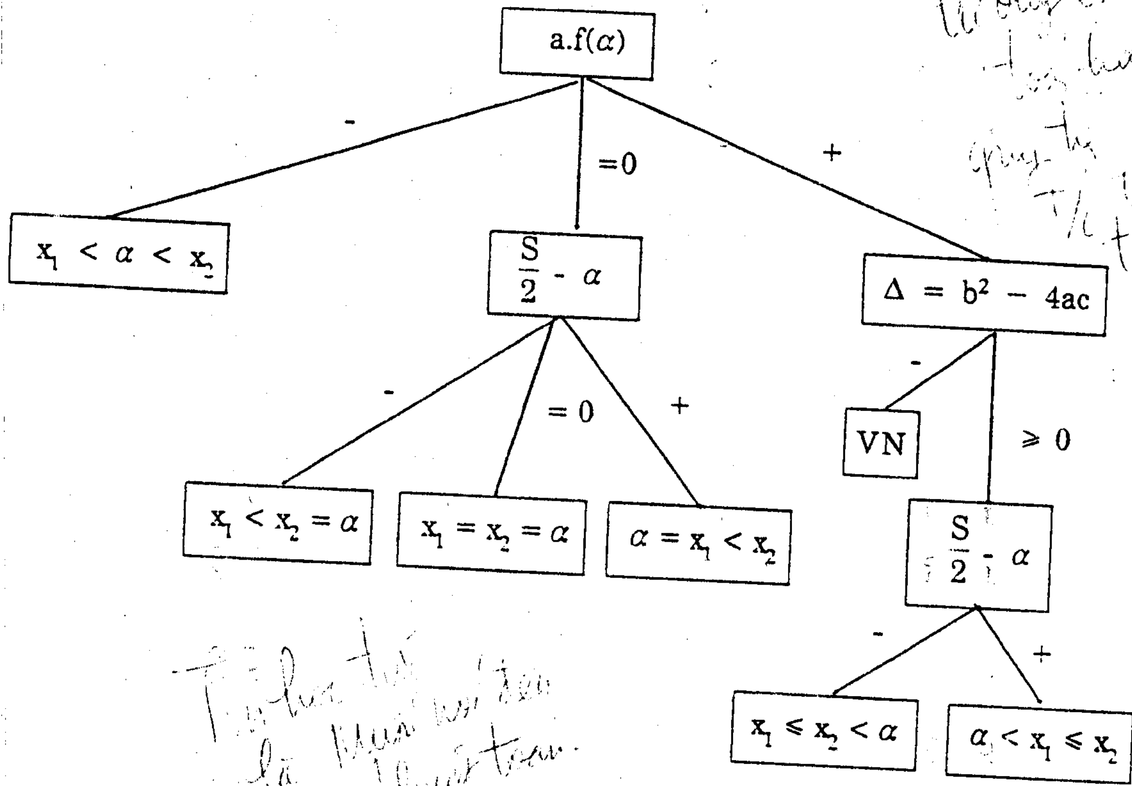
Chúng tôi thường dùng sơ đồ sau để tổng kết phương pháp giải và biện luận loại toán này cho HS (sơ đồ 5) :



Từ sơ đồ trên HS còn thấy được "Nếu a_1, a_2, b_1, b_2 không đồng thời bằng 0 và $D = 0$ thì hệ có nghiệm khi và chỉ khi $D_x = D_y = 0$". Đây là kiến thức quan trọng để HS tránh sai lầm khi gặp bài toán "Tìm a sao cho với mọi b luôn tồn tại c để hệ sau

$$\begin{cases} bx + y = a \\ x + by = c^2 + c \end{cases}$$ có nghiệm".

Trong chương trình Đại số 10, HS cần nắm vững phương pháp giải để so sánh các nghiệm của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ với một số α. GV có thể tổng kết theo sơ đồ 6.



Việc rèn luyện cho HS lập các sơ đồ như trên vừa làm HS nắm vững phương pháp giải, vừa phát triển tư duy cho HS có lợi cho học tập nói chung và học bộ môn Tin học nói riêng. Từ đó HS có thể tránh sai lầm khi giải toán (xem thí dụ 6, mục 1.2.5 trang 34).

Tuy nhiên cũng lưu ý HS là với một loại toán có thể có nhiều phương pháp giải khác nhau, HS cần biết lựa chọn phương pháp giải tối ưu để giải quyết bài toán cụ thể (xem ứng dụng định lí Lagrange, tình huống 2 mục 2.3.1, trang 94).

Các phương pháp giải thường xuyên dược củng cố để HS nắm vững. Chẳng hạn bài toán so sánh nghiệm của tam thức bậc hai với các số (lớp 10) còn được sử dụng khi xét phương trình lượng giác, phương trình mũ, bất phương trình mũ, phương trình lôgarit, bất phương trình lôgarit (lớp 11), xét chiều biến thiên và cực trị hàm số (lớp 12).

Từ lời giải một bài toán cụ thể, GV cần gợi ý cho HS tìm ra phương pháp giải cho một lớp bài toán. Biện pháp này giúp HS hiểu bản chất lời giải cụ thể và tư duy khái quát hóa được phát triển. Tránh tình trạng "làm bài nào, biết bài ấy", "thấy cây mà chẳng thấy rừng". Làm được điều này, GV đã giúp cho HS "học một, biết mười". Thí dụ khi HS giải bài toán "Chứng minh $\sin 20^o > \frac{1}{3}$" thì dựa vào $\sin 60^o = 3\sin 20^o - 4\sin^3 20^o$, HS đưa ra $f(x) = 4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}$ nhận $\sin 20^o$ là nghiệm, sau đó nhận thấy $\sin 20^o$, $\frac{1}{3}$ thuộc $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ là miền nghịch biến $f(x)$ nên $\sin 20^o > \frac{1}{3} \Leftrightarrow f(\sin 20^o) < f(\frac{1}{3}) \Leftrightarrow 0 < \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{23}{27}$ và từ đó dễ dàng giải xong. Không dừng lại, GV cho liên tiếp các bài (có thể là bài tập về nhà) : so sánh $\cos 10^o$ và $\frac{4}{5}$; $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$ và $\sqrt[3]{44}$; ... để HS tổng kết thành phương pháp giải một lớp các bài toán.

Việc tổng kết và hệ thống lại các phương pháp giải sẽ giúp cho HS bớt lúng túng, đỡ vấp phải sai lầm đáng tiếc khi giải toán.

2.3.2. Biện pháp 2: ***Trang bị các kiến thức về phương pháp giải toán, đặc biệt là việc tự kiểm tra phát hiện ra lời giải có sai lầm.***

Những kiến thức cần thiết về phương pháp giải toán đã được nhiều tác giả trong và ngoài nước nghiên cứu khá sâu sắc.

Nổi bật là những nghiên cứu của G.Pôlya [74]. Ngoài ra, các tác giả Nguyễn Bá Kim, Vũ Dương Thụy [53], Nguyễn Thái Hòe [42], [43], Hoàng Chúng [15], [16] cũng đã nhấn mạnh và cụ thể hóa các tư tưởng của G.Pôlya. Cụ thể hóa tư tưởng của Pôlya

Các tác giả đi sâu vào việc trả lời câu hỏi : Tìm tòi lời giải bài toán như thế nào ?

G.Pôlya đưa ra bốn bước quan trọng cho việc đi đến lời giải của bài toán :

- Tìm hiểu nội dung bài toán;
- Xây dựng chương trình giải;
- Thực hiện chương trình giải;
- Kiểm tra và nghiên cứu lời giải.

Không những thế, G. Pôlya còn đưa ra một bản gợi ý cụ thể rất có ích cho mọi người giải toán [74, tr. 225-227].

Chúng tôi lưu ý thêm những ý kiến của **L.M. Phoritman - E.N. Turetxki - V. Ia. Xtetxencô** về sơ đồ các bước tìm kiếm lời giải của các bài toán như sau :

"- Trong khi đọc kĩ bài toán, cần phải cố gắng xác định được bài toán thuộc dạng nào.

- Nếu các bạn đã nhận được trong đó bài toán chuẩn của dạng quen thuộc, thì hãy vận dụng qui tắc đã biết để giải.

- Nếu bài toán là không chuẩn thì cần phải hành động theo hai hướng : tách từ bài toán ra hoặc chia nhỏ bài toán ra thành những bài toán nhỏ có dạng chuẩn (thủ pháp chia nhỏ) hoặc diễn đạt lại bài toán theo một cách khác, dẫn bài toán đến một bài toán có dạng chuẩn (thủ pháp mô hình hóa)" [109, tr. 77-78].

Tuy nhiên các hướng dẫn trên cũng chỉ là con đường chung, chưa phải là con đường riêng hiệu quả cho mỗi bài toán cụ thể. Ngay G. Pôlya cũng thừa nhận : "... **để đạt được kết quả thực sự thì anh ta cũng cần** học tập cả cách suy luận có lý, là suy luận mà toàn bộ hoạt động sáng tạo của anh ta sẽ phụ thuộc vào đó... Áp dụng một cách có hiệu quả các suy luận có lý như là một kĩ năng thực hành và kĩ năng đó cũng như mọi kĩ năng thực hành khác đều học được bằng con đường bắt chước và thực hành. Tôi dự định làm tất cả những gì tôi có thể làm được để giúp bạn đọc ham muốn học thông thạo cách suy luận có lý, song tất cả những gì tôi có thể đề nghị thì đó chỉ là những thí dụ mẫu và khả năng thực hành chu đáo" [75, tr. 6–7].

Với mục đích hạn chế và sửa chữa các sai lầm của HS khi giải toán, chúng tôi chú ý tới hai bước cuối cùng trong bốn bước mà G. Pôlya nêu ra :

- Thực hiện chương trình giải với các gợi ý nhằm tránh sai lầm : hãy kiểm tra lại từng bước, có thể chứng minh được tính đúng đắn của từng bước làm hay không ?

- Trở lại cách giải với các gợi ý để kiểm tra : có thể kiểm tra lại kết quả ? Có thể kiểm tra lại toàn bộ quá trình giải bài toán không ?

Nhờ thực hiện biện pháp 1, trong đó có việc trang bị các kiến thức về lôgic cho HS mà việc thực hiện kiểm tra sự có lý của từng bước suy luận thực hiện được thuận lợi.

Chẳng hạn, hãy xem xét lời giải của bài toán : "Chứng minh rằng : nếu

$$\begin{cases} a + b + c > 0 \\ ab + bc + ca > 0 \\ abc > 0 \end{cases}$$

thì $a > 0; b > 0; c > 0$" (thí dụ 6, mục 1.2.3, trang 25). Ta thấy : HS sai ngay ở giả thiết phản chứng, khi cho rằng phủ định của mệnh đề $a > 0$ là mệnh đề $a < 0$. sai lầm xảy ra ngay ở bước thứ nhất của lời giải.

Lời giải thí dụ 1, mục 1.2.4 trang 26 lại mắc sai lầm ở bước cuối cùng khi tưởng rằng từ $F(x, y) \geq 0\ \forall x, y \in R$ thì $\min F(x ; y) = 0$. HS sẽ tránh dược sai lầm nếu tìm cách chỉ ra x, y sao cho F(x; y) = 0. Rõ ràng, không có giá trị nào của x, y thỏa mãn diều đó, nên HS sẽ thực hiện con dường khác để giải bài toán.

Để thực hiện biện pháp 2, chúng tôi sẽ bàn kỹ tới nội dung sau.

GV cần trang bị cho HS phương pháp nhận biết ra lời giải sai. Chúng tôi đặc biệt quan tâm tới các dấu hiệu cho biết lời giải sai (một số dấu hiệu dẫn tới phản thí dụ, tuy nhiên đối với nhiều HS thì ngay việc hiểu như thế nào là một phản thí dụ cũng đang còn khó khăn). Tối thiểu, GV cần trang bị cho HS các dấu hiệu quan trọng sau dây.

Dấu hiệu thứ nhất : Kết quả lời giải bài toán mâu thuẫn với kết quả trong trường hợp riêng.

Một loạt thí dụ mà chúng tôi trình bày ở chương 1 dã minh họa cho dấu hiệu quan trọng này. Chẳng hạn : thí dụ 1, 2, 3, mục 1.2.1 (trang 15) ; thí dụ 1, 2, 3, mục 1.2.2 (trang 16–17) ; thí dụ 1, 3, mục 1.2.6 (trang 34-36) ; thí dụ 3, mục 1.2.8 (trang 45) ; ...

Dấu hiệu thứ hai : – Trường hợp riêng ở kết quả không thỏa mãn bài toán

Chẳng hạn với chú ý này HS có thể thấy các nghiệm ngoại lai của phương trình, bất phương trình hoặc các loại hệ. Các nghiệm ngoại lai xuất hiện chứng tỏ việc biến dổi không tương dương hoặc còn thiếu một bước quan trọng trong lời giải.

Minh họa cho dấu hiệu này có thể dẫn ra : thí dụ 5, 7, mục 1.2.2 (trang 19–20) ; thí dụ 1, 2, 3, mục 1.2.6 (trang 34-36) ; thí dụ 8, mục 1.2.11 (trang 58).

Dấu hiệu thứ ba : Kết quả lời giải bài toán không chứa kết quả trong trường hợp riêng.

Dôi khi dấu hiệu này thể hiện như dấu hiệu thứ nhất.

Khi đặc biệt hóa bài toán sẽ dẫn tới một kết quả cụ thể mà kết quả cụ thể này phải thuộc trong kết quả của toàn bộ bài toán. Nếu điều này không xảy ra thì lời giải có sai lầm.

Chẳng hạn, khi giải bài toán "Tìm m để đồ thị $y = x^4 - mx^3 + x^2$ có trục đối xứng thẳng đứng" có thể thấy rằng trong trường hợp đặc biệt $m = 0$ thì hàm số trở thành hàm chẵn nên có trục đối xứng $x = 0$ thỏa mãn bài toán. Chứng tỏ trong các giá trị cần tìm của m phải "**tối thiểu**" có $m = 0$. Nếu kết quả lời giải thiếu $m = 0$ thì chắc chắn lời giải có sai lầm.

Lời giải cách 2 của thí dụ 5, mục 1.2.5 (trang 33) có thể thấy là sai vì khi đặc biệt hóa $m = 2$ thì yêu cầu thỏa mãn nhưng $m = 2$ lại không có trong kết quả của lời giải này.

Dấu hiệu thứ tư : Kết quả bài toán cụ thể khác kết quả bài toán tổng quát đã biết.

Nhiều bài toán mà HS giải có thể tổng quát và có kết quả tổng quát. Nếu kết quả của bài toán cụ thể mâu thuẫn với kết quả của bài toán tổng quát thì rõ ràng lời giải có sai lầm.

Chẳng hạn, đường hypebol $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ có hai tiếp tuyến vuông góc khi và chỉ khi có điểm cực đại và cực tiểu. Đó là kết quả tổng quát. HS tìm m để đồ thị $y = x + \dfrac{m}{x}$ có hai tiếp tuyến vuông góc thì dứt khoát đáp số phải là $m > 0$ (tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu là bài toán đơn giản hơn), nếu đáp số khác thì chắc chắn lời giải có sai lầm.

Một thí dụ khác, quĩ tích các điểm kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc với nhau tới parabol $y = ax^2 + bx + c$ là đường thẳng cùng phương với trục hoành (có thể viết được phương trình tổng quát). Vậy khi HS tìm quĩ tích này đối với hàm bậc hai cụ thể gặp kết quả mâu thuẫn thì lời giải có sai lầm.

Hay là, hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ nếu y' có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{b'}{a'}$. Nếu HS tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 2}$ được y' có hai nghiệm không thỏa mãn $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = -2$ thì phép tính đạo hàm y' hoặc phép tìm nghiệm của y' bị sai lầm.

Do đó trong những loại toán có thể được, GV nên cung cấp cho HS kết quả tổng quát bằng cách làm bài toán tổng quát hoặc dừng lại ở mức độ thông báo kết quả để HS có vốn kiến thức kiểm tra lại lời giải bài toán cụ thể.

Dấu hiệu thứ năm : Kết quả tìm được mâu thuẫn với thực tế.

Tất nhiên, nhiều khi dấu hiệu này xuất hiện do chính bài toán ban đầu mâu thuẫn với thực tế. Ở đây, giả sử rằng bài toán đã cho phù hợp với thực tế mà nếu kết quả mâu thuẫn với thực tế thì lời giải mắc sai lầm.

Lời giải ngụy biện nổi tiếng để chứng minh lực sĩ Asin chạy thua một con rùa, không bao giờ đuổi kịp con rùa nếu con rùa chạy trước là mâu thuẫn với thực tế, do đó lời giải có sai lầm.

Tất nhiên từ việc biết lời giải sai đến việc chỉ ra được chỗ sai, nguyên nhân sai là một quá trình rèn luyện tích cực mới đạt được.

Thực tế mà lời giải mâu thuẫn nhiều khi là thực tế của thực nghiệm trên mô hình. Toán học chủ yếu là khoa học của suy diễn và qui nạp. Thế nhưng chúng tôi đã gặp những HS thực nghiệm trên mô hình để dự đoán kết quả và kiểm tra lời giải của mình. Khi chúng tôi cho bài toán "Cho hai điểm A và B chuyển động trên đường parabol $y = x^2$ sao cho AB = 1. Tìm quĩ tích trung điểm I của AB", có HS đã lấy đoạn thước kẻ cho hai đầu trượt trên parabol để nhận định kết quả bài toán nếu là đường thẳng hoặc đường tròn là sai (tuy HS đó không giải được nhưng vẫn dự đoán được những kết quả không thể có).

Trong các bài toán tính số người, tính số các khả năng mà kết quả không phải là số nguyên dương thì chắc chắn lời giải có sai lầm.

Có HS đã dùng phép qui nạp toán học để chứng minh mọi người cao bằng nhau như sau :

Với n = 1 thì chỉ có 1 người nên người ấy cao bằng người ấy luôn đúng.

Giả sử mệnh đề đúng với n = k người.

Ta sẽ chứng minh mệnh đề đúng với n = k + 1. Thật vậy, với k + 1 người ta lấy bớt ra 1 người (gọi là A) thì còn lại k người cao bằng nhau. Sau đó lại bớt 1 người khác (gọi là B) thì cũng còn lại k người cao bằng nhau. Trong nhóm k người đầu phải có B và trong nhóm k người sau phải có A nên A cao bằng B vì cùng cao bằng C khác A, B. Vậy mọi người đều cao bằng nhau (?) Lời giải sai vì mâu thuẫn với thực tế.

Dấu hiệu thứ sáu : Kết luận không bình đẳng giữa các yếu tố bình đẳng ở giả thiết.

Qua quá trình dạy học, tích lũy nhiều kinh nghiệm, tác giả Nguyễn Thái Hòe đã tâm đắc "Việc phân tích các giả thiết, các điều kiện của bài toán và cả kết quả của nó giúp cho người giải toán thấy rõ quá trình xảy ra có tính qui luật của mọi bài toán. Nói cụ thể hơn là người giải toán sẽ biết được với các giả thiết, các điều kiện đã cho như vậy thì tất yếu kết quả phải diễn ra như thế nào ?" [43, tr. 10].

Ở đây chúng tôi muốn nhấn mạnh ***sự bình đẳng của các yếu tố ở giả thiết bài toán sẽ tất yếu thể hiện tiếp tục sự bình đẳng đó ở kết luận.*** Không xảy ra điều này thì chắc chắn lời giải sẽ sai lầm.

Dấu hiệu này rất hay xuất hiện ở các bài toán định dạng tam giác thỏa mãn hệ thức cho trước.

Chẳng hạn, nếu lời giải bài toán "Biết rằng : $r_a = r + r_b + r_c$. Chứng minh tam giác là tam giác vuông" đi tới kết luận tam giác vuông đỉnh B hoặc đỉnh C là sai. Vì sự bình đẳng của r_b, r_c trong giả thiết dẫn tới sự bình đẳng của B và C ở kết luận. Nếu B = 90° thì C = 90° và ngược lại, như vậy tam giác sẽ có hai góc vuông, vô lí !

Dấu hiệu này còn xuất hiện ở các phương trình, hệ đối xứng, chẳng hạn, nếu lời giải bài toán "Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $(x + y)^2 = (x + 1)(y + 1)$" có nghiệm $x = -1$; $y = 1$ mà không có nghiệm $x = 1$; $y = -1$ thì lời giải sai vì vai trò của x, y là bình đẳng ở giả thiết nên nếu đã có nghiệm $(-1; 1)$ thì cũng phải có nghiệm $(1; -1)$.

Dấu hiệu thứ bảy : Kết quả của lời giải này khác kết quả của lời giải khác, mà lời giải sau có hình ảnh tin cậy.

Nhiều khi để kiểm tra lời giải, người ta giải bài toán theo một cách khác. Nếu kết quả của hai cách giải mâu thuẫn thì ít nhất có một lời giải sai. Khi đó phải tiến hành kiểm tra từng bước thao tác của mỗi lời giải hoặc dùng các dấu hiệu đã trình bày ở trên để xem xét lời giải nào sai (có khi cả hai lời giải đều sai).

Thông thường thì người ta hay kiểm tra lời giải bằng một cách nhìn khác, chẳng hạn bằng hình vẽ, tuy có thể cách nhìn này không cho kết quả cụ thể của lời giải, nhưng có thể báo cho ta một dấu hiệu lời giải sai.

Chẳng hạn khi giải hệ

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 0 \\ y^2 - 2y + x^2 = 0 \end{cases}$$

lời giải chỉ có nghiệm $x = y = 0$, với cách giải khác, chẳng hạn bằng hình học thì hệ viết thành

$$\begin{cases}(x-1)^2 + y^2 = 1\\ x^2 + (y-1)^2 = 1\end{cases}$$

và nghiệm của hệ là tọa độ giao điểm của hai đường tròn nên biết được hệ phải có hai nghiệm vì hai đường tròn này cắt nhau tại hai điểm (vẽ chính xác có thể thấy hai nghiệm $x = y = 0$; $x = y = 1$). Từ đó thấy được lời giải ban đầu là sai.

Như vậy lời giải thứ hai có thể không đi đến kết quả, nhưng nên là điểm tựa để nhận ra lời giải thứ nhất sai.

Dấu hiệu thứ tám : Đơn vị đo ở hai vế của một đẳng thức khác nhau (sai lầm về thứ nguyên).

Trong các bài toán có nội dung tính toán một đại lượng qua các đại lượng khác, cần lưu ý tới đơn vị đo của các đại lượng này.

Nếu tính thể tích V qua các độ dài a, b, c mà được $V = \frac{ab^2}{c}$ thì kết quả này sai (vi phạm về thứ nguyên).

Vận tốc v của chuyển động tính qua thời gian t và quãng đường s mà được $v = \frac{t}{s}$ thì lời giải có sai lầm.

Một lời giải sai có thể biểu hiện cùng một lúc nhiều dấu hiệu, việc trang bị kiến thức giúp HS nhận ra dấu hiệu lời giải sai là rất quan trọng, chính biện pháp này giúp cho HS thực hiện được những lời khuyên bổ ích của G. Pôlya.

Nắm vững 8 dấu hiệu trên, HS rất thuận lợi khi làm các bài thi dưới hình thức trắc nghiệm.

Mỗi một khi có lời giải sai là một dịp tốt để GV cho HS thực hành thao tác các dấu hiệu trên một cách thú vị và giờ học toán sẽ hấp dẫn và HS tích cực hoạt động, nói đúng ra là có điều kiện để tích cực hoạt động.

2.3.3. Biện pháp 3 : ***HS được thử thách thường xuyên với những bài toán dễ dẫn đến sai lầm trong lời giải.***

Đây là biện pháp thường trực, kể cả khi sai lầm nào đó đã được phân tích và sửa chữa cho HS.

Để thực hiện biện pháp này, GV phải biết đặt các bài toán có chứa các "bẫy".

Thuật ngữ "bẫy" được các tác giả Lê Đình Thịnh - Trần Hữu Phúc - Nguyễn Cảnh Nam nêu ra trong tác phẩm của mình [84]. Các tác giả phân tích khá nhiều thí dụ và mỗi khi HS mắc sai lầm sẽ được đồng nghĩa với việc "sa bẫy". Vậy "bẫy" trong các bài toán là các vấn đề được tác giả cài đặt mà nếu HS không vững vàng sẽ bị sai lầm trong lời giải. Trong các hình thức "bẫy" đó có cả loại "bẫy" làm cho HS bị đánh lạc hướng và mất thời gian để tìm ra cách giải.

Chúng tôi xin định nghĩa dưới dạng mô tả khái niệm "bẫy" nhằm theo nghĩa tích cực và có tính sư phạm hơn. Chúng tôi ***không thiên về sự đánh đố học trò.*** Bởi sự đánh đố quá mức sẽ dẫn HS đến bế tắc chứ không "sa bẫy", khi đó các biện pháp có chủ định về sư phạm sẽ không thực hiện được.

Chúng tôi cho rằng "bẫy" phải làm cho bài toán có ***tính hấp dẫn,*** chính đặc trưng này làm cho HS tích cực tham gia hoạt động giải toán. HS chủ quan nghĩ rằng bài toán không có điều gì uẩn khúc và dễ dàng đưa ra lời giải của mình cùng với sai lầm do giáo viên dự kiến trước. Chúng tôi đã thực nghiệm về "bẫy" trong một đợt điều tra 464 HS trường PTTH Lê Hồng Phong (Nam Hà). Với bài toán "Chứng minh với mọi a, b, c thì : $(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \geq 8a^2b^2c^2$" đã lôi cuốn 98,5%

Có thể dùng Nó - Chuỗi Vế logic tầng.

HS tham gia giải và có lời giải. Hầu hết HS lớp 10 đều nhận xét là bài toán dễ, chỉ làm chưa đến 10 phút. Nhưng đã có tới 42% (195 HS) bị chung một sai lầm khi nhân theo vế của 3 bất đẳng thức :

$$a^2 + b^2 \geq 2ab;\ b^2 + c^2 \geq 2bc;\ c^2 + a^2 \geq 2ca$$

để có điều phải chứng minh, mặc dù 2ab, 2bc, 2ca chưa phải đồng thời là các số không âm. Khi biết mình bị sai lầm do lỗi này, nhiều HS rất thấm thía về một qui tắc suy luận sai lầm khi chứng minh bất đẳng thức. Qua đó, phải thấy rằng HS chưa vững vàng về kiến thức bất đẳng thức, mặc dù hầu hết HS là HS các lớp chuyên (xem thêm bảng 2, mục 1.1.2, trang 11).

Như vậy, để đạt mục đích sư phạm thì "bẫy" phải làm cho bài toán có ***tính thử thách để đo độ vững vàng*** về những kiến thức cụ thể của HS.

Có những bài toán được cài đặt liên tiếp các "bẫy". HS vượt qua được tất cả các "bẫy" để đi đến lời giải chính xác, chính là đã qua một hình thức đo kiến thức. Bài toán tuy nhiều "bẫy" nhưng HS khó nhận ra. Chẳng hạn, bài toán "Giải bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x+1}{x}} > 12$" liên tiếp được cài các "bẫy" sau đây :

- HS đặt $t = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} > 0$ đưa về giải $t^2 + t - 12 > 0$ và viết $t_1 = 3$; $t_2 = -4$ (loại). Ở đây điều kiện $t > 0$ ~~là điều~~ kiện của nghiệm bất phương trình chứ không phải điều kiện cho nghiệm tam thức bậc nên không thể nói đến việc loại giá trị $t_2 = -4$.

- HS viết $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$, $3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x} > -1$ bị sai lầm vì không chú ý đến cơ số $\frac{1}{3} \in (0; 1)$.

- HS viết $\frac{1}{x} < -1 \Leftrightarrow 1 < -x$ bị sai lầm vì không thể nhân hai vế của bất phương trình với x khi chưa biết dấu của x.

Bài toán trên hoàn toàn không quá khó nhưng đã kiểm tra được nhiều kiến thức của HS.

Vậy cuối cùng, "***bẫy" trong các bài toán là các kiến thức mà HS dễ bị sai lầm ở một bước nào đấy trong lời giải,*** các kiến thức này được sự chuẩn bị có chủ định của GV nhằm đạt được ***tính hấp dẫn cùng với tính thử thách đối với HS.*** Tạo ra được "bẫy" trong một bài toán chính là một nghệ thuật sư phạm của GV.

Việc tạo các "bẫy" để HS mắc sai lầm chính là sự phòng tránh chủ động các sai lầm có thể xuất hiện. Các "bẫy" này còn củng cố lại, nhằm xóa hẳn những sai lầm của HS đã được sửa chữa trước đó.

Tuy nhiên cần sử dụng các "bẫy" có mức độ. Sự lạm dụng quá biện pháp này sẽ dẫn đến sự đánh đố chứ không phải thử thách HS vì mục đích sư phạm.

2.3.4. Biện pháp 4 : *Theo dõi một sai lầm của HS khi giải toán qua các giai đoạn.*

Để tăng cường hiệu quả của các biện pháp trên, GV phải nhận thức được các giai đoạn cụ thể của một sai lầm nào đó. Đối với một sai lầm (GV có thể dự đoán trước) thì tính giai đoạn thể hiện khá rõ.

**** Giai đoạn 1 : sai lầm chưa xuất hiện.***

Ở giai đoạn này, các biện pháp được huy động nhằm "phòng tránh" sai lầm xuất hiện. Không có ý thức về việc này chúng ta dễ thiếu tích cực trong giai đoạn 1.

Biện pháp chủ yếu sử dụng trong giai đoạn này là trang bị tốt kiến thức bộ môn toán (biện pháp 1), kiến thức về phương pháp giải toán (biện pháp 2).

Một điều cần lưu ý ở giai đoạn này là GV có thể ***dự báo trước các sai lầm*** và ***thể hiện ở các chú ý đối với HS.***

Chẳng hạn, GV có thể chú ý bất đẳng thức Cauchy chỉ được áp dụng với các số không âm, vì vậy để chứng minh a (1 − a) $\leq \frac{1}{4}$ bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số a và 1 − a là sai lầm. Tất nhiên, để dự báo tốt, GV phải được trang bị hiểu biết về các sai lầm của HS khi giải toán và phải có năng lực chuyên môn, kinh nghiệm sư phạm.

**** Giai đoạn 2 : Sai lầm xuất hiện trong lời giải của HS.***

Đây là giai đoạn đòi hỏi GV phải kết hợp được ba nguyên tắc kịp thời, chính xác và giáo dục, cùng với sự tích cực hóa của HS để vận dụng các hiểu biết về việc kiểm tra lời giải (biện pháp 2) nhằm tìm ra sai lầm, phân tích nguyên nhân và sửa chữa lời giải.

Quy trình ở giai đoạn này là GV theo dõi thấy sai lầm → GV gợi ý để HS tự tìm ra sai lầm → HS tự tìm ra sai lầm → GV gợi ý điều chỉnh lời giải → HS thể hiện lời giải đúng → GV tổng kết và nhấn mạnh sai lầm đã bị mắc.

Nhiều sai lầm của HS khá tinh vi, có khi GV không phát hiện kịp thời.

Giai đoạn này đòi hỏi GV phải có thái độ đối xử khéo léo sư phạm để tăng hiệu quả giáo dục.

Tùy theo mức độ sai lầm mà GV quyết định sử dụng các biện pháp sư phạm thích hợp.

Có khi GV cần ***đưa ra lời giải đúng để HS đối chiếu*** và tìm ra sai lầm của lời giải sai, đây cũng là một cách gợi ý để HS nhận ra sai lầm.

Có khi GV ***chủ động đưa ra lời giải sai*** để HS nhận dạng các dấu hiệu tìm ra sai lầm.

đư ra lời giải Sai

Có khi GV ***đưa ra nhiều lời giải khác nhau*** để HS phân biệt sự đúng sai của các lời giải, có thể ***sử dụng phương pháp trắc nghiệm toàn lớp*** để mọi HS đều phải suy nghĩ và có ý kiến.

Giai đoạn này, GV dễ tạo ra được những tình huống thú vị, có thể phát huy ưu điểm của nhiều phương pháp dạy học như : dạy học giải quyết vấn đề, dạy học phân hóa, dạy học theo lý thuyết tình huống, dạy học đàm thoại,... trên quan điểm hoạt động của quá trình dạy học.

Ngược lại, nếu giai đoạn này GV không kịp thời phân tích và sửa chữa các sai lầm của HS khi giải toán thì các sai lầm sẽ ngày càng trầm trọng, GV không hoàn thành nhiệm vụ dạy học, HS sẽ sút kém về kết quả.

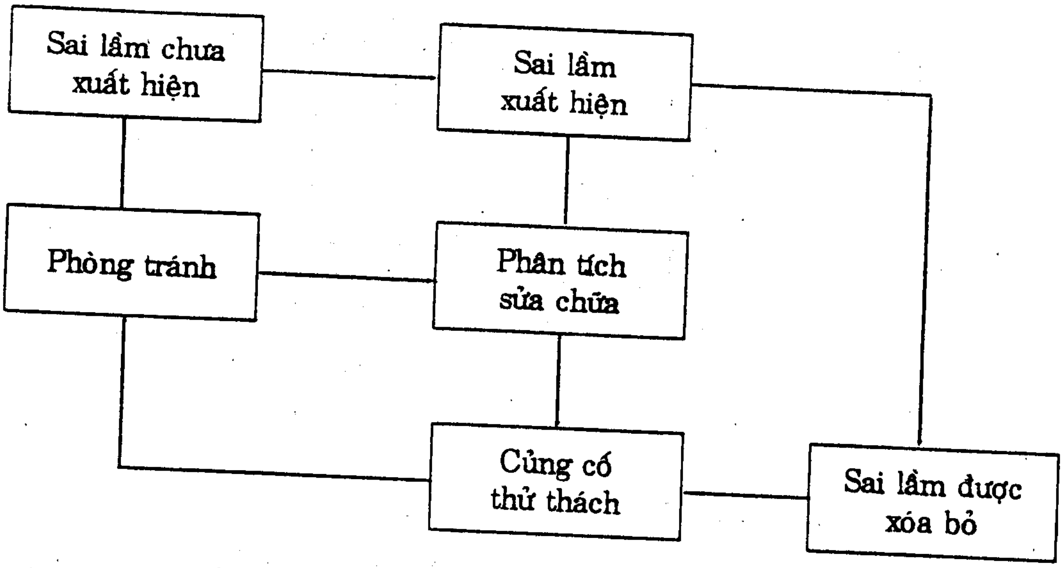
**** Giai đoạn 3 : Sai lầm đã được phân tích và sửa chữa.***

Một sai lầm của HS tuy đã được GV phân tích và sửa chữa, vẫn có thể còn tái diễn. Chúng ta lưu ý "tính ỳ" của tư duy. Đặc biệt là các sai lầm gây ra từ các thói quen không tốt. Việt dứt bỏ một thói quen không đơn giản vì thói quen nằm trong nếp sống của một con người. Song song với việc dứt bỏ một thói quen, GV cần xây dựng cho HS những thói quen tốt.

GV cần xây dựng hoạt động học cho HS (xem 2.4.2, trang 117) và thử thách thường xuyên HS qua các bài toán dễ dẫn đến các sai lầm đã sửa (biện pháp 3).

Sự nỗ lực của thầy và trò chưa dứt bỏ ~~một~~ sai lầm thì sai lầm đó lại bước vào một vòng tồn tại mới. Điều quan trọng là làm sao, cuối cùng, có thể qua nhiều vòng, GV cần xóa hẳn sai lầm đó cho HS.

Việc chia ba giai đoạn đối với một sai lầm chỉ có ý nghĩa nhấn mạnh thời điểm của sai lầm. Trong một thời điểm dạy học GV có khi đồng thời tác động đến cả ba giai đoạn, bởi vì vừa "phòng tránh" các sai lầm chưa xuất hiện, vừa lo phân tích và sửa chữa các sai lầm đang xuất hiện, đồng thời lo xóa hẳn những sai lầm đã sửa chữa. Sơ đồ sau chỉ rõ sự kiên trì để xóa bỏ một sai lầm của HS (sơ đồ 7) :



2.4. CÁC YÊU CẦU ĐỐI VỚI HỌC SINH VÀ GIÁO VIÊN

Các biện pháp sư phạm được đề xuất chỉ đạt được hiệu quả khi có sự đảm bảo của các yêu cầu về HS và GV. Đây là hai đối tượng chủ yếu tham gia thực hiện các biện pháp sư phạm. GV cần lưu ý các yêu cầu sau đây :

2.4.1. Rèn luyện ý thức và ý chí học tập cho học sinh.

Chúng ta biết rằng ý thức là sự phản ánh tâm lí cao nhất của con người. Ý thức nảy sinh và phát triển bằng hoạt động. Chúng ta hãy chú ý tới hoạt động giải toán của HS. Việc ***xác định mục đích học tập môn toán sẽ ảnh hưởng rất lớn tới điều kiện để có ý thức học tập môn toán*** ở các tầng bậc. Mục đích chung nhất của việc học tập chính là động cơ học tập. Nhiều HS chưa xác định được động cơ cũng như mục đích của việc học toán. Thậm chí có HS chỉ quan niệm toán là một môn học phải thi cử nên phải học. HS không biết rằng ***toán là một môn học nhằm rèn luyện trí tuệ một cách thuận lợi nhất***. Sự đơn điệu về phương pháp giảng dạy của GV càng làm cho ***nhiều HS coi môn toán là một gánh nặng trong việc học tập ở phổ thông.***

HS chưa ý thức được rằng sau khi tốt nghiệp PTTH, dù làm nghề gì trong xã hội cũng cần đến học vấn toán học phổ thông (kiến thức, phương pháp, kỹ năng).

Theo lí thuyết thông tin thì một trong 3 nguyên nhân để ***dẫn tới tình trạng mất thông tin là ý thức kém của người thu nhận thông tin*** (ngoài ra còn hai nguyên nhân liên quan tới : tổ chức thông tin và kĩ thuật thông tin). Chính từ đó HS nhận thức bài giảng của GV không đầy đủ, không chính xác và dẫn tới sai lầm khi giải toán.

Thiếu ý thức học tập, HS không có kế hoạch thường xuyên ôn tập lại các kiến thức đã được học. Do đó các kiến thức cơ bản dần dần mờ nhạt trong nhận thức của HS, nhiều "lỗ hổng" về kiến thức xuất hiện, thậm chí ý chí học tập cũng dần sút kém. Nhiều HS khi giải toán không có tinh thần vượt khó, không chịu tính toán cẩn thận, không chịu kiểm tra lại kết quả đã làm và từ đó dẫn tới sai lầm.

Khá nhiều HS ở các lớp chọn, lớp chuyên toán lại có một ý thức hoàn toàn sai lầm là coi thường các bài toán cơ bản, mẫu mực, thích những bài toán lắt léo, phức tạp vì vậy dẫn tới hậu quả "tưởng biết nhiều, nhưng lại không biết đến nơi đến chốn". Chính vì thế, nhiều HS chuyên toán khi làm những loại toán chuẩn lại đạt kết quả thấp và lời giải vẫn phạm nhiều sai sót.

HS PTTH dễ tự ái và phần nào thích sĩ diện với các bạn trong lớp, do đó một số HS ***tuy chưa hiểu bài giảng, những vẫn không kịp thời hỏi thày, hỏi bạn.*** Thậm chí nhiều HS tuy không hiểu, vẫn chép lời giải ở các sách vào vở bài tập của mình để đối phó với GV và tỏ ra là mình "làm được". Sau một số lần như thế các HS đó sẽ không có thói quan độc lập suy nghĩ và tự mình giải toán.

Một số HS kém thì nghĩ rằng mình có cố gắng mấy cũng không ăn thua gì. Từ ý thức này, HS không có ý chí học tập, không chịu trau dồi kiến thức, không tự tin để sửa chữa các sai lầm nên tiếp tục phạm lại các sai lầm.

Ý chí học tập môn toán của HS ảnh hưởng tới chức năng nhận thức khi học toán. ***Nếu HS có ý chí không cao thì sự huy động các nỗ lực trí tuệ và thể chất vào việc giải toán sẽ bị ức chế.*** Ngay trong việc giải toán, có những bài toán mà để giải đúng phải có ý chí kiên trì từng phép biến đổi nhỏ. Thậm chí, nếu không có ý chí thì nhiều HS sẽ mặc cảm với trình độ của mình và không bao giờ khắc phục được các sai lầm của mình. "***Ý chí đã làm cho con người có sức mạnh phi thường vượt qua muôn vàn khó khăn, trở ngại tưởng như không vượt nổi***" [30, tr. 240].

Thiếu ý chí, HS sẽ không độc lập suy nghĩ để giải toán luôn chờ GV chữa hoặc bạn bè làm hộ. Khi phải tự mình giải toán thì HS dễ dàng mắc sai lầm, có khi không giải được nổi cả những bài toán cơ bản. Mặt khác, ý chí của mỗi HS còn bị ảnh hưởng bởi khí chất. Nhiều HS có khí chất kiểu hoạt bát, hăng hái thì rất tích cực giải toán khi bài toán hấp dẫn và gây hứng thú, nhưng lại dễ chán nản khi gặp những bài toán đơn điệu đòi hỏi sự tỉ mỉ, mất công sức nhiều. Nhiều HS chuyên toán đang mắc nhược điểm này trong học tập môn Toán. Do đó trong nhiều kì thi với mức độ bình thường, các HS này đạt kết quả lại không tốt. HS có khí chất kiểu nóng nảy thì rất dễ bị nhầm lẫn trong tính toán hoặc không xét được đầy đủ các trường hợp, các ẩn ý của bài toán.

Điều kiện để HS hứng thú học toán còn hạn chế : cơ sở vật chất, trang thiết bị và tài liệu học tập thiếu thốn làm ảnh hưởng đến chất lượng dạy và học nói chung, cũng như môn toán nói riêng. Điều đó ngày càng làm cho năng lực giải toán của HS kém đi và các sai lầm khi giải toán xuất hiện càng "đa dạng".

2.4.2. *Hình thành hoạt động học cho học sinh.*

Dạy học tập trung vào HS, nghĩa là lấy HS làm mục tiêu phấn đấu của sự nghiệp giáo dục và lấy HS làm động lực chính để tiến hành toàn bộ quá trình dạy học. Từ quan điểm dạy học này nên có phương pháp dạy học phát huy tính tích cực của HS [38, tr. 4].

Chính vì dạy học tập trung vào HS và nhằm khắc phục các nguyên nhân sai lầm của HS khi giải toán, chúng tôi rất chú ý tới sự hình thành hoạt động học cho HS theo mục đích này.

Chúng ta biết rằng hoạt động học của HS gồm ba yếu tố chủ yếu là ***động cơ học tập, mục đích học tập và hành động học tập*** [31, tr. 78-91].

GV nên thấy rằng ***động cơ học tập của HS không thể áp đặt từ bên ngoài*** mà phải dưới sự hướng dẫn và tổ chức của người thầy.

GV cần phải làm cho HS thấy sự hấp dẫn của môn toán. Sự hấp dẫn này kích thích sự mong muốn chiếm lĩnh kiến thức. Không những ở ngay từng giờ lên lớp, mà GV nên tổ chức các hoạt động ngoại khóa toán học, những vai trò to lớn của toán học, những tấm gương HS say mê học tập sẽ dần thức tỉnh lòng ham mê học toán của HS. HS sẽ có "***động cơ hoàn thiện tri thức***" về môn toán. Mỗi sáng tạo, mỗi sự chịu khó học toán của HS cần được tuyên dương, khích lệ, khen thưởng. HS thấy phấn khởi giữa gia đình, bạn bè, thầy cô và từ đó tạo nên "***động cơ quan hệ xã hội***" từ các kết quả học tập môn Toán.

GV cần phát hiện và lấp các "lỗ hổng" về kiến thức cho HS. Nhiều HS lười học vì những kiến thức ít ỏi về môn Toán không đủ điều kiện để lĩnh hội các kiến thức mới.

Cần cho HS thấy rằng sự hoàn thiện kiến thức toán phổ thông sẽ giúp ích nhiều cho cuộc sống, làm việc sau này.

Từ động cơ học tập môn toán, trong quá trình học tập HS cũng dần dần hình thành ***mục đích học tập.***

"Lâu nay nhiều người hiểu lầm rằng, mục dích hành động là hoàn toàn do đầu óc con người nghĩ ra một cách chủ quan" [31, tr. 82].

Việc sử dụng tích cực các biện pháp đã nêu trước, giúp HS có điều kiện tăng cường và tích cực hoạt động học. ***Trình độ học toán được nâng lên thì mục đích học tập càng cụ thể hóa.*** Qua tìm hiểu nhiều HS giỏi toán thì các em nói say sưa về mục dích học toán của mình, trong khi đó các em khác thường khó diễn đạt ra.

Tuy nhiên, muốn đi tới mục đích cao đẹp của việc học bộ môn toán, HS phải có hành động học tập. Chính các hành động học tập sẽ giảm bớt những nguyên nhân về tâm lí dẫn tới các sai lầm khi giải toán.

GV cần giúp HS hình thành các hành động cụ thể trong việc học toán và đó cũng là các hành động học tập nói chung.

Cụ thể, ***HS cần có hành động phân tích khi học toán.*** Đứng trước một khái niệm, một định lí, một qui tắc, một lời giải HS phải biết phân tích để lĩnh hội kiến thức. HS phải biết những câu hỏi tự nêu ra và tích cực tự trả lời. Khi giải toán bị sai lầm, HS cần phân tích các sai lầm để tìm ra nguyên nhân và điều chỉnh dẫn tới lời giải chính xác. Chính hành động phân tích giúp HS có ý thức và ý chí học toán. Tuy nhiên, "trình độ phát triển hành động phân tích không thể tách rời trình độ nắm tri thức đã có từ trước" [31, tr. 87]. Vì vậy, cần ***phối hợp nhiều biện pháp mới giúp cho hành động phân tích của HS hình thành và phát triển.***

Trong việc học toán và cụ thể hơn là việc giải toán còn dòi hỏi HS phải có ***hành động mô hình hóa.*** Nhiều bài toán phức tạp, nhưng khi dược mô hình hóa lại làm cho lời giải dễ xuất hiện. Người ta ví "mô hình tựa như cỗ xe chở lôgic của khái niệm vào đầu" [31, tr. 88].

HS dã tạo ra ***mô hình biểu trưng*** khi biểu diễn các đại lượng bởi các đoạn thẳng ngắn, dài khác nhau từ cấp tiểu học, khi dùng sơ đồ Ven để biểu thị các tập hợp. HS dã tạo ra ***mô hình võ đoán*** khi tiếp xúc với các công thức, qui tắc, kí hiệu. HS đã tạo ra ***mô hình gần giống vật thật*** khi quan sát các giáo cụ trực quan của GV. HS dã tạo ra ***mô hình quá trình*** khi làm quen với các thuật toán. Chính hành động mô hình hóa giúp HS gặp thuận lợi trong các thao tác cụ thể để thực hiện hành động phân tích.

Nhưng hành động học toán của HS không chỉ dừng lại ở hai hành động trên. Từ học lí thuyết toán, HS phải tiến hành giải toán. Nắm được các khái niệm, định lí rồi mà HS vẫn khó khăn trong việc giải toán và mắc các sai lầm. Cần phải hình thành cho HS ***hành động cụ thể hóa.*** Biết bất đẳng thức Cauchy tổng quát nhưng HS lại cụ thể hóa sai bài toán chứng minh bất đẳng thức. Có thể nói rằng, các qui tắc, các phương pháp giải, các khái niệm, các định lí phải được cụ thể hóa trong mỗi một tình huống giải toán. Sự rèn luyện tích cực nhờ các bài tập trên lớp hay bài tập về nhà chính là giúp HS không nắm kiến thức toán chung chung mà phải biết vận dụng vào giải toán và thực tiễn.

Để sửa chữa các sai lầm khi giải toán thì việc thực hiện các hành động nói trên cần có sự nỗ lực lớn của học sinh. Việc này dòi hỏi ***HS phải có ý chí***, tức là có năng lực thực hiện việc sửa chữa sai lầm. Ý chí là một hiện tượng tâm lí nhưng cũng là mặt năng động của ý thức. Trong mục 2.4.1, chúng tôi dã nhấn mạnh tới ý thức và ý chí của HS.

Bên cạnh hành động ý chí cần có những hành động tự động hóa như thói quen, kĩ xảo.

Những thói quen xấu cần có ý chí mới khắc phục được. Nhiều HS có thói quen trình bày cẩu thả nên hay tính toán nhầm lẫn. Một số lại có thói quen đọc đề toán xong là giải ngay nên có khi định hướng sai lời giải. Chúng ta cần xây dựng những thói quen tốt cho học sinh nhằm tránh sai lầm khi giải toán. Chẳng hạn ***thói quen đọc kĩ đề bài để hiểu rõ giả thiết, kết luận, thói quen trình bày bài sáng rõ, mạch lạc, thói quen ôn tập thường xuyên kiến thức cũ, thói quen kiểm tra lại từng bước và toàn bộ lời giải...*** Tất cả các thói quen tốt sẽ dần dần thay thế các thói quen xấu, tuy nhiên rất cần sự nỗ lực của thầy và trò.

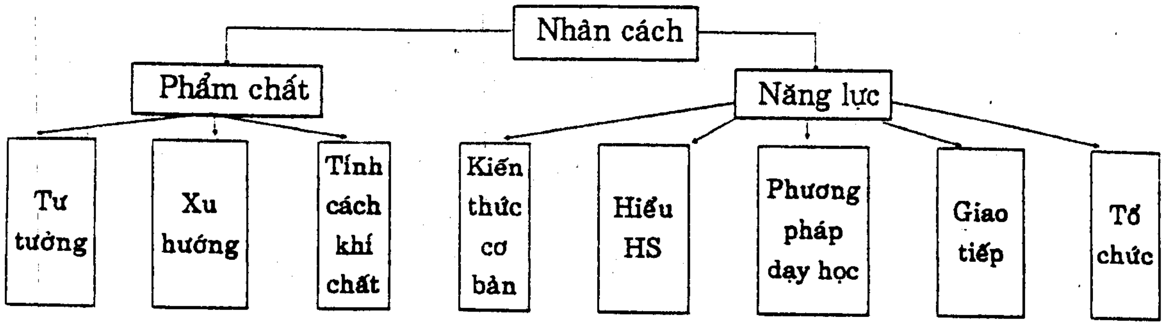
Ngoài thói quen là một ***hành động tự động hóa*** thì ***kĩ xảo*** cũng là một loại hành động tự động hóa có ý thức nhờ luyện tập.

Trong hoạt động của HS cần có nhiều kĩ xảo. Các kĩ xảo này được hình thành trên cơ sở các kĩ năng sơ đẳng. Chẳng hạn kĩ năng vẽ hình, vẽ đồ thị, kĩ năng tính toán, kĩ năng ghi chép... Nhiều HS mải chép thì lại không chú ý nghe giảng được và ngược lại. Điều này ảnh hưởng rất nhiều đến việc nhận thức. Một số HS vẽ hình rất lúng túng, không chính xác và thiếu trực quan nên dễ dẫn tới sai lầm. Sự luyện tập để hình thành các kĩ năng, kĩ xảo, thói quen sẽ hỗ trợ với tri thức toán học làm cho HS hoàn thiện hoạt động học. Từ đó nâng dần trình độ giải toán, hạn chế và sửa chữa có hiệu quả các sai lầm trong lời giải.

2.4.3. *Xây dựng uy tín của GV dựa trên sự bồi dưỡng năng lực chuyên môn và phẩm chất nghề nghiệp.*

Chúng ta biết rằng "nhân cách của người GV là nhân tố có ý nghĩa to lớn đối với chất lượng giáo dục" [31, tr. 157].

Nhân cách của người GV có cấu trúc như sau (sơ đồ 8) :



GV không tự thường xuyên rèn luyện năng lực chuyên môn của mình nên dạy HS khó hiểu, thậm chí có GV đôi lúc còn giải sai các bài toán. GV chưa biết áp dụng phương pháp dạy học phân hóa trong khi năng lực của học sinh phân cực đậm nét.

Có GV vững kiến thức toán nhưng lại yếu về năng lực sư phạm, nên càng dạy, HS càng thấy vấn đề phức tạp thêm và dẫn học sinh đến sai lầm vì các nguyên nhân kiến thức.

Nhiều GV khi dạy định lí, khái niệm, quy tắc chưa có khả năng phân tích rõ cấu trúc toán học và chưa dự kiến được các sai lầm dễ mắc của HS.

Có những HS rất mạnh dạn suy nghĩ và tìm thêm được lời giải khác cho bài toán, nhưng GV lại không biết động viên, có khi còn chê lời giải ấy là dài dòng. ***Sự phủ định sáng tạo của HS, dù sáng tạo nho nhỏ cũng làm HS mất tự tin*** và dẫn đến ~~những lời~~ giải không có căn cứ lí luận (vì không dám lí luận).

Việc kiểm tra dánh giá kết quả học tập của HS không chính xác sẽ làm mất uy tín của GV đối với HS, mất sự đoàn kết trong HS [67, tr. 11-12].

Trước hết, nếu GV không có lí tưởng nghề dạy học thì không thể hy sinh tận tụy với nghề nghiệp và không thể ảnh hưởng tốt tới nhân cách của HS. Một số GV toán chưa coi nghề dạy toán là sự nghiệp của mình, dẫn đến dạy HS qua loa, đại khái và dẫn đến các nguyên nhân kiến thức làm cho HS dễ bị sai lầm khi giải toán.

Không có lí tưởng nghề dạy học nên GV không rèn luyện năng lực chuyên môn về kiến thức toán và kiến thức phương pháp dạy học. Một số GV không giải hết bài tập trong sách giáo khoa, đặc biệt là những phần chương trình mới được đưa vào trong môn Toán PTTH.

Tính cách và khí chất của một số GV chưa phù hợp với môi trường sư phạm. GV khi thấy HS sai có khi cáu gắt, thậm chí chế diễu làm cho nhân cách của HS bị xúc phạm, tư tưởng của HS thêm hoang mang.

Sự cẩu thả trong trình bày lời giải, sự đại khái trong chứng minh, tùy tiện trong kí hiệu của GV rất dễ "lây" sang HS.

GV nhiều khi chỉ thích dạy HS giỏi, ngại dạy HS kém, chỉ muốn bồi dưỡng đội tuyển thi đấu các cấp mà không thích phụ đạo, kèm cặp HS yếu. Tất nhiên, dạy đối tượng nào cũng có cái khó, cái vất vả, nhưng nếu nghĩ đến trách nhiệm giáo dục của người thầy thì chắc chắn chúng ta sẽ vượt qua được cái cảm giác ấy.

Nhiều GV ít giao tiếp với học sinh nên ***HS ngại trình bày những thắc mắc, băn khoăn với GV***. Thế là sự băn khoăn đó có thể biến thành sai lầm trong lời giải sau này của HS.

"Uy tín là một yếu tố vô cùng quan trọng giúp thầy giáo thành công trong công tác. Người có uy tín là người có ảnh hưởng rất mạnh đến những người khác" [31, tr. 173].

Trong hoạt động dạy toán mà đặc biệt trong quá trình hạn chế và sửa chữa sai lầm của HS khi giải toán thì uy tín GV là điều kiện thực hiện hiệu quả các biện pháp sư phạm.

Muốn có uy tín thì GV phải có nhân cách tốt, tức là phải có phẩm chất nghề nghiệp và năng lực chuyên môn tốt.

HS thường lí tưởng hóa những người thầy có uy tín và đánh giá thấp đi so với thực tế, những GV không có uy tín với các em.

Như vậy nếu GV không có uy tín thì HS ít có ý thức lĩnh hội tri thức toán, thậm chí nghi ngờ cả những chỉ dẫn của thầy.

Việc GV tự bồi dưỡng để phát triển nhân cách đòi hỏi nhiều ý chí. Chúng ta cần tránh một số khuynh hướng sai làm nhằm tạo ***uy tín giả tạo***. Chẳng hạn, một số GV ***quá dễ dãi, xuề xòa với học sinh*** để HS "thích", đây không phải là uy tín đích thực. Ngược lại, có GV lại ***tạo ra khoảng cách trong giao tiếp*** với HS để tỏ ra mình là người ở vị trí cao về tri thức và nghĩ rằng HS sẽ ngước mắt nhìn lên mình với ánh mắt đầy kính phục. Đây là suy nghĩ hoàn toàn sai lầm, ***GV càng xa cách HS bao nhiêu thì uy tín sẽ càng giảm bấy nhiêu***. HS luôn nhạy cảm với sự tận tụy và năng lực của GV. GV có năng lực giỏi mà không tích cực, say mê với giảng dạy thì cũng không có uy tín với HS. Thậm chí có GV lại ***tự đề cao mình***, chê những GV khác để tưởng rằng mình có uy tín hơn, cũng sai lầm, vì như vậy phẩm chất của GV đó là thấp kém. Tập thể mạnh sẽ làm uy tín của từng GV tăng lên.

Chúng tôi sẽ không đề cập rộng đến sự hình thành và phát triển nhân cách của GV. Điều đó đã được bàn nhiều trong bất cứ giáo trình tâm lí học nào. Chúng tôi muốn nhấn mạnh một số điểm quan trọng nhằm mục đích : tạo điều kiện cho việc hạn chế và sửa chữa các sai lầm của HS khi giải toán.

Trước hết GV phải ***tận tụy với nghề dạy toán***, chính sự tận tụy này sẽ là tiền đề cho ***mọi sự đòi hỏi hoàn thiện các tri thức bộ môn và tri thức sư phạm***.

GV cần ***nắm vững tri thức bộ môn toán,*** thông qua đọc sách, trao đổi với đồng nghiệp, dự các lớp bồi dưỡng. Các trường PTTH cần bố trí sinh hoạt nhóm chuyên môn có chất lượng để cùng nâng cao trình độ cho GV. Các Sở giáo dục và đào tạo nên hàng năm tổ chức bồi dưỡng GV. Nhiều vấn đề của toán học mới được đưa vào chương trình PTTH gây không ít lúng túng cho GV.

GV cần thiết được ***trang bị kiến thức về các sai lầm của HS khi giải toán.*** Bởi có thế, công việc hạn chế và sửa chữa sai lầm cho HS mới hoàn toàn chủ động. Đặc biệt là tránh ngay các sai lầm khi giải toán của chính GV.

GV phải rèn luyện để có được ***thái độ đối xử khéo léo sư phạm.*** Đây chính là "đặc điểm quan trọng nhất trong hành vi của GV và là sự biểu hiện rõ ràng các năng lực sư phạm của GV" [73, tr. 232]. Khi HS mắc sai lầm trong lời giải, GV cần kịp thời gợi ý để HS tự nhận ra sai lầm.

GV cần tránh những kết luận chạm tới lòng tự ái của HS, đặc biệt là "yêu cầu cao nhưng không được hạ thấp phẩm giá của HS" [73, tr. 233].

Không nên nhấn mạnh sai lầm của HS đến mức gây cho HS sự hoảng sợ. Cần phải đánh giá đúng mức độ sai lầm và luôn động viên HS là : nếu chịu khó rèn luyện chúng ta sẽ cùng nhau khắc phục được sai lầm. Sợ hãi mắc sai lầm HS sẽ không dám làm bài khó và không dám sáng tạo. GV hãy giúp HS tự tin vào chính bản thân.

GV cần lưu ý rằng, dù cố gắng tránh, nhưng trong quá trình đi tới sự chuẩn xác trong lời giải thì HS vẫn có thể mắc sai lầm. Thái độ chín chắn và quan tâm của GV đối với HS chính là ***"liều thuốc tâm lí hiệu nghiệm" góp phần "chữa" các sai lầm của HS.***

GV phải rèn luyện tri giác tốt, cảm nhận vấn đề kịp thời và nhận định đúng các tình huống trên lớp, đặc biệt các tình huống sư phạm thay đổi nhanh chóng.

Khi HS giải bài tập trên bảng, GV cần tập trung theo dõi, tránh tình trạng thờ ơ và không phát hiện kịp sai lầm của HS.

Những biểu hiện tình cảm của giáo viên khi HS mắc sai lầm là rất quan trọng đối với việc giáo dục các em. Sự tức giận của GV sẽ gây tổn thương tình cảm và mất uy tín với HS, chính vì vậy GV cần biết ***kìm chế, bình tĩnh khi phân tích các nguyên nhân*** dẫn đến sai lầm của HS.

Thái độ đối xử khéo léo sư phạm còn đòi hỏi GV phải ***biết sử dụng cách khắc phục sai lầm của HS trong từng hoàn cảnh giao tiếp*** (khi đứng trước cả lớp, khi ở nhà có cả gia đình, khi chỉ có một thầy một trò, khi tham quan vui chơi...).

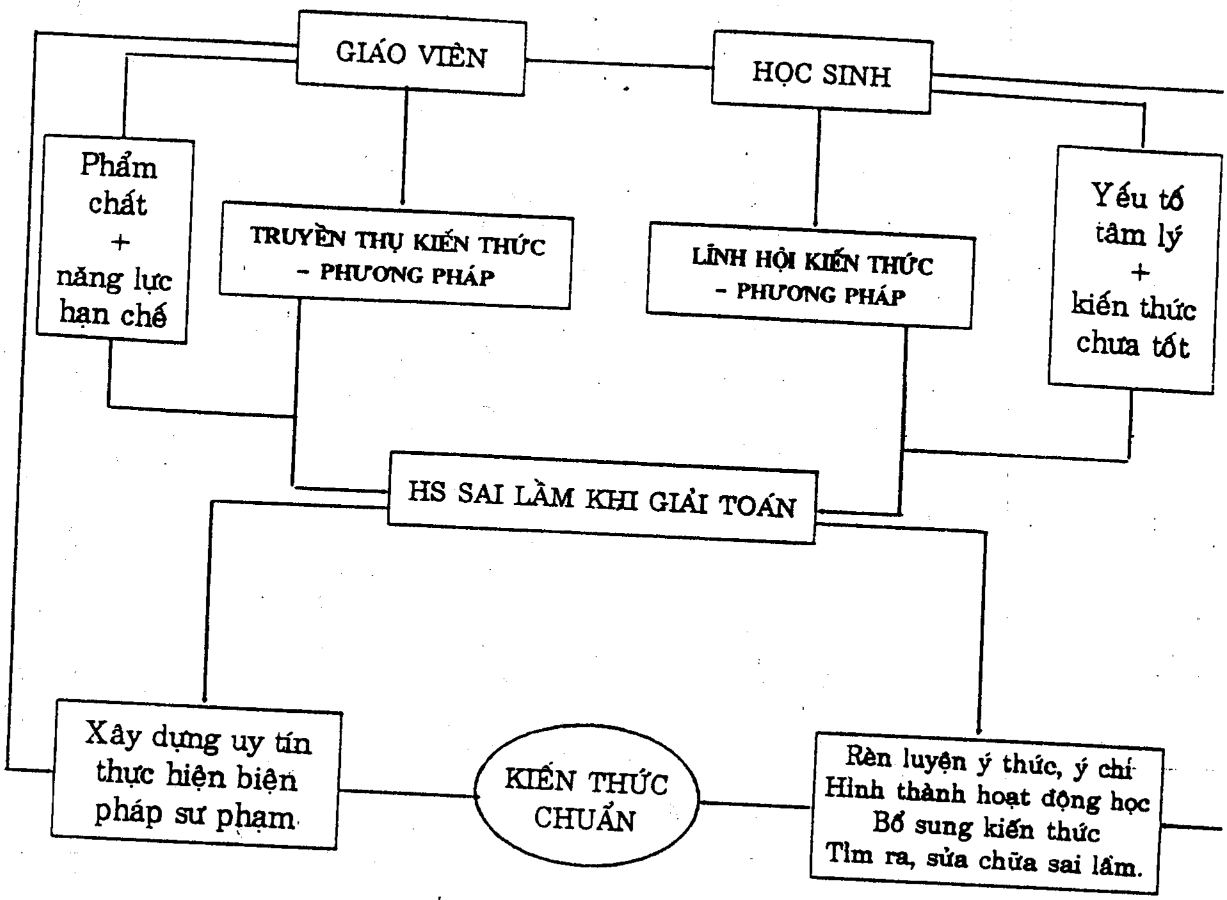
Thái độ đối xử khéo léo sư phạm đòi hỏi GV cần thận trọng khi chấm bài, khi đánh giá các phát biểu của HS trên lớp. Sự không công bằng trong đánh giá HS sẽ dẫn tới mất uy tín của GV, thậm chí gây mất đoàn kết trong tập thể HS.

Tất nhiên, chúng ta cần nhận thức rằng ***việc sửa chữa các sai lầm của HS có hiệu quả do sự nâng cao hiểu biết của HS giải quyết, chứ không phải phụ thuộc hoàn toàn vào GV.***

Đối với sinh viên sư phạm toán thì các yêu cầu về việc rèn luyện phẩm chất nghề nghiệp và năng lực chuyên môn lại càng đòi hỏi cao. Nếu không có ý thức này, nhiều sinh viên khi ra trường thấy mình không đáp ứng được nhiệm vụ dạy toán, không xây dựng được uy tín sẽ dễ chán nghề dạy học. Làm sao để góp phần nâng cao tay nghề cho sinh viên sư phạm toán ? Chúng tôi sẽ nêu ra một đề nghị ở cuối luận án này (trang 132).

KẾT LUẬN

Bốn biện pháp sư phạm với ba phương châm chỉ đạo nhằm mục đích làm cho HS có được kiến thức chuẩn xác. Điều này được tổng kết bởi sơ đồ sau (sơ đồ 9) :


GIÁO VIÊN
HỌC SINH
Phẩm chất + năng lực hạn chế
TRUYỀN THỤ KIẾN THỨC - PHƯƠNG PHÁP
LĨNH HỘI KIẾN THỨC - PHƯƠNG PHÁP
Yếu tố tâm lý + kiến thức chưa tốt
HS SAI LẦM KHI GIẢI TOÁN
Xây dựng uy tín thực hiện biện pháp sư phạm
KIẾN THỨC CHUẨN
Rèn luyện ý thức, ý chí
Hình thành hoạt động học
Bổ sung kiến thức
Tìm ra, sửa chữa sai lầm.

Chương 3

THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

3.1. MỤC ĐÍCH THỰC NGHIỆM.

Sáng tỏ thêm khẳng định sai lầm của HS khi giải toán là tình trạng phổ biến hiện nay, kể cả HS chuyên toán (những HS được coi là có trình độ khá giỏi về toán).

Thực nghiệm còn nhằm thử nghiệm các biện pháp dạy học thích hợp để phát hiện, phân tích, hạn chế và sửa chữa các sai lầm của HS khi giải toán. Từ đó có thể xem xét tính khả thi và tính có hiệu quả của các biện pháp đã đề xuất.

3.2. NỘI DUNG THỰC NGHIỆM.

Trang bị các kiến thức bộ môn toán, trong đó có các kiến thức về lôgic, các khái niệm, các định lý, các phương pháp giải trong phạm vi chương trình phân môn Đại số lớp 10.

Trang bị cho HS các kiến thức về phương pháp giải toán, đặc biệt là các dấu hiệu để phát hiện lời giải giải sai, tạo các "bẫy" trong các bài toán, nhằm rèn luyện HS hạn chế các sai lầm khi giải toán.

3.3. TỔ CHỨC THỰC NGHIỆM.

Được sự đồng ý của các cấp lãnh đạo ngành giáo dục và đào tạo Hà Nội, tác giả chọn đối tượng thực nghiệm là HS chuyên toán lớp $10D_1$, trường PTTH Chu Văn An (Hà Nội).

3.3.1 Đặc điểm của đối tượng thực nghiệm : là lớp chuyên toán đầu tiên mở theo tinh thần xây dựng trường PTTH Chu Văn An trở thành trường PTTH chất lượng cao trong ba trường chất lượng cao của cả nước.

Do tuyển năm đầu nên chất lượng HS còn yếu. Điểm chuẩn tuyển là 23/40 (thấp hơn điểm tuyển vào chuyên toán của trường PTTH Hà Nội - Amsterdam là 7 điểm).

Chúng tôi đã tiến hành tìm hiểu HS qua phiếu tìm hiểu, điều tra chất lượng đầu năm với 41 HS thì được kết quả (bảng 8) :

Điểm / Kết quả	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số HS	3	11	4	4	5	7	4	2	0	1	0
Tỷ lệ %	7,3	26,7	9,8	9,8	12,2	17,1	9,8	4,9	0,0	2,4	0,0

Như vậy chứng tỏ trình độ HS không đều và HS giỏi còn ít.

3.3.2. Mục tiêu được đặt ra trong năm học 1995 - 1996 của lớp $10D_1$ là :

- HS nắm vững các kiến thức về lý thuyết tập hợp, đại số mệnh đề, hàm số, phương trình bậc nhất, phương trình bậc hai, phương trình vô tỉ, bất phương trình bậc nhất, bất phương trình bậc hai, bất phương trình vô tỉ, hệ đối xứng hai ẩn, hệ bậc nhất hai ẩn, phương trình - bất phương trình có chứa dấu trị tuyệt đối, một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức và ứng dụng.
- Có HS đạt giải HS giỏi toán chuyên thành phố Hà Nội.

3.3.3. Quá trình thực nghiệm :

Chúng tôi trực tiếp giảng dạy phân môn Đại số cho lớp. Ngoài thời khóa biểu 4 tiết một tuần, nhà trường bố trí thêm một số tiết bồi dưỡng đội tuyển HS giỏi. Vì năng lực thực sự của HS chưa tốt nên chúng tôi vừa dạy kiến thức mới vừa nhấn mạnh lại một số kiến thức cũ ở PTTH cơ sở. Qua đó còn thấy được việc không nắm được những kiến thức quan trọng ở phổ thông cơ sở ảnh hưởng lớn đến việc giải toán ở lớp 10.

Chúng tôi phối hợp các phương pháp dạy học : phương pháp giải quyết vấn đề, phương pháp dạy học phân hóa, phương pháp đàm thoại để thể hiện các nguyên tắc, các biện pháp đã đề xuất.

Chúng tôi đã tăng cường các chú ý về những sai lầm dễ mắc phải của HS khi giải toán, lần lượt qua các chương trong môn Đại số lớp 10 như sau :

a) Chương I : Các vấn đề bổ sung về lý thuyết tập hợp và lôgic mệnh đề

- Dùng sơ đồ Ven để giải toán và kiểm tra các kết quả nhằm tránh sai lầm.

- Phân tích thêm ý nghĩa của các phép toán lôgic và những sai lầm thường mắc phải khi chứng minh quy nạp toán học, chứng minh phản chứng.

- Nhấn mạnh các phương pháp phân tích đi lên để tìm lời giải và phương pháp tổng hợp để trình bày lời giải.

- Mối quan hệ giữa các mệnh đề thuận, đảo, phản, phản đảo.

b) Chương II : Hàm số và đồ thị

- Khái niệm hàm số, đồ thị và các khái niệm liên quan : tập xác định, tập giá trị, tính đối xứng của đồ thị, hàm số ngược..., cùng những sai lầm thường mắc.

- Các phép biến đổi đồ thị và ứng dụng của đồ thị.

c) Chương III : Phương trình - hệ phương trình

- Các sai lầm về biến đổi tương đương các phương trình, các hệ phương trình.

- Các sai lầm khi sử dụng các định lý về nghiệm, dấu của tam thức bậc hai.

- Các sai lầm về biến đổi các biểu thức vô tỉ và phương trình vô tỉ.

d) Chương IV : Bất phương trình - Bất đẳng thức

- Các sai lầm khi sử dụng các quy tắc suy luận trên các bất đẳng thức
- Các sai lầm khi vận dụng các bất đẳng thức.
- Các sai lầm khi biến đổi bất phương trình.

Chúng tôi bước đầu trắc nghiệm để HS tập nhận định lời giải đúng ngay trên lớp hoặc bài kiểm tra.

Chẳng hạn : Hãy chỉ ra các kết quả sai của bài toán sau đây

"Tìm m sao cho đồ thị $y = x^4 - (m^2 - 1)x^3 + |m|x + 1$ có trục đối xứng thẳng đứng"

A : $\left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = 1 \end{array}\right.$ B : $-1 \le m \le 2$ C : $\left[\begin{array}{l} m = \pm 2 \\ m = 0 \end{array}\right.$

HS dùng dấu hiệu 3 để biết kết quả đúng phải chứa $m = \pm 1$ nên A và C là sai. HS dùng dấu hiệu 6 để biết nếu $m = \alpha$ thỏa mãn bài toán thì $m = -\alpha$ cũng thỏa mãn bài toán nên B cũng sai.

Trong thời gian một năm học, mối giao tiếp giữa thầy và trò ngày càng được tăng cường nên các biện pháp thể hiện thêm hiệu quả.

3.4. KẾT QUẢ THỰC NGHIỆM.

Công tác thực nghiệm được đánh giá qua các mặt định lượng và định tính.

3.4.1. Kết quả định lượng

Thông qua các bài kiểm tra thường xuyên để theo dõi quá trình học tập của HS và điều chỉnh phương pháp, kiến thức truyền thụ.

Dưới đây là kết quả bài kiểm tra cùng đề bài với khối 10 trường PTTH Lê Hồng Phong (Nam Hà) (xem trang 10). Chúng tôi đánh giá các sai lầm S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 để đối chúng với lớp chuyên Toán trường PTTH Lê Hồng Phong (bảng 9) :

Lớp \ sai lầm	S_1	S2	S3	S4	S5
Thực nghiệm (33 HS)	12,1%	15,1%	21,2%	9,1%	21,2%
Đối chúng (35HS)	17,1%	40,0%	34,3%	11,4%	45,7%

Kết quả điểm số của hai lớp (bảng 10) : 1 bài kiểm tra [illegible]

Lớp \ Điểm	1 - 2	3 - 4	5 - 6	7 - 8	9 - 10
Thực nghiệm	0	1	4	9	19
Đối chúng	0	1	10	21	3

Như vậy, so với đầu năm học, lớp $10D_1$ đã tiến bộ nhiều về năng lực giải toán. Tuy các sai lầm khi giải toán chưa xóa bỏ hẳn được nhưng tỉ lệ HS mắc sai lầm đã giảm nhiều..

3.4.2. Kết quả định tính :

HS được trang bị chính xác các khái niệm, định lí, quy tắc, thuật giải nên luôn có ý thức sử dụng hợp lí khi giải toán.

Trong các tiết học, không khí học tập sôi nổi, tích cực. HS có thể nhận xét và phân tích các lời giải sai và sửa chữa để có lời giải đúng. HS hình thành được thói quen phân tích đề bài và tự kiểm tra lời giải qua các dấu hiệu được trang bị.

HS sử dụng các kí hiệu, quy tắc suy luận ngày càng chính xác. Khả năng diễn đạt qua ngôn ngữ nói, ngôn ngữ viết được phát triển tốt.

Tuy nhiên, để phát huy hết tác dụng của các biện pháp sư phạm thì cần có thêm thời gian rèn luyện. Hai năm nữa, HS mới kết thúc chương trình phổ thông trung học, chúng tôi nghĩ rằng tới lúc đó năng lực giải toán của học sinh sẽ được khẳng định đầy đủ hơn.

Trong kì thi HS giỏi toán lớp 10 của thành phố Hà Nội, em Ngô Huy Hoàng đã đạt giải nhì của hệ chuyên toán. Đó chính là kết quả của ý chí rèn luyện của bản thân HS mà có phần đóng góp của GV.

3.5. KẾT LUẬN THỰC NGHIỆM.

Các nhận định của luận án là đúng đắn. Các biện pháp với các nguyên tắc đề ra có tính khả thi và hiệu quả. HS giảm bớt các sai lầm, tạo được nhiều thói quen tốt, khả năng suy luận được tăng cường và có ý thức chính xác trong diễn đạt. Qua thực hiện các biện pháp, chất lượng các giờ học được nâng cao, HS hứng thú học tập và năng lực giải toán có nhiều tiến bộ.

3.6. ĐỀ NGHỊ VỀ MỘT HIỂU BIẾT QUAN TRỌNG CỦA SINH VIÊN SƯ PHẠM TOÁN.

Qua nghiên cứu và quan sát của mình, chúng tôi có một kiến nghị tha thiết sau đây : ***những sai lầm của HS khi giải toán là một hiểu biết quan trọng của sinh viên sư phạm*** [68, tr. 11].

Thật vậy, nhìn lại chương trình học của sinh viên sư phạm toán, chúng tôi thấy các môn học có ***tính chất đào tạo tay nghề dạy học*** như tâm lí học, giáo dục học lại được giảng dạy ***chưa sâu sắc và ít có thí dụ vận dụng vào việc giảng dạy toán.*** Từ đó, sinh viên không thích học hoặc học đối phó với các môn này.

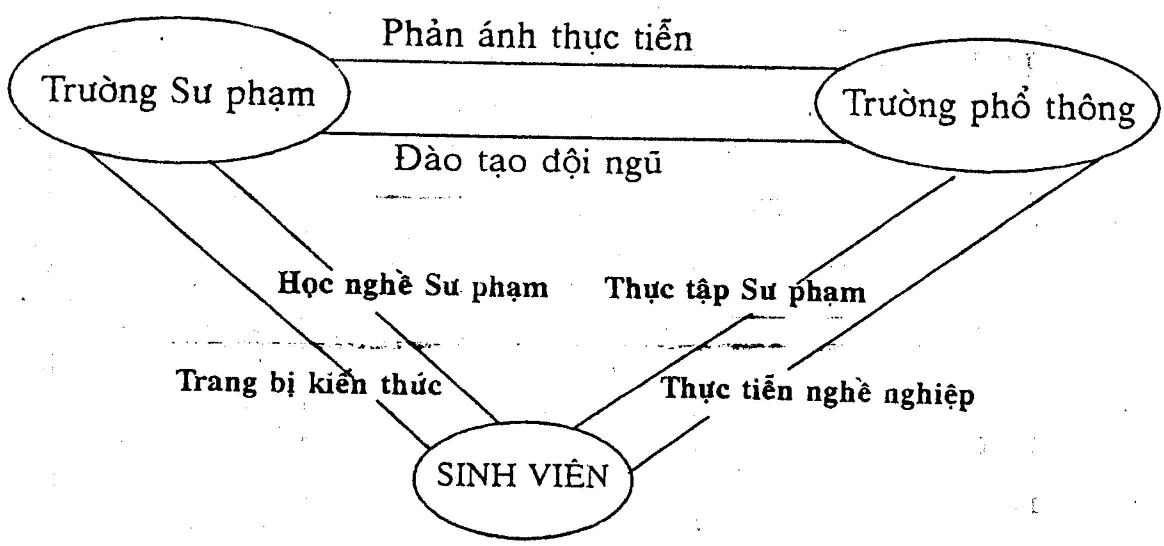
Những kiến thức về các sai lầm của HS khi giải toán, thực sự là một hiểu biết có tính nghề nghiệp cần được trang bị cho sinh viên sư phạm toán. Chúng tôi đề xuất ba con đường để đưa hiểu biết này đến sinh viên sư phạm toán.

* ***Con đường thứ nhất*** : Các nghiên cứu, đưa ra trong luận án được bổ sung xen vào trong chương trình các môn học liên quan tới chương trình toán ở PTTH. Giảng viên các môn này được trang bị các tài liệu cần thiết để khéo léo đưa vào chương trình dạy ở các thời điểm thích hợp. Có thể đưa các hiểu biết này vào trong chương trình ngoại khóa.

* ***Con đường thứ hai*** : Biên soạn thành một chuyên đề trong chương trình rèn luyện nghiệp vụ sư phạm cho sinh viên năm thứ ba.

* ***Con đường thứ ba*** : Đặt vấn đề cho sinh viên làm các điều tra về những dạng sai lầm của HS PTTH khi giải toán, từ đó hướng dẫn sinh viên làm niên luận, khóa luận về các vấn đề tỉ mỉ hơn. Đây là con đường gắn sinh viên với thực tế và tập dượt cho sinh viên nghiên cứu khoa học giáo dục.

Từ đó, chúng tôi nghĩ sẽ gắn chặt thêm ba đỉnh của "tam giác đào tạo sư phạm" (sơ đồ 10) :



KẾT LUẬN

Luận án làm sáng tỏ nhận định : Các sai lầm của HS khi giải toán là hiện tượng phổ biến hiện nay, kể cả HS chuyên toán. Các sai lầm này có thể hệ thống lại, chẳng hạn theo từng loại toán chủ yếu nhằm giúp GV dễ phát hiện và sửa chữa cho HS.

Luận án đã phân tích các nguyên nhân chủ yếu về kiến thức của HS gây nên các sai lầm khi giải toán và đề xuất ba phương châm chỉ đạo (tính kịp thời, tính chính xác, tính giáo dục) để việc sử dụng bốn biện pháp sư phạm nhằm hạn chế và sửa chữa sai lầm cho HS có hiệu quả.

Đặc biệt, luận án đã đưa ra 8 dấu hiệu đặc trưng của lời giải có sai lầm. Những dấu hiệu này là kiến thức phương pháp cần thiết để HS tự phát hiện lời giải có sai lầm và rất hữu ích khi HS làm các bài thi theo hình thức trắc nghiệm.

Với tổng kết kinh nghiệm của 20 năm dạy toán cho nhiều đối tượng, ở nhiều địa phương và qua thực nghiệm sư phạm, có thể bước đầu khẳng định tính khả thi, tính hiệu quả của các biện pháp được đề xuất.

Các kết quả nghiên cứu còn có thể phát triển theo nhiều hướng. Chẳng hạn, nghiên cứu các sai lầm của HS khi giải toán trong phân môn hình học hoặc trong các môn học khác ở trường PTTH.

Nội dung luận án có thể làm tài liệu tham khảo bổ ích cho GV toán, sinh viên khoa toán các trường sư phạm và các cán bộ nghiên cứu, quản lí dạy học môn toán.

Từ đó có thể kết luận rằng : giả thuyết khoa học là chấp nhận được và các nhiệm vụ nghiên cứu của luận án đã hoàn thành.

Luận án đã được trình bày ở tổ bộ môn Phương pháp giảng dạy khoa Toán, trường Đại học sư phạm Vinh. Một số kết quả đã được báo cáo ở các hội thảo khoa học của trường Đại học Sư phạm Vinh, hội thảo "Cải cách giảng dạy toán học trong bối cảnh cuộc cách mạng công nghệ thông tin" do Hội toán học Việt Nam và Hội tin học Việt Nam tổ chức.

CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ LIÊN QUAN TỚI LUẬN ÁN

1. Về những sai lầm thường gặp của học sinh phổ thông trung học khi giải toán, NCGD, 10/1995.
2. Đánh giá và kiểm tra kiến thức toán của học sinh như thế nào ? , NCGD, 8/1996.
3. Sai lầm của học sinh khi giải toán - một hiểu biết quan trọng của sinh viên sư phạm toán, Đại học và Giáo dục chuyên nghiệp, 8/1996.
4. Rèn luyện năng lực giải toán thông qua việc hướng dẫn học sinh tìm ra và tổng kết thuật toán, Hội thảo "Cải cách giảng dạy toán học trong bối cảnh cuộc cách mạng công nghệ thông tin", Hà Nội, 9/1995.
5. Phát huy tính tích cực của học sinh khi giảng dạy các khái niệm toán học, Hội nghị chuyên đề "Đổi mới phương pháp dạy học toán ở trường phổ thông trong giai đoạn hiện nay", Vinh, 12/1995.
6. Các sai lầm phổ biến khi giải toán (đồng tác giả), Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội, 1996.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

I. TIẾNG VIỆT

1. Nguyễn Văn Bàng, *Khắc phục tình trạng "luyện thi" toán,* NCGD, 4-1980, tr. 23-25.
2. Nguyễn Ngọc Bảo, *Một vài suy nghĩ về khái niệm tính tích cực, tính độc lập nhận thức và mối liên hệ giữa chúng,* Hội thảo : "Đổi mới giảng dạy, nghiên cứu tâm lí học và giáo dục học", Đại học Quốc gia Hà Nội, trường Đại học sư phạm, Khoa Tâm lí Giáo dục, H. 1995.
3. Nguyễn Thanh Bình, *Khả năng giao tiếp của sinh viên sư phạm trong thực tập tốt nghiệp*, NCGD, 12-1994, tr. 23.
4. Phạm Thanh Bình, *Đổi mới mạnh mẽ phương pháp dạy học ở trường phổ thông – yêu cầu cấp bách của sự nghiệp giáo dục hiện nay,* NCGD, 3-1995 tr. 10.
5. Nguyễn Mạnh Cảng, Vũ Dương Thụy, *Nghiên cứu xây dựng hệ thống bài tập về phương pháp dạy học toán,* NCGD, 11-1986 tr. 9-11.
6. Nguyễn Vĩnh Cận, Lê Thống Nhất, Phan Thanh Quang, *Sai lầm phổ biến khi giải toán,* NXB Giáo dục, H. 1996.
7. Phan Hữu Chân, Trần Lâm Hách, *Nhập môn lí thuyết tập hợp và lôgic*, NXB Giáo dục, H. 1977.
8. Nguyễn Hữu Châu, *Một số yêu cầu cơ bản đối với công tác đánh giá trong môn toán ở trường phổ thông,* NCGD, 8-1996, tr. 9.
9. Lê Hải Châu, *Các bài thi học sinh giỏi phổ thông trung học toàn quốc,* NXB Giáo dục, H. 1994.
10. Phan Đức Chính, Ngô Hữu Dũng, Hàn Liên Hải, *Đại số 10,* NXB Giáo dục, H. 1995.

11. Phan Đức Chính, Ngô Hữu Dũng, *Đại số và Giải tích 11,* NXB Giáo dục, H. 1991.

12. Phan Đức Chính, Ngô Hữu Dũng, Trần Kiều, Ngô Xuân Sơn, *Đại số 10,* Ban khoa học tự nhiên, NXB Giáo dục, H. 1994.

13. Phan Đức Chính, Ngô Hữu Dũng, Trần Kiều, Ngô Xuân Sơn, *Đại số 10,* Sách GV, Ban khoa học tự nhiên - kĩ thuật, NXB Giáo dục, H. 1994.

14. Phan Đức Chính, Vũ Dương Thụy, Đào Tam, Lê Thống Nhất, *Các bài giảng luyện thi môn toán,* tập 1, 2, 3, NXB Giáo dục, H. 1993-1995.

15. Hoàng Chúng, *Phương pháp dạy học toán học,* NXB Giáo dục, H. 1978.

16. Hoàng Chúng, *Rèn luyện khả năng sáng tạo toán học ở phổ thông,* NXB Giáo dục, H. 1969.

17. Hoàng Chúng, Lê Ngọc Anh, *Giáo trình Khái niệm tập hợp, lôgic, phương pháp thống kê,* NXB Giáo dục, H. 1977.

18. Nguyễn Gia Cốc, *Phương pháp dạy môn học,* NCGD, 7-1986, tr. 19-20.

19. Nguyễn Gia Cốc, *Yêu cầu của sản xuất lớn xã hội chủ nghĩa trong nông nghiệp đối với học vấn toán học của người lao động,* NCGD, 11-1977, tr. 4-8.

20. Nguyễn Nghĩa Dân, *Phương pháp giáo dục tích cực với mục tiêu nhân cách sáng tạo,* NCGD, 8-1996, tr. 5.

21. Hoàng Doanh, Nguyễn Việt Hải, Đặng Khắc Nhân, Nguyễn Duy Thanh, Nguyễn văn Thường, *Ôn tập toán 11,* NXB Giáo dục, H. 1994.

22. Phạm Tất Dong, *Nhân cách thầy giáo,* Hội thảo : "Đổi mới giảng dạy, nghiên cứu tâm lí học và giáo dục học", Đại học Quốc gia Hà Nội, trường Đại học sư phạm, Khoa Tâm lí Giáo dục, H. 1995.

23. Phạm Tất Dong, *Cần nâng cao năng lực kĩ thuật cho học sinh phổ thông,* NCGD, 11-1977, tr. 27-30.

24. Ngô Hữu Dũng, ***Đại số 9,*** NXB Giáo dục, H. 1989.
25. Ngô Hữu Dũng, Trần Kiều, ***Đại số 9,*** NXB Giáo dục, H. 1994.
26. Quang Dương, ***Nhìn lại 20 năm giảng dạy tâm lí học và giáo dục học tại các trường sư phạm ở phía nam,*** Thông tin KHGD, **49** (1995), tr. 46–49.
27. Phạm Văn Đồng, ***Phương pháp dạy học phát huy tính tích cực – một phương pháp vô cùng quý báu,*** NCGD, 12–1994, tr. 1–2.
28. Phạm Văn Đồng, ***Thư gửi các bạn trẻ yêu toán,*** Toán học và tuổi trẻ, 11–1967, tr. 1.
29. Phạm Minh Hạc, ***Phương hướng tiếp cận hoạt động nhân cách – một cơ sở lí luận của phương pháp dạy học hiện đại,*** Thông tin KHGD, **25** (1991), tr. 7–10.
30. Phạm Minh Hạc, Lê Khanh, Trần Trọng Thủy, ***Tâm lí học,*** tập 1, NXB Giáo dục, H. 1988.
31. Phạm Minh Hạc, Lê Khanh, Trần Trọng Thủy, Phạm Hoàng Gia, ***Tâm lí học,*** tập 2, NXB Giáo dục, H. 1989.
32. Hàn Liên Hải, Phan Huy Khải, Lê Tất Tôn, Đặng Quang Viễn, ***Toán bồi dưỡng học sinh, Đại số 10,*** NXB Hà Nội, 1994.
33. Hàn Liên Hải, Phan Huy Khải, Đào Ngọc Nam, Nguyễn Đạo Phương, Lê Tất Tôn, Đặng Quang Viễn, ***Toán bồi dưỡng học sinh, Nguyên hàm và tích phân 12,*** NXB Hà Nội, 1996.
34. Trần Văn Hạo, Phan Trương Dần, Hoàng Mạnh Để, Trần Thành Minh, ***Đại số 10,*** NXB Giáo dục, H. 1992.
35. Trần Văn Hạo, Phan Trương Dần, Nguyễn Văn Dự, Cam Duy Lễ, ***Giải tích 12,*** NXB Giáo dục, H. 1992.
36. Trần Văn Hạo, Phan Trương Dần, Trần Đức Huyên, ***Hướng dẫn ôn luyện thi tốt nghiệp phổ thông trung học và luyện thi Đại học, Đại số và Giải thích,*** NXB Giáo dục, H. 1993.

37. Trần Văn Hạo, Phan Trương Dần, Phan Thanh Quang, *Bài tập đại số và giải tích 11,* tập 1, 2. NXB Giáo dục, H. 1991.

38. Đỗ Đình Hoan, *Một số vấn đề cơ bản của xu thế đổi mới phương pháp dạy học ở tiểu học,* NCGD, 4 - 1996, tr. 4.

39. Phạm Văn Hoàn, Trần Thúc Trình, *Rèn luyện con người qua dạy toán,* NCGD, 10-1975, tr. 17-20.

40. Phạm Văn Hoàn, Nguyễn Gia Cốc, Trần Thúc Trình, *Giáo dục học môn toán,* NXB Giáo dục, H. 1981.

41. Trần Bá Hoành, *Bàn tiếp về dạy học lấy học sinh làm trung tâm,* Thông tin KHGD **49** (1995), tr. 22-27.

42. Nguyễn Thái Hòe, *Tìm tòi lời giải các bài toán và ứng dụng vào việc dạy toán, học toán,* Công ty sách - thiết bị trường học Nghệ tĩnh, 1989.

43. Nguyễn Thái Hòe, *Rèn luyện tư duy qua việc giải bài tập toán,* NXB Giáo dục, H. 1995.

44. Đỗ Mạnh Hùng, *Thống kê trong khoa học giáo dục,* Trường ĐHSP Vinh, 1995.

45. Nguyễn Thế Hùng, *Các phương pháp tính tích phân,* Trường Cao đẳng sư phạm thành phố Hồ Chí Minh, 1987.

46. Nguyễn Sinh Huy, *Tiếp cận xu thế đổi mới phương pháp dạy học trong giai đoạn hiện nay,* NCGD, 3-1995, tr. 4-9.

47. Trần Khánh Hưng, *Tình hình nắm kiến thức cơ bản và kĩ năng giải toán của học sinh phổ thông trung học,* NCGD, 8-1985, tr. 11-12.

48. Trần Đức Huyên, *Phương pháp tích phân 12,* NXB Trẻ, 1994.

49. Phan Huy Khải, *Toán nâng cao cho HS lớp 11 (Đại số và lượng giác),* NXB Giáo dục, H. 1993.

50. Phan Huy Khải, *500 bài toán chọn lọc về bất đẳng thức,* NXB Hà Nội, 1994.

51. Phan Huy Khải, *Phương pháp đồ thị để biện luận hệ có tham số,* NXB Giáo dục, H. 1994.

52. Nguyễn Bá Kim, *Chính xác hóa một số khái niệm liên quan đến dạy học giải quyết vấn đề,* NCGD, 9-1991, tr. 2-3.

53. Nguyễn Bá Kim, Vũ Dương Thụy, *Phương pháp dạy học môn toán,* tập 1, NXB Giáo dục, H. 1992.

54. Nguyễn Bá Kim, Đinh Nho Chương, Nguyễn Mạnh Cảng, Vũ Dương Thụy, Nguyễn Văn Thường, *Phương pháp dạy học môn toán,* tập 2, NXB Giáo dục, H. 1994.

55. Krutecxki V.A., *Những cơ sở của tâm lí học sư phạm,* tập 1, 2, NXB Giáo dục, H. 1980-1981.

56. Hoàng Kỳ, Lê Thống Nhất, Lê Quốc Hán, *Sổ tay ôn thi toán lớp 12,* Hội toán học Nghệ Tĩnh, 1986.

57. Nguyễn Kỳ, *Học toán theo phương pháp tích cực,* NCGD, 7-1994, tr. 26-28.

58. *Kỷ yếu Hội nghị chuyên đề "Đổi mới phương pháp dạy học toán ở trường phổ thông trong giai đoạn hiện nay*, Vinh, 1996.

59. Ngô Thúc Lanh, Vũ Tuấn, Ngô Xuân Sơn, *Đại số và Giải tích 11,* NXB Giáo dục, H. 1991.

60. Ngô Thúc Lanh, Vũ Tuấn, Ngô Xuân Sơn, *Bài tập đại số và giải tích 11,* NXB Giáo dục, H. 1992.

61. Ngô Thúc Lanh, Vũ Tuấn, Trần Anh Bảo, *Đại số 10,* NXB Giáo dục, H. 1990.

62. Ngô Thúc Lanh, Vũ Tuấn, Trần Anh Bảo, *Bài tập đại số 10,* NXB Giáo dục, H. 1992.

63. Nguyễn Văn Mậu, *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình,* NXB Giáo dục, H. 1994.

64. Lưu Xuân Mới, *Phương pháp nghiên cứu khoa học,* Trường cán bộ quản lí giáo dục Trung ương I, H. 1995.

65. Lê Thống Nhất, *Một số sai lầm trong các kỳ thi vào đại học,* Khoa học và đời sống, 15-6-1979, tr. 6.

66. Lê Thống Nhất, *Về những sai lầm thường gặp của học sinh phổ thông trung học khi giải toán,* NCGD, 10-1995, tr. 23.
67. Lê Thống Nhất, *Đánh giá và kiểm tra kiến thức toán của học sinh như thế nào ?,* NCGD, 8-1996, tr. 11-12.
68. Lê Thống Nhất, *Sai lầm của HS khi giải toán - một hiểu biết quan trọng của sinh viên sư phạm toán,* ĐH và GDCN, 8-1996, tr. 11-12.
69. Lê Thống Nhất, *Hướng dẫn ôn tập môn toán,* tập 1, ĐHSP Vinh, khoa toán, 1983.
70. Lê Thống Nhất, *Rèn luyện năng lực giải toán thông qua việc hướng dẫn học sinh tìm ra và tổng kết thuật toán,* Hội thảo "Cải cách giảng dạy toán học trong bối cảnh cuộc cách mạng công nghệ thông tin", Hà Nội, 9-1995.
71. Nguyễn Nhung, Lê Thống Nhất, Trần Mạnh Hùng, *Ôn luyện thi môn toán lớp 9,* NXB Giáo dục, H. 1996.
72. Ôkôn V, *Những cơ sở của việc dạy học nêu vấn đề,* NXB Giáo dục, H. 1976.
73. Petrovski A.V., (Đỗ Văn dịch), *Tâm lí học lứa tuổi và tâm lí học sư phạm,* tập 2, NXB Giáo dục, H. 1982.
74. Pôlya G., (Hoàng Chúng, Lê Đình Phi, Nguyễn Hữu Chương dịch), *Giải một bài toán như thế nào ?,* NXG Giáo dục, H. 1975.
75. Pôlya G., (Hoàng Chúng, Lê Đình Phi, Nguyễn Hữu Chương, Hà Sĩ Hồ dịch), *Toán học và những suy luận có lý,* NXB Giáo dục, H. 1995.
76. Nguyễn Ngọc Quang, *Lý luận dạy học đại cương,* tập 1, 2, Trường cán bộ quản lý giáo dục Trung ương, H. 1986-1989.
77. Nguyễn Ngọc Quang, *Dạy học - Con đường hình thành nhân cách,* Trường cán bộ quản lí giáo dục Trung ương I, H. 1990.
78. Trần Hồng Quân, *Cách mạng về phương pháp sẽ đem lại bộ mặt mới, sức sống mới cho giáo dục ở thời đại mới,* NCGD, 1-1995, tr. 1.

79. *Quy định về mục tiêu và kế hoạch đào tạo của trường phổ thông trung học,* (Ban hành theo quyết định 329 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục), 1986.

80. Rudavin G.I., Rưxahbaep A.. Sliakhin G., (tài liệu dịch), *Một số quan điểm triết học toán học,* NXB Giáo dục, H. 1979.

81. Ngô Xuân Sơn, Nguyễn Vũ Lương, Nguyễn Văn Mậu, Đỗ Mạnh Môn, Nguyễn Đăng Phất, Nguyễn Đình Trí (hiệu đính), *Ôn luyện thi môn toán,* tập 1, NXB Giáo dục, H. 1994.

82. Đỗ Đức Thái, *Những bài toán chọn lọc cho trường chuyên lớp chọn,* NXB Hà Nội, H. 1993.

83. Nguyễn Vũ Thanh, Ngô Tấn Lực, *Chuyên đề bồi dưỡng lớp chuyên, chọn toán cấp II và III, Đại số và Giải tích,* tập 1, NXB Tiền Giang, 1992.

84. Lê Đình Thịnh, Trần Hữu Phúc, Nguyễn Cảnh Nam, *Mẹo và bẫy trong các đề thi toán,* tập 2, NXB Đại học và trung học chuyên nghiệp, H. 1992.

85. Trần Trọng Thủy, *Cơ chế mới trong việc rèn luyện trí nhớ,* NCGD, 5-1991, tr. 5-6.

86. Nguyễn Cảnh Toàn, *Tập cho học sinh giỏi toán làm quen dần với nghiên cứu toán học,* NXB Giáo dục, H. 1992.

87. Nguyễn Cảnh Toàn, *Soạn bài trên lớp theo tinh thần dẫn dắt học sinh sáng tạo tự giành lấy kiến thức,* NCGD, 1 + 2 - 1995, tr. 9-10, 15-16.

88. Nguyễn Cảnh Toàn, *Vấn đề thu hút học sinh giỏi vào sư phạm,* NCGD, 12 - 1993, tr. 1.

89. Nguyễn Cảnh Toàn, *Thế nào là hiện đại trong dạy và học toán,* NCGD, 10-1995, tr. 20.

90. Nguyễn Cảnh Toàn, *Về bộ môn "Phương pháp giảng dạy" ở các trường sư phạm,* NCGD, 8-1996, tr. 6.

91. Trần Thúc Trình, *Dạy suy nghĩ, dạy bộ óc qua môn toán,* NCGD, 7-1974, tr. 8-12.

92. Trần Thúc Trình, *Nâng cao chất lượng học tập của học sinh yếu kém về môn toán ở bậc phổ thông trung học,* NCGD, 2-1991, tr. 15-16.

93. Trần Thúc Trình, *Nhìn lại lịch sử cải cách nội dung và phương pháp dạy học toán ở trường phổ thông trên thế giới trong thế kỉ 20,* Thông tin KHGD, **34** (1992), tr. 50-58.

94. Thái Duy Tuyên, ***Một số vấn đề hiện đại lí luận dạy học,*** Viện KHGD Việt Nam, H. 1992.

95. ***Từ điển Tiếng Việt,*** Viện KHXH Việt Nam, Viện Ngôn ngữ học, Trung tâm từ điển ngôn ngữ, H. 1992.

II. TIẾNG NGA

Cơ sở hiện đại của GT toán phổ thông

96. Виленкин Н.Я., Дуничев К.И., Столяр А.А., *Современные основы школьного курса математики*, Просвещение, Москва, 1980.

97. Гнеденко Б.В., *Математика и математическое образование в современном мире*, Просвещение, Москва, 1985.

98. Гнеденко Б.В., *О Математических Способнстях и их развитии*, Математика в школе, Москва, 1 - 1982, стр. 31-34.

99. Демидович Б.П., *Сборник задач и упражнений по математическому анализу,* Наука, Москва, 1969.

100. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х., *Пособие по математике для поступающих в вузы*, Наука, Москва, 1976.

101. Мельников И.И., Сергеев И.Н., *Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах*, Московского университета, 1990.

102. Нестеренко Ю.В., Олехник С.Н., Потапов М.К., *Задачи вступительных экзаменов по математике*. Наука, Москва. 1983.

Ptích Sai lầm   Thi vào đại học

103. Павлович В.С., *Анализ ошибок абитуриентов по математике*, Вища школа, Киев, 1975.

104. Пойа Д., *Обучение через задачи*, Мат. в школе, 3-1970, стр. 89–91.

105. Семушин А.Д., Суворова С.Б. (сост.), *Из опыта преподавания математики в школе*, Просвещение, Москва, 1978. từ kinh nghiệm dạy ở trường PT:

106. Столяр А.А., Каплан Б.С., Рогановский Н.М., Рузин Н.К., *Практикум по педагогике математики*, высшэйшая школа, Минск, 1978.

107. Столяр А.А., *Педагогика математики*, Высшэйшая школа, Минск, 1969.

108. Фихтенгольц Г.М., *Основы математического анализа*, Наука, Москва, 1968.

109. Фридман А.М., Турецкий Е.Н., Стеценко В.Я., *Как научиться решать задачи*, Просвещение, 1979. Nghiên cứu lời giải nhỏ

110. Шенфильд Дэк., *Математическая логика*, Наука, Москва, 1975. log

111. Эрдниев П.М., *Преподавание математики в школе*, Просвещение, Москва, 1978. dạy toán ở PT

112. Яглом А.М., Яглом И.М., *Вероятность и информация*, Наука, Москва, 1973.

Xác suất   tin học

PHỤ LỤC

KINH NGHIỆM THỰC TIỄN CỦA TÁC GIẢ

Ngoài thực nghiệm cụ thể ở lớp 10D1 trường PTTH Chu Văn An (Hà Nội), chúng tôi đã giảng dạy 20 năm liên tục cho sinh viên khoa toán, HS chuyên toán ở trường Đại học sư phạm Vinh, góp phần đào tạo nhiều GV dạy toán, nhiều học sinh giỏi môn toán của Quốc gia.

Dưới đây là một số ý kiến của các trường học, sở GD và ĐT về hiệu quả của các biện pháp sư phạm mà chúng tôi đã thực hiện trong thời gian qua.

a) Nhận xét của Sở Giáo dục và Đào tạo Nghệ An :

Đồng chí Lê Thống Nhất là cán bộ giảng dạy khoa Toán trường Đại học sư phạm Vinh. Đồng chí Nhất là một cán bộ có nhiều kinh nghiệm trong lĩnh vực giảng dạy toán PTTH. Trong thời gian học tập và nghiên cứu khoa học, đồng chí đã nhiều lần giúp đỡ Sở chúng tôi trong việc bồi dưỡng GV.

Các chương trình bồi dưỡng của đồng chí Nhất rất có hiệu quả cho GV toán trong tỉnh.

Các kết quả nghiên cứu của đồng chí Nhất có tính thực tiễn và hiệu quả tốt cho việc nâng cao chất lượng dạy và học toán phổ thông trung học.

Chúc đồng chí Lê Thống Nhất thành công trên con đường học tập, giảng dạy và nghiên cứu khoa học.

Vinh, ngày 02 tháng 10 năm 1996
Phó Giám đốc Sở Giáo dục và Đào tạo Nghệ An

PHẠM QUÝ HÙNG

b) Nhận xét của hiệu trưởng Marie Curie (Hà Nội) về quá trình giảng dạy và nghiên cứu của nghiên cứu sinh Lê Thống Nhất.

Từ tháng 1 năm 1993, đồng chí Lê Thống Nhất đã đặt vấn đề : tham gia giảng dạy tại trường nhằm mục đích tìm hiểu thực tế học và giải toán của học sinh PTTH, từ đó phục vụ cho đề tài nghiên cứu khoa học.

Trong quá trình giảng dạy với mục đích trên, chúng tôi nhận thấy :

1) Đồng chí Lê Thống Nhất có tay nghề dạy học Toán vững vàng, được sự tín nhiệm của HS và phụ huynh HS.

2) Mục tiêu dạy học đạt kết quả tốt :

- Rèn luyện cho HS mục đích, động cơ học tập đúng đắn, phương pháp học toán có hiệu quả.

- Rèn luyện cho HS hạn chế và sửa chữa được các sai lầm khi giải toán. Tạo cho HS nhiều thói quen tốt khi giải toán. Từ đó HS học tập môn toán say mê và có hiệu quả.

- Góp phần phát hiện, bồi dưỡng được nhiều HS giỏi cho trường như các em : Nguyễn Thái Hà, Trần Minh Thùy, Nguyễn Tường Vân, Nguyễn Thanh Tùng, Đinh Trung Hằng (lớp 10), Nguyễn Tuấn Hải, Trần Cao Tùng (lớp 11, 12) đã đạt giải toán thành phố Hà Nội. Đặc biệt em Nguyễn Thái Hà sau đó hai năm đã giành Huy chương vàng thi vô địch toán quốc tế lần thứ 37 tại Ấn Độ năm 1996.

- Góp phần cho HS lớp 12 của trường liên tục đỗ tốt nghiệp phổ thông trung học 100%, thi đỗ vào các trường Đại học trên 98%.

Các biện pháp dạy học mà đồng chí Lê Thống Nhất đã áp dụng thành công tại trường sẽ giúp ích cho nhiều GV toán.

Xin cám ơn mọi đóng góp của đồng chí Lê Thống Nhất. Chúc đồng chí thành công trên con đường giảng dạy toán và nghiên cứu.

Hà Nội, ngày 20 tháng 09 năm 1996.
Hiệu trưởng

NGUYỄN XUÂN KHANG

c) Nhận xét của hiệu trưởng trường PTTH Chu Văn An (Hà Nội) về quá trình dạy toán thực nghiệm cho đề tài nghiên cứu của đồng chí Lê Thống Nhất.

Được sự giới thiệu của Ông Nguyễn Kim Hoãn, Giám đốc Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, đồng chí Lê Thống Nhất đã tham gia giảng dạy môn Toán cho HS lớp 10D1 (lớp chuyên toán mở lại năm đầu tiên) của trường chúng tôi năm học 1995-1996.

Vì tuyển sinh năm đầu nên chất lượng HS còn chưa tốt (điểm chuẩn 23/40, kém điểm chuẩn của chuyên toán Hà Nội - Amsterdam là 7 điểm). Tuy nhiên, dưới sự lãnh đạo của Nhà trường, với sự đầu tư công sức của thầy và trò, đặc biệt là với các biện pháp dạy học thích hợp của đồng chí Nhất nên lớp 10D1 đã có tiến bộ tốt về môn toán.

Đồng chí Lê Thống Nhất đã tận tụy với HS, được nhiều bậc cha mẹ HS tin yêu. Các bài giảng của đồng chí Nhất đã có hiệu quả và tác dụng cho HS trên nhiều mặt : phương pháp học toán và giải toán, phương pháp kiểm tra lời giải và diễn đạt chính xác, thói quen phân tích đề toán...

Thành tích cụ thể trong năm học 1995-1996 đã được chứng minh bằng kết quả thi HS giỏi thành phố Hà Nội : em Ngô Huy Hoàng lớp 10D1 đạt giải nhì môn toán chuyên, ngoài ra đồng chí Nhất còn giúp dỡ đội tuyển toán khối 10 của trường đạt thêm 2 giải nhì môn toán dành cho các lớp không chuyên.

Qua một năm theo dõi tình hình và kết quả giảng dạy, chúng tôi nhận thấy : đồng chí Nhất là người GV có nhiều năng lực và phẩm chất sư phạm tốt, là cán bộ nghiên cứu biết kết hợp lý luận và thực tiễn, những biện pháp dạy học mà đồng chí Nhất đã thực hiện có hiệu quả tốt cho HS. Chúng tôi đánh giá tốt những đóng góp của đồng chí cho sự nghiệp dạy học toán của trường và mong đồng chí tiếp tục cộng tác lâu dài với chúng tôi. Chúc đồng chí thành công trên mọi mặt công tác.

Hà Nội, ngày 23 tháng 09 năm 1996
Hiệu trưởng

PHẠM ĐÌNH ĐẬU

Nhiều kinh nghiệm của tác giả đã được giới thiệu trong các cuốn sách tham khảo cho GV và HS ([6], [14], [56], [69], [71]).