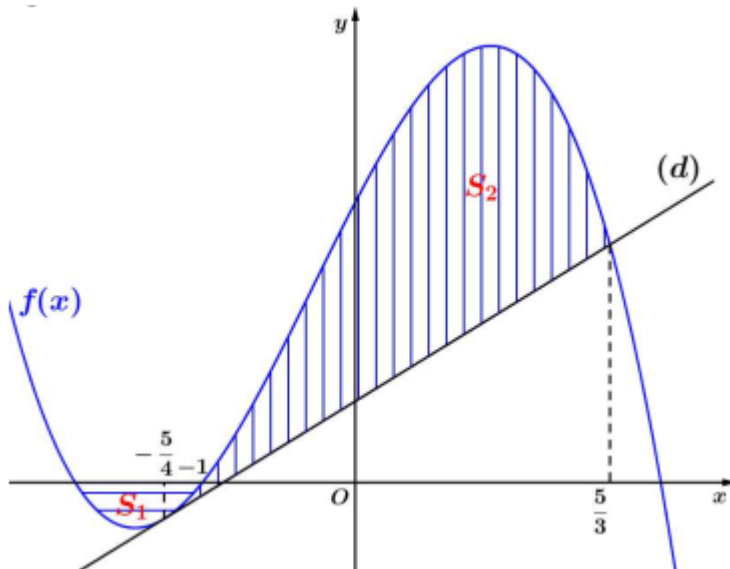


Câu 70. (THPT Trần Nhân Tông – Quảng Ninh 2022) Cho hàm số bậc ba

$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt trong đó có 2 điểm có hoành độ lần lượt là $x = -1, x = 2$. Đường thẳng (d) tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = -\frac{5}{4}$ cắt đồ thị (C) có hoành độ $x = \frac{5}{3}$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là các diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và trục tung (như hình vẽ bên). Khi tỉ số $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì $19a - b$ bằng



A. 459.

B. 435.

C. 705.

D. 775.

Lời giải

Từ hình vẽ ban đầu ta suy ra: $f(x) = -\frac{1}{2}(x-a)(x+1)(x-2)(1)$

Gọi phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $(d): y = mx + n$, từ đó ta suy ra:

$$f(x) - (mx + n) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{4}\right)^2\left(x - \frac{5}{3}\right) \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{4}\right)^2\left(x - \frac{5}{3}\right) + mx + n(2), \text{ so sánh hệ số}$$

chứa x^2 trong hai cách biểu diễn hàm $f(x)$ giữa (1) và (2) ta suy ra $a = -\frac{11}{6}$ tức

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{6}\right)(x+1)(x-2).$$

$$\text{Khi đó ta suy ra: } \begin{cases} f'\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{59}{96} \\ f\left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{91}{384} \end{cases} \Rightarrow (d): y = \frac{59}{96}\left(x + \frac{5}{4}\right) - \frac{91}{384} \Rightarrow (d): y = g(x) = \frac{59}{96}x + \frac{204}{384}$$

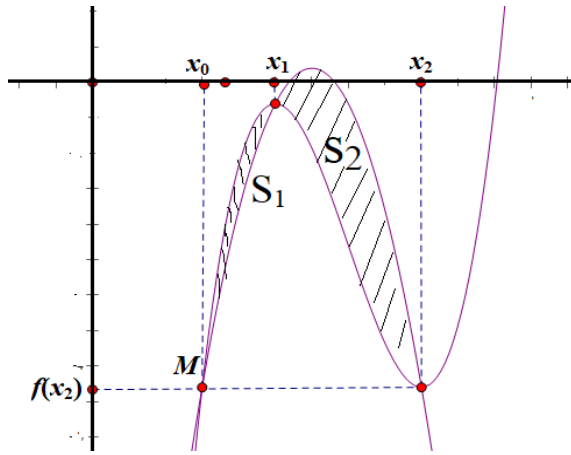
Suy

ra:

$$\begin{cases} S_1 = \int_{\frac{11}{6}}^{-1} |f(x)| dx = \int_{\frac{11}{6}}^{-1} \left| -\frac{1}{2} \left(x + \frac{11}{6} \right) (x+1)(x-2) \right| dx = \frac{5125}{31104} \\ S_2 = \int_{-\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}} |f(x) - g(x)| dx = \int_{-\frac{5}{4}}^{\frac{5}{3}} \left| -\frac{1}{2} \left(x + \frac{11}{6} \right) (x+1)(x-2) - \left(\frac{59}{96}x + \frac{204}{384} \right) \right| dx = \frac{1500625}{497664} \end{cases} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{656}{12005}$$

Vậy $a = 656, b = 12005$ tức $19a - b = 459$.

Câu 71. (THPT Hoàng Hoa Thám - Quảng Ninh - 2022) Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên dưới. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai điểm cực trị thỏa mãn $x_2 = x_1 + 2$ và $f(x_1) - 3f(x_2) = 0$ và đồ thị luôn đi qua $M(x_0; f(x_0))$ trong đó $x_0 = x_1 - 1$, $g(x)$ là hàm bậc hai có đồ thị đi qua hai điểm cực trị và M . $x_1 = x_0 + 1$. Tính tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$ (S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được tạo bởi đồ thị hai hàm số $f(x), g(x)$ như hình vẽ)



A. $\frac{5}{32}$.

B. $\frac{7}{33}$.

C. $\frac{4}{29}$.

D. $\frac{6}{35}$.

Lời giải

Chọn A

Nhận thấy hình phẳng trên có diện tích không đổi khi ta tịnh tiến đồ thị sang trái sao cho $x_0 = 0$.

Khi đó ta có $x_1 = 1, x_2 = 3$. Xét hàm $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $g(x) = mx^2 + nx + p$.

Vì $x_1 = 1, x_2 = 3$ là các điểm cực trị nên ta có:
$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 27a + 6b + c = 0 \end{cases} \quad (1).$$

Hơn nữa, ta có $f(1) = 3f(3) \Leftrightarrow a + b + c + d = 81a + 27b + 9c + 3d \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra
$$\begin{cases} b = -6a \\ c = 9a \\ d = 2a \end{cases}.$$

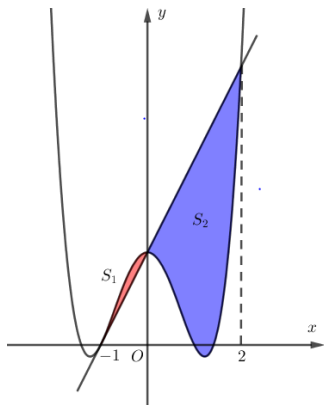
Mặt khác dựa vào đồ thị ta thấy:
$$\begin{cases} g(0) = f(0) \\ g(1) = 3g(3) \\ g(0) = g(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2a \\ m + n + p = 6a \\ 9m + 3n + p = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2a \\ n = 6a \\ p = 2a \end{cases}.$$

Suy ra: $f(x) = a(x^3 - 6x^2 + 9x + 2)$, $g(x) = a(-2x^2 + 6x + 2)$.

Khi đó ta có: $S_1 = |a| \cdot \int_0^1 |x^3 - 4x^2 + 3x| dx = \frac{5}{12}|a|$, $S_2 = |a| \int_1^3 |x^3 - 4x^2 + 3x| dx = \frac{8}{3}|a|$.

Do đó, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{32}$.

Câu 72. (THPT Hoàng Hoa Thám - Quảng Ninh - 2022) Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C) . Biết $f(-1) = 0$. Tiếp tuyến d tại điểm có hoành độ $x = -1$ của (C) cắt (C) tại 2 điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2. Gọi $S_1; S_2$ là diện tích hình phẳng (phần gạch chéo trong hình vẽ). Tính S_2 , biết $S_1 = \frac{401}{2022}$.



A. $\frac{2005}{2022}$.

B. $\frac{12431}{2022}$.

C. $\frac{2807}{1011}$.

D. $\frac{5614}{1011}$.

Lời giải

Chọn D

Tiếp tuyến d tại điểm có hoành độ $x = -1$ của (C) có phương trình

$$y = f'(-1)(x+1) = (-4a-2b)(x+1)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $ax^4 + bx^2 + c = (-4a-2b)(x+1)$

Phương trình này có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 2$ nên ta được
$$\begin{cases} c = -4a - 2b \\ 16a + 4b + c = -12a - 6b \end{cases} \quad (1)$$

Mặt khác,

$$S_1 = \int_{-1}^0 [ax^4 + bx^2 + c - (-4a - 2b)(x+1)] dx = \frac{401}{2022}$$

$$\Leftrightarrow \frac{11a}{5} + \frac{4b}{3} + c = \frac{401}{2022} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \begin{cases} a = \frac{2005}{2022} \\ b = -\frac{2005}{674} \\ c = \frac{2005}{1011} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2005}{2022}x^4 - \frac{2005}{674}x^2 + \frac{2005}{1011}$$

$$\text{Vậy: } S_2 = \int_0^2 \left[\left(-4 \cdot \frac{2005}{2022} + 2 \cdot \frac{2005}{674} \right) (x+1) - \left(\frac{2005}{2022}x^4 - \frac{2005}{674}x^2 + \frac{2005}{1011} \right) \right] dx = \frac{5614}{1011}.$$

Câu 73. (Sở Hậu Giang 2022) Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 2x$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 - 2x$ với $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba cực trị là $-1; 2$ và 3 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng.

A. $\frac{32}{3}$.

B. $\frac{71}{9}$.

C. $\frac{71}{6}$.

D. $\frac{64}{9}$.

Lời giải

Chọn B

$$y = h(x) = f(x) - g(x)$$

$$\Rightarrow h'(x) = f'(x) - g'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + 2 - 3mx^2 - 2nx + 2.$$

$$\Rightarrow h'(x) = 4ax^3 + (3b - 3m)x^2 + (2c - 2n)x + 4$$

Do hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ có ba cực trị là $-1; 2$ và 3 nên $h'(x)$ có dạng

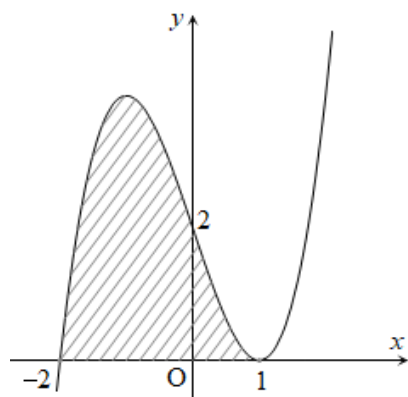
$$h'(x) = 4a(x+1)(x-2)(x-3).$$

$$h'(0) = 4 \Rightarrow 4a \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-3) = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$$

$$f'(x) - g'(x) = \frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3)$$

$$\text{Vậy } S = \int_{-1}^3 |f'(x) - g'(x)| dx = \int_{-1}^3 \left| \frac{2}{3}(x+1)(x-2)(x-3) \right| dx = \frac{71}{9}.$$

Câu 74. (Sở Hậu Giang 2022) Tính diện tích S của phần hình phẳng gạch sọc (bên dưới) giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và trục hoành, biết rằng (C) cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ -2 và 1 , đồng thời hàm số đạt cực trị tại $x = 1$.



A. $S = \frac{31}{5}\pi$.

B. $S = \frac{27}{4}$.

C. $S = \frac{19}{3}$.

D. $S = \frac{31}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 1$ nên qua điểm $x = 1$ hàm số đổi chiều biến thiên.

Lại có hàm số cắt trục hoành tại điểm $x = 1$ nên $x = 1$ là nghiệm kép của phương trình $f(x) = 0$

Suy ra hàm số có dạng $y = k(x + 2)(x - 1)^2$.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 2 hay đồ thị hàm số đi qua điểm $M(0; 2) \Rightarrow k = 1$.

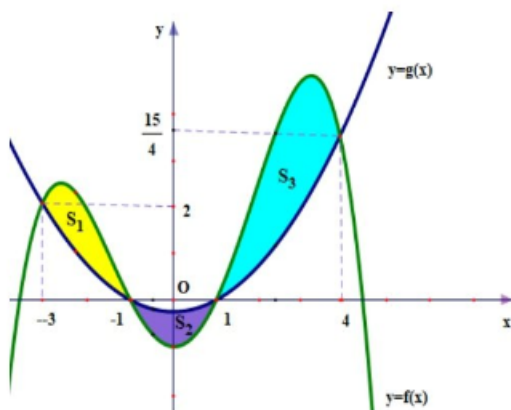
Do đó $y = (x + 2)(x - 1)^2 \Leftrightarrow y = x^3 - 3x + 2$.

Như vậy diện tích hình phẳng cần tính là

$$S = \int_{-2}^1 |f(x)| dx = \int_{-2}^1 |x^3 - 3x + 2| dx = \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx = \frac{27}{4}.$$

(do $y \geq 0$ với mọi x thuộc $[-2; 1]$).

Câu 75. (THPT Trần Quốc Tuấn - Quảng Ngãi - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-3; 4]$. Biết rằng diện tích S_1, S_2, S_3 của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và Parabol $(P): y = g(x) = ax^2 + bx + c$ (như hình vẽ) lần lượt là k, l, m .



Khi đó $\int_{-3}^4 f(x)dx$ bằng

A. $k+l-m+\frac{37}{5}$. B. $k-l-m+\frac{35}{6}$.

C. $-k+l-m+\frac{35}{6}$. D. $k-l+m+\frac{35}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Vì $(P): y = g(x) = ax^2 + bx + c$ đi qua 3 điểm $(-3; 2), (-1; 0), (1; 0)$

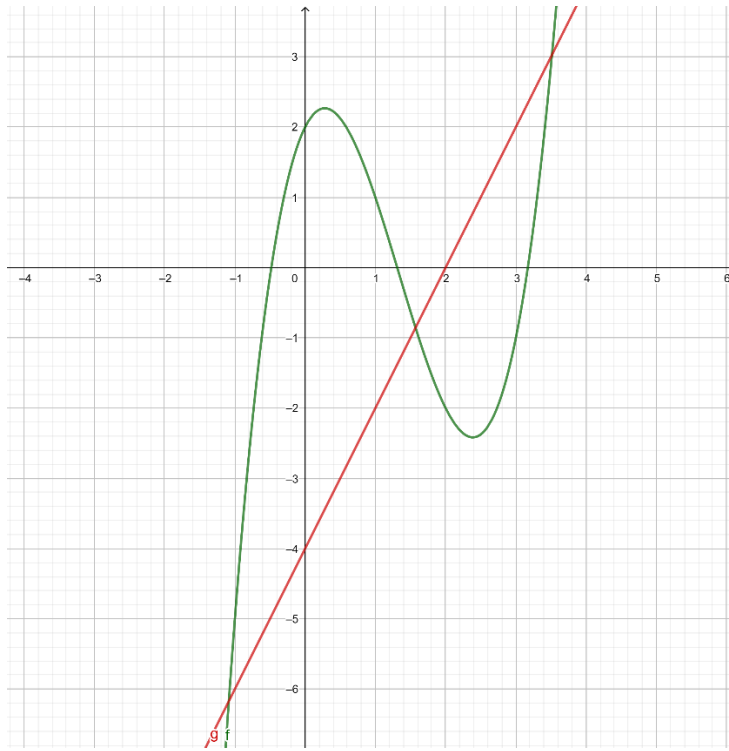
$$\Rightarrow \begin{cases} 9a - 3b + c = 2 \\ a - b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 0 \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \int_{-3}^4 f(x)dx &= \int_{-3}^4 (f(x) - g(x))dx + \int_{-3}^4 g(x)dx \\ &= \int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x))dx + \int_{-1}^1 (f(x) - g(x))dx + \int_1^4 (f(x) - g(x))dx + \int_{-3}^4 g(x)dx = k - l + m + \frac{35}{6}. \end{aligned}$$

Câu 76. (THPT Ngũ Hành Sơn - Đà Nẵng 2022) Cho hai hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$ và

$y = g'(x)$ (có đồ thị như hình vẽ dưới đây). $g(0) = 2$ và $\int_2^3 [g(x) - f(x)]dx = \frac{5}{12}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$



A. $S = \frac{162}{35}$.

B. $\frac{37}{6}$.

C. $\frac{37}{12}$.

D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = 2x - 4 \Rightarrow g(x) = x^2 - 4x + C$

Mà $g(0) = 2 \Rightarrow C = 2$ hay $g(x) = x^2 - 4x + 2$

$f(2) = -2 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + 2 = -2$ (1).

$f(3) = -1 \Rightarrow 27a + 9b + 3c + 2 = -1$ (2).

$$\int_2^3 [g(x) - f(x)] dx = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \int_2^3 g(x) dx - \int_2^3 f(x) dx = \frac{5}{12}$$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 f(x) dx = -\frac{25}{12} \Leftrightarrow \left(\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + 2x \right) \Big|_2^3 = -\frac{25}{12}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{65}{4}a + \frac{19b}{3} + \frac{5c}{2} + 2 = -\frac{25}{12} \quad (3)$$

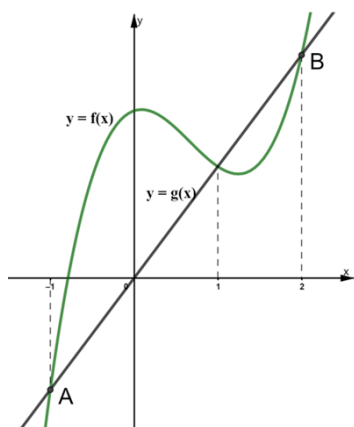
Từ (1), (2), (3) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 8a + 4b + 2c + 2 = -2 \\ 27a + 9b + 3c + 2 = -1 \\ \frac{65}{4}a + \frac{19b}{3} + \frac{5c}{2} + 2 = -\frac{25}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 2 \end{cases}.$$

Suy ra

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$S = \int_0^3 |x^3 - 5x^2 + 6x| dx = \frac{37}{12}.$$

Câu 77. (Sở Cà Mau 2022) Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + \frac{1}{3}x + c$ và đường thẳng $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Biết $AB = 5$, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1; x = 2$ bằng

A. $\frac{5}{12}$.

B. $\frac{13}{12}$.

C. $\frac{17}{12}$.

D. $\frac{19}{12}$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $y = g(x) = kx$, ($k > 0$).

$$\text{Ta có: } A(-1; -k), B(2; 2k) \Rightarrow AB = \sqrt{3^2 + (3k)^2} = 5 \Rightarrow 9 + 9k^2 = 25 \Rightarrow k^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow k = \frac{4}{3}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$:

$$ax^3 + bx^2 + \frac{1}{3}x + c = \frac{4}{3}x \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 - x + c = 0.$$

$$\text{Phương trình có 3 nghiệm } x = -1; x = 1; x = 2 \text{ nên } \begin{cases} -a + b + c = -1 \\ a + b + c = 1 \\ 8a + 4b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } y = f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}x + 2.$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng

$$x = 1; x = 2 \text{ bằng } S = \int_1^2 \left(x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}x + 2 \right) dx = \frac{19}{12}.$$

Câu 78. (THPT Phan Châu Trinh - Đà Nẵng 2022) Cho hàm số

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị (C) . Gọi $y = g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị (P) đi qua gốc tọa độ. Biết hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và (P) lần lượt là $-1; 1; 2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng

A. $\frac{27}{4}$.

B. $\frac{37}{8}$.

C. 6.

D. $\frac{17}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số bậc hai $y = g(x)$ có đồ thị đi qua gốc tọa độ nên $g(x) = dx^2 + ex$.

Vì phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) có ba nghiệm là $-1; 1; 2$ nên

$$f(x) - g(x) = k(x+1)(x-1)(x-2), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (ax^3 + bx^2 + cx + 3) - (dx^2 + ex) = k(x+1)(x-1)(x-2), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay $x = 0$ vào đẳng thức trên ta được $3 = 2k$ hay $k = \frac{3}{2}$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_{-1}^2 |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \int_{-1}^2 |(x+1)(x-1)(x-2)| dx$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \int_{-1}^2 |x^3 - 2x^2 - x + 2| dx$$

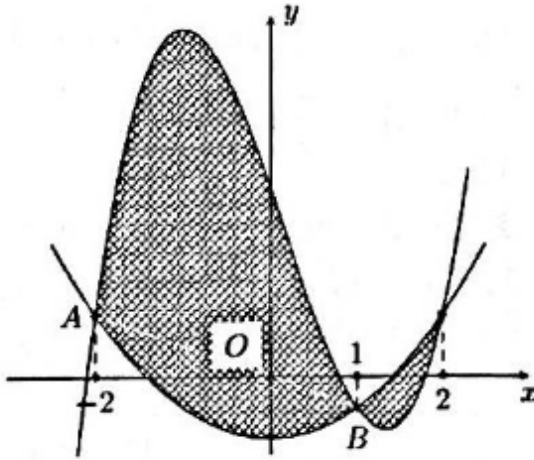
$$= \frac{3}{2} \cdot \left[\left| \int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx \right| + \left| \int_1^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx \right| \right]$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left[\left| \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \right|_{-1}^1 + \left| \left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \right|_1^2 \right]$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left(\left| -\frac{4}{3} + 4 \right| + \left| \frac{15}{4} - \frac{14}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right| \right)$$

$$= \frac{37}{8}.$$

Câu 79. (Sở Thái Bình 2022) Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 - \frac{1}{2}x^2 + cx + d$ và parabol $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết $AB = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng



A. $\frac{71}{12}$.

B. $\frac{71}{6}$.

C. $\frac{93}{9}$.

D. $\frac{45}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình vẽ ta thấy 3 điểm A, O, B thẳng hàng suy ra phương trình đường thẳng $AB: y = mx$ ($m < 0$)

Suy ra $A(-2; -2m); B(1; m)$.

$$\text{Mà } AB = \frac{3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sqrt{9 + 9m^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \text{ (do } m < 0).$$

Suy ra phương trình đường thẳng $AB: y = -\frac{1}{2}x$ và $A(-2; 1); B(1; -\frac{1}{2})$.

Dựa vào hình vẽ ta có đồ thị hàm số $y = g(x)$ đối xứng qua trục tung.

Suy ra $f(-2) = f(2)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(2) = 1 \\ f(-2) = 1 \\ f(1) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a + 2c + d = 3 \\ -8a - 2c + d = 3 \\ a + c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -4 \\ d = 3 \end{cases}.$$

$$y = f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$$

Theo đồ thị ta có $f(x) - g(x) = a(x+2)(x-1)(x+2)$

Mà $a = 1$ nên $f(x) - g(x) = (x+2)(x-1)(x+2)$.

$$\text{Vậy } S = \int_{-2}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^2 |(x+2)(x-1)(x+2)| dx = \frac{71}{6}.$$

Câu 80. (Sở Kiên Giang 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x).f'(x) = 1 + (2x+1).e^{-f^2(x)+x^2+2x+2}$. Biết $f(0) = \sqrt{2}$. Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ quay quanh trục Ox .

A. $V = \frac{838}{15}\pi$. B. $V = \frac{247}{30}\pi$. C. $V = \frac{22}{3}\pi$. D. $V = \frac{29}{6}\pi$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 2f(x).f'(x) = 1 + (2x+1).e^{-f^2(x)+x^2+2x+2} \Leftrightarrow 2f(x).f'(x) - 1 = (2x+1). \frac{e^{x^2+x+2}}{e^{f^2(x)-x}}$$

$$\Leftrightarrow [2f(x).f'(x) - 1]e^{f^2(x)-x} = (2x+1).e^{x^2+x+2}$$

$$\Leftrightarrow \int [2f(x).f'(x) - 1]e^{f^2(x)-x}.dx = \int (2x+1).e^{x^2+x+2}.dx$$

$$\Leftrightarrow \int e^{f^2(x)-x}.d[f^2(x)-x] = \int e^{x^2+x+2}.d(x^2+x+2)$$

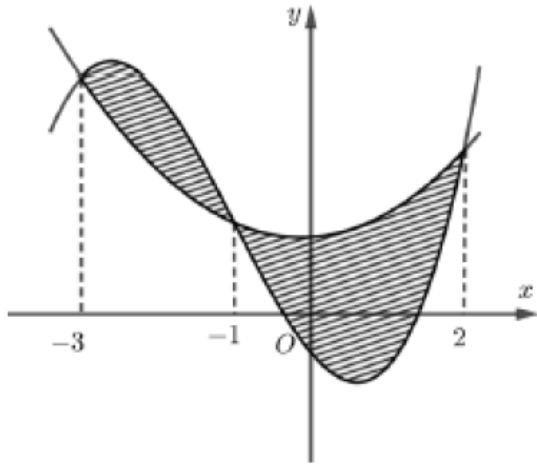
$$\Leftrightarrow e^{f^2(x)-x} = e^{x^2+x+2} + C.$$

$$\text{Vì } f(0) = \sqrt{2} \text{ nên } e^{f^2(0)} = e^2 + C \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\text{Suy ra } e^{f^2(x)-x} = e^{x^2+x+2} \Leftrightarrow f^2(x) = x^2 + 2x + 2.$$

$$\text{Vậy } V = \pi \int_1^2 f^2(x) dx = \pi \int_1^2 (x^2 + 2x + 2) dx = \frac{22}{3}\pi.$$

Câu 81. (Sở Gia Lai 2022) Cho hai hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $y = g(x) = dx^2 + ex + 1$ trong đó a, b, c, d, e là những số thực. Biết rằng đồ thị của hai hàm số đó cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt bằng $-3, -1, 2$ (tham khảo hình vẽ).



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng

A. $\frac{125}{48}$.

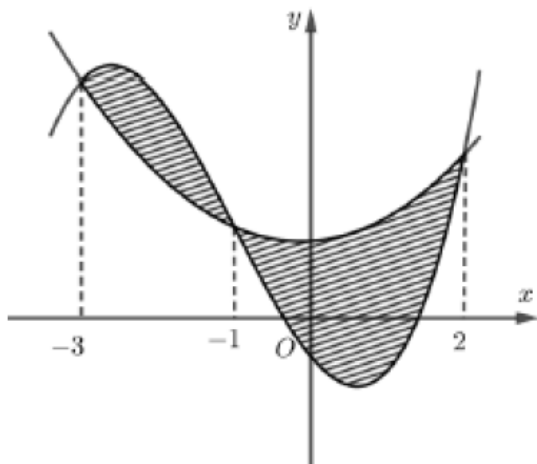
B. $\frac{63}{16}$.

C. $\frac{253}{48}$.

D. $\frac{253}{24}$.

Lời giải

Chọn C



Vì đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt bằng -3 , -1 , 2 nên phương trình $f(x) - g(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt là -3 , -1 , 2 .

Do đó, $f(x) - g(x) = a(x+3)(x+1)(x-2)$.

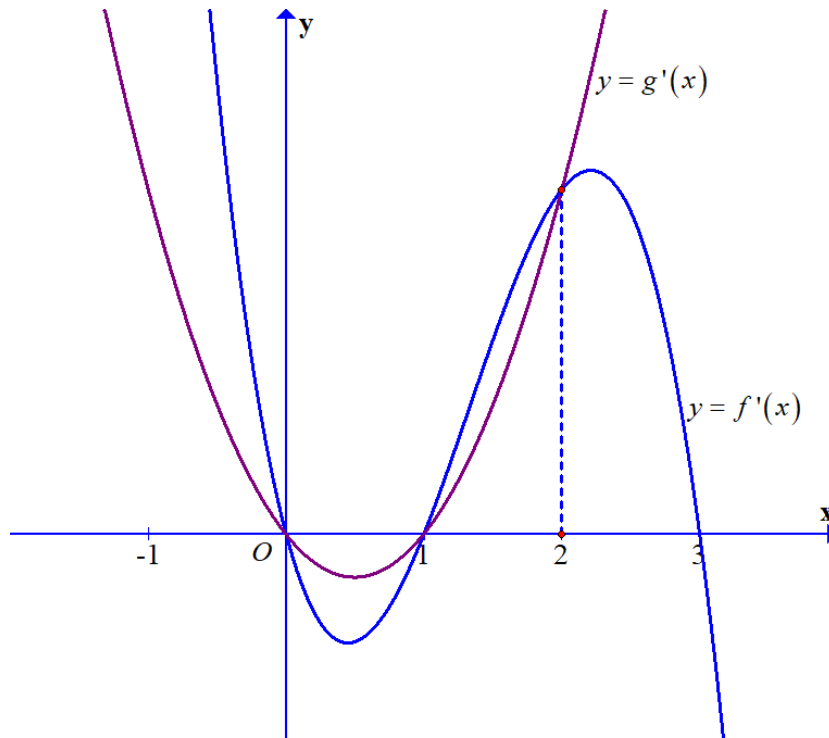
$$\Rightarrow -6a = f(0) - g(0) = -\frac{1}{2} - 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{4}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là

$$S = \int_{-3}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-3}^2 \left| \frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2) \right| dx = \frac{253}{48}.$$

Câu 82. (Sở Nam Định 2022) Cho hàm số bậc bốn $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ và hàm số bậc ba $g(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$. Các hàm số $y = f'(x), y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết $f(1) = g(1) - 2$ và diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y = f'(x), y = g'(x)$ bằng 4. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng



A. $\frac{32}{15}$.

B. $\frac{16}{3}$.

C. $\frac{16}{25}$.

D. $\frac{16}{15}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$, $g'(x) = 3mx^2 + 2nx + p$

nên $f'(x) - g'(x)$ là hàm số bậc ba.

Dựa vào đồ thị các hàm số $y = f'(x), y = g'(x)$

ta suy ra $f'(x) - g'(x) = 4ax(x-1)(x-2), a < 0$.

Từ giả thiết diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y = f'(x), y = g'(x)$ bằng 4

$$\text{suy ra } \int_0^2 |f'(x) - g'(x)| dx = \int_0^2 |4ax(x-1)(x-2)| dx = 4 \Rightarrow |a| \int_0^2 |x(x-1)(x-2)| dx = 1 \Leftrightarrow |a| \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Suy ra $a = -2$ hay $f'(x) - g'(x) = -8x(x-1)(x-2) = -8x^3 + 24x^2 - 16x$.

Do đó $f(x) - g(x) = -2x^4 + 8x^3 - 8x^2 + C$.

Theo giả thiết $f(1) = g(1) - 2 \Leftrightarrow C = 0$.

$$\text{Suy ra } f(x) - g(x) = -2x^4 + 8x^3 - 8x^2 = -2(x^2 - 2x)^2.$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng

$$\int_0^2 |-2x^4 + 8x^3 - 8x^2| dx = \frac{32}{15}.$$

Câu 83. (Đề Minh Họa 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$f(x) + xf'(x) = 4x^3 + 4x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } f(x) + x.f'(x) = 4x^3 + 4x + 2 \Leftrightarrow (x)' \cdot f(x) + x.f'(x) = 4x^3 + 4x + 2$$

$$\Leftrightarrow [x.f(x)]' = 4x^3 + 4x + 2 \Leftrightarrow x.f(x) = x^4 + 2x^2 + 2x + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 + 2x + C}{x}$$

$$\text{Vì do } f(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \text{ nên } C = 0. \text{ Do đó } f(x) = x^3 + 2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y = f(x)$ và $y = f'(x)$, ta có:

$$x^3 + 2x + 2 = 3x^2 + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}. \text{ Vậy diện tích phẳng giới hạn bởi các đường } y = f(x) \text{ và}$$

$$y = f'(x) \text{ là: } S = \int_0^2 |f(x) - f'(x)| dx = \frac{1}{2}$$

Câu 84. (Sở Thái Nguyên 2023) Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và

$$\int_0^5 f(x) dx = F(5) - G(0) + a, (a > 0). \text{ Gọi } S \text{ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường}$$

$y = F(x), y = G(x), x = 0$ và $x = 5$. Khi $S = 20$ thì a bằng

A. 25.

B. 20.

C. 4.

D. 15.

Lời giải

Chọn C

Vì $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $F(x) - G(x) = C$ với C là hằng số.

Theo giả thiết ta có

$$\left| \int_0^5 (F(x) - G(x)) dx \right| = 20 \Leftrightarrow \left| C \int_0^5 dx \right| = 20 \Leftrightarrow |Cx|_0^5 = 20 \Leftrightarrow |5C| = 20 \Leftrightarrow 5C = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} C = 4 \\ C = -4 \end{cases}.$$

Với $C = 4 \Rightarrow F(x) = G(x) + 4 \Rightarrow F(5) = G(5) + 4$.

Mặt khác

$$\int_0^5 f(x) dx = F(5) - G(0) + a \Leftrightarrow G(x)|_0^5 = F(5) - G(0) + a \Leftrightarrow G(5) - G(0) = G(5) + 4 - G(0) + a \\ \Leftrightarrow a = -4 \text{ (Loại)}.$$

Với $C = -4 \Rightarrow F(x) = G(x) - 4 \Rightarrow F(5) = G(5) - 4$.

Ta có

$$\int_0^5 f(x) dx = F(5) - G(0) + a \Leftrightarrow G(x)|_0^5 = F(5) - G(0) + a \Leftrightarrow G(5) - G(0) = G(5) - 4 - G(0) + a \\ \Leftrightarrow a = 4 \text{ (tm)}.$$

Câu 85. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam 2023) Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 2$ và $(2x+1) \cdot f'(x) - 3x^2 = 8x(x^2+1) + 2(3-f(x))$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x), y = f'(x)$.

A. $S = \frac{1}{4}$

B. $S = \frac{3}{4}$.

C. $S = \frac{2}{3}$.

D. $S = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$(2x+1) \cdot f'(x) - 3x^2 = 8x(x^2+1) + 2(3-f(x)) \Leftrightarrow (2x+1) \cdot f'(x) + 2f(x) = 8x^3 + 3x^2 + 8x + 6 \\ \Leftrightarrow [(2x+1) \cdot f(x)]' = 8x^3 + 3x^2 + 8x + 6 \\ \Rightarrow (2x+1) \cdot f(x) = \int (8x^3 + 3x^2 + 8x + 6) dx = 2x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x + C$$

Mà $f(0) = 2$ nên suy ra $C = 2$. Khi đó:

$$(2x+1) \cdot f(x) = 2x^4 + x^3 + 4x^2 + 6x + 2 = (2x+1)(x^3 + 2x + 2) \Rightarrow f(x) = x^3 + 2x + 2$$

Suy ra: $f'(x) = 3x^2 + 2$

Phương trình hoành độ giao điểm hai đường cong $y = f(x), y = f'(x)$ là:

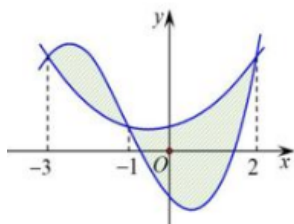
$$x^3 + 2x + 2 = 3x^2 + 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ bằng:

$$S = \int_0^2 \left| (x^3 + 2x + 2) - (3x^2 + 2) \right| dx = \frac{1}{2}$$

Câu 86. (Sở Hải Phòng 2023) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ và

$g(x) = dx^2 + ex + \frac{1}{2}$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3; -1; 2$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{125}{12}$.

B. $\frac{253}{48}$.

C. $\frac{253}{24}$.

D. $\frac{253}{12}$.

Lời giải

Chọn B

Vì đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt bằng $-3, -1, 2$ nên phương trình $f(x) - g(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt là $-3, -1, 2$.

Do đó, $f(x) - g(x) = a(x+3)(x+1)(x-2)$.

$$\Rightarrow -6a = f(0) - g(0) = -1 - \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là

$$S = \int_{-3}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-3}^2 \left| \frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2) \right| dx = \frac{253}{48}.$$

Câu 87. (Cụm Liên trường Quảng Nam 2023) Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^4 f(x)dx = F(4) - G(1) + m (m > 0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x), y = G(x), x = 1$ và $x = 4$. Khi $S = 12$ thì m bằng

- A. 6.
- B. 12.
- C. 8.
- D. 4.

Lời giải

Chọn D

Vì $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $G(x) = F(x) + C$ (1)

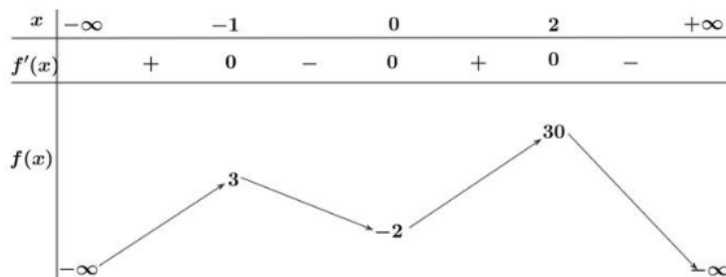
Vì $F(4) - F(1) = F(x)|_1^4 = \int_1^4 f(x)dx = F(4) - G(1) + m$ nên $G(1) - F(1) = m$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $C = m$ hay $G(x) - F(x) = m (m > 0)$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_1^4 |G(x) - F(x)| dx = \int_1^4 |m| dx = 3m$.

Vì $S = 12$ nên $m = 4$.

Câu 88. (Sở Bắc Ninh 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau



Biết rằng $f''(x) \leq 28, \forall x \in \mathbb{R}$. Quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x(28 - f''(x))}$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x = 2$ quanh trục hoành ta được khối tròn xoay có thể tích là

- A. $V = 56\pi$.
- B. $V = 70\pi$.
- C. $V = 224\pi$.
- D. $V = 88\pi$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $V = \pi \int_0^2 x(28 - f''(x)) dx = \pi \left[\int_0^2 28x dx - \int_0^2 x \cdot f''(x) dx \right]$.

+ Tính $\int_0^2 28x dx = 56$.

+ Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f''(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f'(x) \end{cases}$.

Suy ra: $\int_0^2 x \cdot f''(x) dx = x \cdot f'(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f'(x) dx = f(0) - f(2) = -32$.

Vậy $V = 88\pi$.

Câu 89. (Cụm Liên trường Quảng Nam 2023) Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + \int_0^2 (x+u)f(u)du$ có đồ thị

(C). Khi đó hình phẳng giới hạn bởi (C), trục tung, tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 5$ có diện tích S bằng

A. $S = \frac{8405}{39}$.

B. $S = \frac{137}{6}$.

C. $S = \frac{83}{3}$.

D. $S = \frac{125}{3}$.

Lời giải

Chọn D

• $f(x) = x^2 + x \int_0^2 f(u) du + \int_0^2 u f(u) du = x^2 + ax + b$

Với $a = \int_0^2 (u^2 + au + b) du = \frac{8}{3} + 2a + 2b$, $b = \int_0^2 (u^3 + au^2 + bu) du = 4 + \frac{8a}{3} + 2b$

$\Rightarrow a = -\frac{16}{13}$, $b = -\frac{28}{39}$

• $f(x) = x^2 - \frac{16}{13}x - \frac{28}{39} \Rightarrow f'(5) = \frac{119}{13}$

Tiếp tuyến(d): $y = \frac{114}{13}(x-5) + \frac{707}{39}$

Vậy diện tích cần tìm là $S = \int_0^5 \left| x^2 - \frac{16}{13}x - \frac{28}{39} - \frac{114}{13}(x-5) - \frac{707}{39} \right| dx = \frac{125}{3}$.

Câu 90. (Sở Nam Định 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$f(x) = x^3 + 3 \int_0^1 x^4 f(x) dx$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục Ox , $x = 0, x = 1$ khi quay quanh trục Ox .

A. $\frac{33}{8} \pi$.

B. $\frac{149}{100} \pi$.

C. $\frac{2671}{1792} \pi$.

D. $\frac{325}{1792} \pi$.

Lời giải

Chọn C

$$f(x) = x^3 + 3 \int_0^1 x^4 f(x) dx$$

$$\text{Đặt } I = \int_0^1 x^4 f(x) dx \text{ khi đó } f(x) = x^3 + 3I$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 x^4 (x^3 + 3I) dx = \int_0^1 (x^7 + 3x^4 \cdot I) dx$$

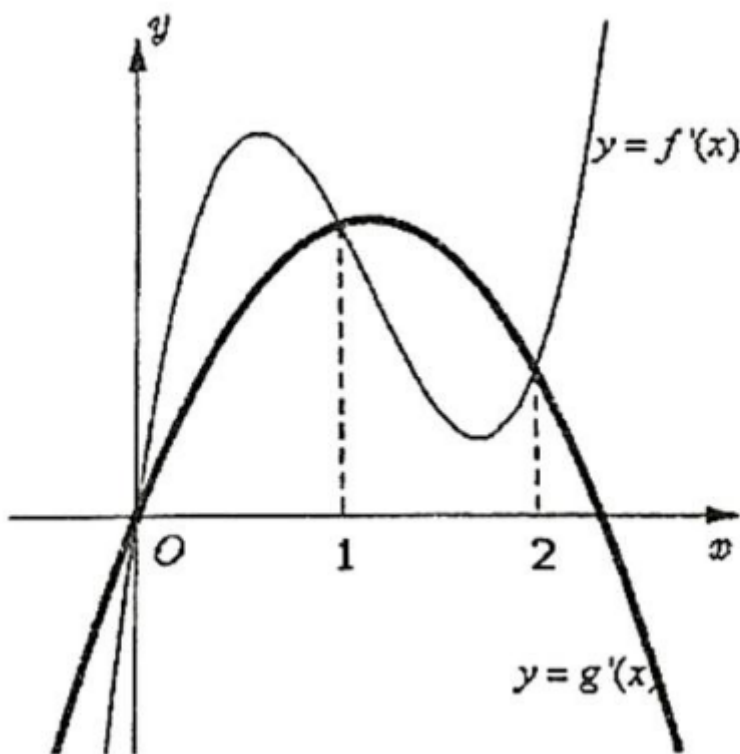
$$= \int_0^1 x^8 dx + 3I \int_0^1 x^4 dx = \frac{x^8}{8} \Big|_0^1 + 3I \left(\frac{x^5}{5} \Big|_0^1 \right)$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{8} + 3I \frac{1}{5} = \frac{3I}{5} + \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{2}{5} I = \frac{1}{8} \Rightarrow I = \frac{5}{16}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + 3 \frac{5}{16} = x^3 + \frac{15}{16}$$

$$\text{Thể tích khối tròn xoay là: } V = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \cdot \int_0^1 \left(x^3 + \frac{15}{16} \right)^2 dx = \frac{2671}{1792} \pi$$

Câu 91. (Sở Hưng Yên 2023) Cho hai đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $g'(x) = qx^2 + nx + p$ với $a, q \neq 0$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng 10 và $f(2) = g(2)$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

- A. $\frac{8}{3}$.
- B. $\frac{16}{3}$.
- C. $\frac{8}{15}$.
- D. $\frac{16}{5}$.

Lời giải

Chọn B

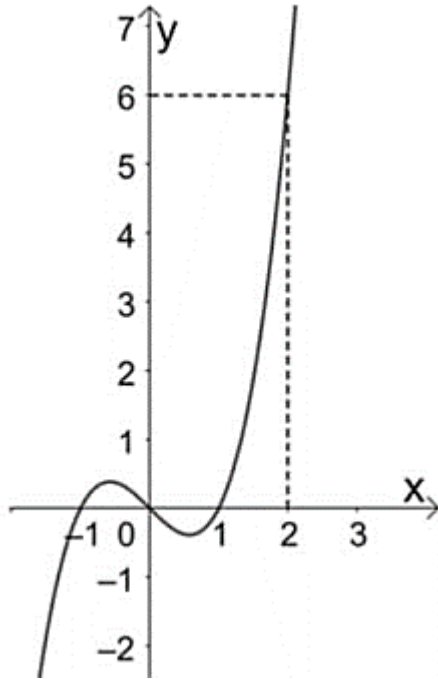
$$\text{Ta có: } f'(x) - g'(x) = 4a(x^3 - 3x^2 + 2x) (a > 0) \Rightarrow 4a \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = \frac{4a}{2} = 10 \Rightarrow a = 5.$$

$$\Rightarrow f'(x) - g'(x) = 20(x^3 - 3x^2 + 2x) \Rightarrow f(x) - g(x) = 5x^4 - 20x^3 + 20x^2 + C.$$

$$f(2) - g(2) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) - g(x) = 5x^4 - 20x^3 + 20x^2 \Rightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow S = 5 \int_0^2 x^2(x-2)^2 dx = \frac{16}{3}.$$

Câu 92. (Sở Nghệ An. Liên Trường THPT 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$, biết rằng $f(0) = 0$ và hàm số $g(x) = \frac{1}{16}[xf''(x) + f'(x)]$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = \frac{f''(x) - 40}{12}$ khi quay quanh trục Ox có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây?

- A. (116;117) .
- B. (117;118) .
- C. (118;119) .
- D. (115;116) .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} g(x) = a(x+1)(x-1)x \\ g(2) = 6 \end{cases} \Rightarrow g(x) = x^3 - x$$

Với

$$g(x) = \frac{1}{16} [xf''(x) + f'(x)] = \frac{1}{16} [x \cdot f'(x)]' = x^3 - x$$

$$\Rightarrow xf'(x) = 4x^4 - 8x^2 + c$$

$$\text{Mà } g(0) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 8x \Rightarrow f(x) = x^4 - 4x^2 + c_1$$

$$\text{Vì } f(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 - 4x^2, f''(x) = 12x^2 - 8$$

$$\text{Ta có } y = \frac{f''(x) - 40}{12} = x^2 - 4$$

$$\text{Đặt } y_1 = x^4 - 4x^2, y_2 = x^2 - 4$$

$$\text{Khi đó } V = 2\pi \left[\int_0^1 (y_2^2 - y_1^2) dx + \int_1^2 (y_1^2 - y_2^2) dx \right] = 2\pi \cdot \frac{56}{3} \approx 117.3$$

Câu 93. (THPT Gia Định – HCM – 2023) Cho hàm số $f(x) = x^4 + bx^2 + c$ ($b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong (C) và đường thẳng $(d): y = g(x)$ tiếp xúc với (C) tại điểm $x_0 = 1$. Biết (d) và (C) còn hai điểm chung khác có hoành độ là x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) và $\int_{x_1}^{x_2} \frac{g(x) - f(x)}{(x-1)^2} dx = \frac{4}{3}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và đường thẳng (d) .

A. $\frac{29}{5}$

B. $\frac{28}{5}$

C. $\frac{143}{5}$

D. $\frac{43}{5}$

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết ta có: $f(x) - g(x) = (x-1)^2(x-x_1)(x-x_2) = x^4 + bx^2 - mx + n$ (*)

$$\text{Ta có: } \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x) - g(x)}{(x-1)^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} (x-x_1)(x-x_2) dx = \int_{x_1}^{x_2} (x-x_1)(x-x_1+x_1-x_2) dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[(x-x_1)^2 + (x-x_1)(x_1-x_2) \right] dx = \left[\frac{(x-x_1)^3}{3} + (x_1-x_2) \frac{(x-x_1)^2}{2} \right] \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{(x_2-x_1)^3}{3} - \frac{(x_2-x_1)^3}{2} = -\frac{(x_2-x_1)^3}{6} = \frac{-4}{3}$$

$$\text{Suy ra } (x_2 - x_1)^3 = 8 \Leftrightarrow x_2 - x_1 = 2 \quad (1)$$

Mặt khác theo định lý Viét bậc 4 của phương trình (*) ta được:

$$1 + 1 + x_2 + x_1 = 0 \Leftrightarrow x_2 + x_1 = -2 \quad (2)$$

$$\bullet (1), (2) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = -2 \end{cases}$$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và đường thẳng (d) là:

$$S = \int_{-2}^1 |(x-1)^2(x+2)x| dx = \frac{29}{5}$$

Câu 94. (Sở Hòa Bình 2023) Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 3x$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 - x$ với $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1; 1$ và 2 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ bằng

A. $\frac{5}{6}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $\frac{37}{6}$.

D. $\frac{16}{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Vì hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-1; 1$ và 2 nên

$$f'(x) - g'(x) = 4a(x+1)(x-1)(x-2) \Rightarrow f'(0) - g'(0) = 8a.$$

Mặt khác $f'(0) - g'(0) = 4 \Rightarrow 8a = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

$$S = \int_{-1}^2 |2(x+1)(x-1)(x-2)| dx = \frac{37}{6}.$$

Câu 95. (THPT Trần Hưng Đạo – Nam Định 2023) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$$f(x) - x \cdot f'(x) \cdot \ln x = 2x^2 \cdot f^2(x), \forall x \in (1; +\infty). \text{ Biết } f(x) > 0, \forall x \in (1; +\infty) \text{ và } f(e) = \frac{1}{e^2}. \text{ Tính diện tích}$$

S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x \cdot f(x), y = 0, x = e, x = e^2$

A. $S = \frac{1}{2}$

B. $S = 2$

C. $S = \frac{3}{2}$

D. $S = \frac{5}{3}$

Lời giải

Chọn C

$$f(x) - x \cdot f'(x) \cdot \ln x = 2x^2 \cdot f^2(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} \cdot f(x) - f'(x) \cdot \ln x = 2x \cdot f^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x} \cdot f(x) - f'(x) \cdot \ln x}{f^2(x)} = 2x \Leftrightarrow \left(\frac{\ln x}{f(x)} \right)' = 2x \Rightarrow \frac{\ln x}{f(x)} = \int 2x dx \Leftrightarrow \frac{\ln x}{f(x)} = x^2 + C.$$

Ta có $\frac{\ln e}{f(e)} = e^2 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow y = x \cdot f(x) = \frac{\ln x}{x}.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \frac{\ln x}{x}, y = 0, x = e, x = e^2$ là

$$S = \int_e^{e^2} \left| \frac{\ln x}{x} \right| dx = \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \int_e^{e^2} \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 \Big|_e^{e^2} = \frac{3}{2}.$$

Câu 96. (Sở Bình Phước 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn

$$xf'(x) + 2x^2 = f(x) + 2x^3, \forall x \neq 0 \quad f(1) = 2. \text{ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường } y = f(x) \text{ và } y = f'(x)$$

A. $\frac{5}{4}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{4}{3}$

Lời giải

Chọn D

$$xf'(x) + 2x^2 = f(x) + 2x^3 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 2x - 2 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 2x - 2$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \int (2x - 2)dx = x^2 - 2x + C. \text{ Do } f(1) = 2 \Rightarrow C = 3$$

Vậy $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$; $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$

Ta có: $f(x) = f'(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$. Do đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và

$$y = f'(x) \text{ là: } S = \int_1^3 |x^3 - 5x^2 + 7x - 3| dx = \frac{4}{3}.$$

Câu 97. (Sở Yên Bái 2023) Biết $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và

$$\int_0^7 f(x)dx = F(7) - G(0) + 3m \quad (m > 0). \text{ Gọi } S \text{ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường}$$

$y = F(x), y = G(x), x = 0$ và $x = 7$. Khi $S = 105$ thì m bằng

A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $G(x) = F(x) + C$.

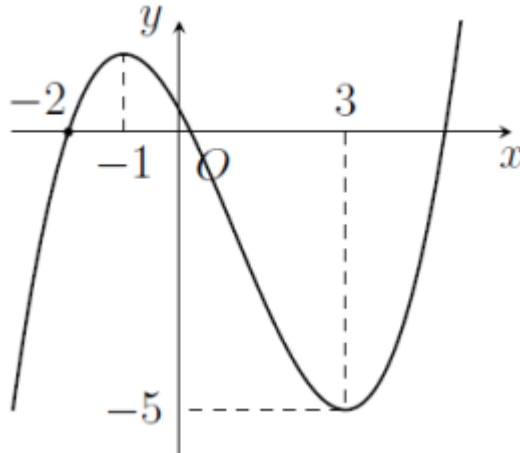
Theo giả thiết: $\int_0^7 f(x)dx = F(7) - G(0) + 3m \quad (m > 0)$

Nên $\begin{cases} F(7) - F(0) = F(7) - G(0) = 3m \\ G(7) - G(0) = F(7) - G(0) = 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} G(0) - F(0) = 3m \\ G(7) - G(0) = 3m \end{cases} \Leftrightarrow G(x) - F(x) = 3m.$

Khi đó $S = \int_0^7 |G(x) - F(x)| dx = \int_0^7 |3m| dx = \int_0^7 3m dx = 21m$

Theo giả thiết: $21m = 105 \Leftrightarrow m = 5$

Câu 98. (Sở Hà Tĩnh 2023) Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $g(x) = f''(x) + bx - c$ bằng



- A. $\frac{145}{2}$.
- B. $\frac{125}{2}$.
- C. $\frac{25}{2}$.
- D. $\frac{29}{2}$.

Lời giải

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$x = -2$ là nghiệm $\Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 0$ (1)

$$y' = 0 \text{ do có 2 nghiệm là } -1, 3 \text{ nên } \Rightarrow \begin{cases} \frac{-2b}{3a} = 2 \\ \frac{c}{3a} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 0(2) \\ 9a + c = 0(3) \end{cases}$$

Tại điểm $x = 3; y = -5$ ta được $27a + 9b + 3c + d = -5$ (4)

$$(1), (2), (3), (4) \Rightarrow f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 9x + 2}{5}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 6x - 9}{5}, g(x) = \frac{6x - 6}{5} - \frac{3}{5}x + \frac{9}{5} = \frac{3x + 3}{5}$$

$$f'(x) - g(x) = \frac{3x^2 - 9x - 12}{5} = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 4$$

$$s = \int_{-1}^4 \left| \frac{3x^2 - 9x - 12}{5} \right| dx = \frac{25}{2}$$

Câu 99. (Chuyên Hạ Long 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f(x) + f'(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 5$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$.

A. $\frac{131}{4}$.

B. $\frac{125}{4}$.

C. $\frac{35}{4}$.

D. $\frac{203}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Chọn $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Suy ra $f(x) + f'(x) = ax^3 + (3a + b)x^2 + (2b + c)x + d + c$.

Từ giả thiết ta có:
$$\begin{cases} a = 1 \\ 3a + b = 3 \\ 2b + c = -4 \\ d + c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -4 \\ d = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = x^3 - 4x + 8 \\ f'(x) = 3x^2 - 4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y = f(x), y = f'(x)$ là:

$$f(x) = f'(x) \Leftrightarrow x^3 - 4x + 8 = 3x^2 - 4 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng:

$$S = \int_{-2}^3 |x^3 - 3x^2 - 4x + 12| dx = \int_{-2}^2 (x^3 - 3x^2 - 4x + 12) dx + \int_2^3 (-x^3 + 3x^2 + 4x - 12) dx = \frac{131}{4}.$$

Câu 100. (Sở Bắc Ninh 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

$f(0) = -2, (x^2 + 1)f'(x) + xf(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

$g(x) = \frac{1}{1 + f(x)}$, hai trục tọa độ và đường thẳng $x = 3$. Quay (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay

có thể tích bằng V (đơn vị thể tích). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $V \in (5; 9)$.

B. $V \in (11; 13)$.

C. $V \in (15; 20)$.

D. $V \in (35; 38)$.

Lời giải

Ta có

$$\bullet \sqrt{x^2+1}f'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}f(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left(f(x) \cdot \sqrt{x^2+1} \right)' = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot \sqrt{x^2+1} = -\sqrt{x^2+1} + C$$

$$\bullet f(0) = -2 \Rightarrow -2 = -1 + C \Rightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot \sqrt{x^2+1} = -\sqrt{x^2+1} - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = -1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow g(x) = -\sqrt{x^2+1}$$

$$+V = \pi \int_0^3 g^2(x) dx = \pi \int_0^3 (x^2+1) dx = 12\pi$$

Chọn D

Câu 101. Cho hai đường $f(x) = \frac{mx+n}{x+1}$ và $g(x) = ax^2 + bx + c$ (với a, b, c, m, n là các số thực) cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ $-2; 1; 2$. Hàm số $h(x) = (x+1)g(x) - (m+9)x - n$ có giá trị cực đại bằng -9 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x); y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = 0; x = 1$ bằng

A. $\frac{27}{2} \ln 2 - 6$.

B. $18 \ln 2 - 8$.

C. $6 \ln 2 - \frac{8}{3}$

D. $\frac{27}{2} \ln 2 - 8$.

Lời giải

$$\text{Xét } g(x) - f(x) = ax^2 + bx + c - \frac{mx+n}{x+1} = \frac{(x+1)(ax^2 + bx + c) - (mx+n)}{x+1}$$

Theo giả thiết phương trình $(x+1)(ax^2 + bx + c) - (mx+n) = 0$ bậc ba có ba nghiệm là $-2; 1; 2$ nên

$$(x+1)(ax^2 + bx + c) - (mx+n) = a(x+2)(x-1)(x-2).$$

Vậy

$$g(x) - f(x) = \frac{a(x+2)(x-1)(x-2)}{x+1}.$$

Ta cần tìm a dựa trên giá trị cực đại của hàm số $h(x)$:

$$\begin{aligned} \text{Khi} \quad & \text{đó} \quad \text{hàm} \quad \text{số} \\ h(x) &= (x+1)g(x) - (m+9)x - n = (x+1)g(x) - (mx+n) - 9x = a(x+2)(x-1)(x-2) - 9x \\ &= a(x-1)(x^2-4) - 9x = a(x^3 - x^2 - 4x + 4) - 9x. \end{aligned}$$

Theo giả thiết hàm số này có giá trị cực đại bằng -9 đạt tại điểm x nên

$$\begin{cases} h'(x) = 0 \\ h(x) = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(3x^2 - 2x - 4) - 9 = 0 \quad (1) \\ a(x-1)(x^2 - 4) - 9x = -9 \quad (2) \end{cases}.$$

Ta có $(2) \Leftrightarrow a(x-1)(x^2 - 4) - 9(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)[a(x^2 - 4) - 9] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ a(x^2 - 4) - 9 = 0 \end{cases}$.

+ Nếu $x = 1$ thay ngược lại (1) ta có $a = -3 \Rightarrow h(x) = -3(x^3 - x^2 - 4x + 4) - 9x$ có giá trị cực đại bằng -9 (thỏa mãn) vì vậy $S = \int_0^1 \left| \frac{-3(x+2)(x-1)(x-2)}{x+1} \right| dx = 18 \ln 2 - 8$.

Khi $a(x^2 - 4) - 9 = 0$ kết hợp với (1) ta có

$$a(3x^2 - 2x - 4) - a(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow a(2x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow a = -\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow h(x) = -\frac{9}{4}(x^3 - x^2 - 4x + 4) - 9x \text{ có giá trị cực đại bằng } -\frac{26}{3} \text{ (loại)}.$$

Chọn đáp án **B.**

Câu 102. Cho hàm số $f(x)$ bậc năm có bốn điểm cực trị là x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Gọi $g(x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị qua bốn điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y = \frac{f'(x)}{f(x) - g(x)}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1; x = 0$ bằng

A. $5 \ln 2$.

B. $5 \ln 5$.

C. $5 \ln 6$.

D. $5 \ln 3$.

Lời giải

Dạng bài Đường cong $g(x)$ bậc $(n-2)$ qua $(n-1)$ điểm cực trị của đồ thị hàm số đa thức $f(x)$ bậc n :

Xét $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots \Rightarrow f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots$ có $n-1$ điểm cực trị là $x_1, \dots, x_{n-1}$ và $g(x)$ là đường cong qua $(n-1)$ điểm cực trị của đồ thị hàm số đa thức $f(x)$

Dùng phép chia đa thức suy ra

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{n} \left[x + \frac{a_{n-1}}{n a_n} \right] f'(x) + g(x) = \frac{1}{n} \left[x - \frac{1}{n-1} (x_1 + \dots + x_{n-1}) \right] f'(x) + g(x) \quad \text{trong đó}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \text{ là các nghiệm của } f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = -\frac{(n-1)a_{n-1}}{n a_n}.$$

Vì vậy $\frac{f'(x)}{f(x) - g(x)} = \frac{n}{x - \frac{1}{n-1} (x_1 + \dots + x_{n-1})}$. Áp dụng với $n = 5; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)-g(x)} = \frac{5}{x-\frac{1}{4}} \Rightarrow S = \int_{-1}^0 \left| \frac{5}{x-\frac{1}{4}} \right| dx = 5 \ln 5.$$

Chọn đáp án B

Câu 103. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f'(x) = 2xe^x, \forall x \in \mathbb{R}; f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2f(x); y = f'(x)$ và trục tung bằng

A. $\frac{2e\sqrt{e}-5}{2}.$

B. $3-e.$

C. $3-e^2.$

D. $\frac{e\sqrt{e}-5}{2}.$

Lời giải

Ta có

$$f(x) + f'(x) = 2xe^x \Rightarrow e^x f(x) + e^x f'(x) = 2xe^{2x}$$

$$\Rightarrow (e^x f(x))' = 2xe^{2x} \Rightarrow e^x f(x) = \int 2xe^{2x} dx = \int x d(e^{2x}) = xe^{2x} - \int e^{2x} dx = xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$\text{Do } f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e + C \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = xe^x - \frac{1}{2}e^x$$

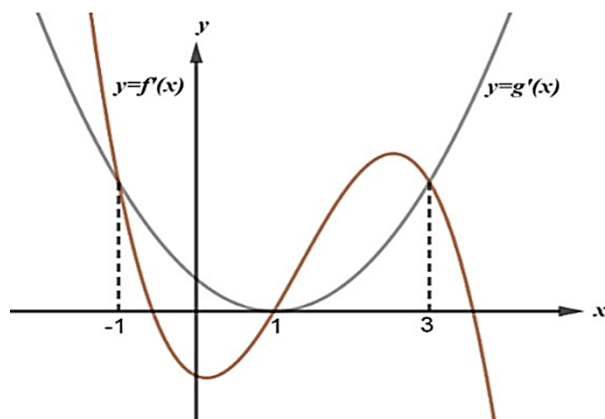
$$\bullet 2f(x) = f'(x) \Leftrightarrow 2xe^x - e^x = e^x + xe^x - \frac{1}{2}e^x \Leftrightarrow xe^x - \frac{3}{2}e^x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow S = \int_0^{3/2} \left| xe^x - \frac{3}{2}e^x \right| dx = \frac{2e\sqrt{e}-5}{2}$$

Chọn đáp án A

Câu 104. (THPT huyện Mỹ Lộc – Vụ Bản – Nam Định 2023) Cho hàm số bậc bốn

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e (a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$ và hàm số bậc ba $g(x) = mx^3 + nx^2 + px + q (m, n, p, q \in \mathbb{R})$ có đồ thị $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Biết diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f'(x); y = g'(x)$ bằng 96 và $f(2) = g(2)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = g(x)$ và $x = 0, x = 2$ bằng

A. $\frac{136}{15}$.

B. $\frac{272}{15}$.

C. $\frac{136}{5}$.

D. $\frac{68}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) - g'(x) &= k(x+1)(x-1)(x-3) = k(x^2-1)(x-3) = k(x^3-3x^2-x+3) \\ \Rightarrow f(x) - g(x) &= \int (f'(x) - g'(x))dx = k\left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x\right), (f(2) = g(2)) \end{aligned}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x); y = g'(x)$ là

$$\int_{-1}^3 |f'(x) - g'(x)|dx = \int_{-1}^3 |k(x^3 - 3x^2 - x + 3)|dx = 96 \Rightarrow |k| = 12$$

Suy ra diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x); y = g(x); x = 0; x = 2$ là

$$\int_0^2 |f(x) - g(x)|dx = 12 \int_0^2 \left| \frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x \right|dx = \frac{136}{5}.$$

Câu 105. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn $f(1) = 2, f(2) = 1$ và

$\int_1^2 x^2 [f'(x)]^2 dx = 2$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^4 f(x)$, các đường thẳng $x = 1, x = 2$ và trục hoành có diện tích bằng

A. $\frac{21}{3}$.

B. $\frac{17}{2}$.

C. $\frac{31}{5}$.

D. $\frac{15}{2}$.

Lời giải

$$\int_1^2 [x^2 f'(x)]^2 dx = 2$$

$$\bullet f(2) - f(1) = -1 = \int_1^2 f'(x) dx; \int_1^2 \frac{4}{x^2} dx = 2$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \left(x^2 f'^2(x) + 4f'(x) + \frac{4}{x^2} \right) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 \left(xf'(x) + \frac{2}{x} \right)^2 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow xf'(x) = -\frac{2}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{x} + c.$$

$$x=1 \Rightarrow c=0$$

$$\bullet y = x^4. f(x) = 2x^3 \Rightarrow S = \int_1^2 2x^3 dx = \frac{15}{2}.$$

Câu 106. (Sở Nam Định 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[0; 2]$. Biết $f(2) = 7$ và $[f'(x)]^2 = 21x^4 - 12x - 12xf(x), \forall x \in [0; 2]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục Ox, Oy và $x = 2$ bằng

A. 2.

B. $\frac{7}{2}$.

C. 3.

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta chọn hàm $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

$$[f'(x)]^2 = 21x^4 - 12x - 12xf(x) \Rightarrow (3ax^2 + 2bx + c)^2 = 21x^4 - 12x - 12x(ax^3 + bx^2 + cx + d).$$

$$\text{Đồng nhất hệ số 2 vế, ta được: } \begin{cases} 9a^2 = 21 - 12a \\ 12ab = -12b \\ 6ac + 4b^2 = -12c \\ 4bc = -12 - 12d \\ c^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = c = 0 \\ d = -1 \end{cases}.$$

Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = x^3 - 1$ thỏa điều kiện đề bài.

$$\text{Vậy diện tích hình phẳng } S = \int_0^2 |x^3 - 1| dx = \frac{7}{2}.$$

Câu 107. (Sở Ninh Bình 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f(x) = f'(x) + 2(3x+1)e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = -3e$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = 2f(x)$ và $y = f'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(20; 30)$.
- B. $(10; 20)$.
- C. $(0; 10)$.
- D. $(30; 40)$.

Lời giải

Chọn A

$$f(x) = f'(x) + 2(3x+1)e^x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = -6x - 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (f(x)e^{-x})' = -6x - 2 \Rightarrow f(x)e^{-x} = -3x^2 - 2x + C \Rightarrow f(x) = (-3x^2 - 2x + C)e^x.$$

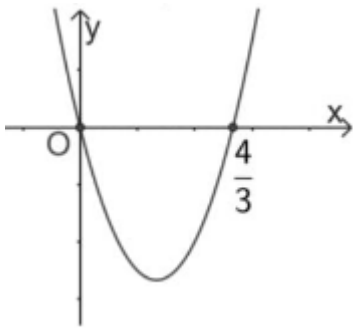
$$\text{Mà } f(1) = -3e \Rightarrow (C - 5)e = -3e \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = (-3x^2 - 2x + 2)e^x$$

$$\Rightarrow f'(x) = (-3x^2 - 8x)e^x \Rightarrow 2f(x) - f'(x) = (-3x^2 + 4x + 4)e^x.$$

$$2f(x) - f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}.$$

$$S = \int_{-\frac{2}{3}}^2 |2f(x) - f'(x)| dx = \int_{-\frac{2}{3}}^2 |-3x^2 + 4x + 4| e^x dx \approx 21,97.$$

Câu 108. (Sở Nghệ An 2023) Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx (a, b \in \mathbb{R})$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng $\frac{m}{n} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)$ và

$\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $m + n$

- A. -157 .
- B. 74 .
- C. 13 .
- D. 119 .

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$.

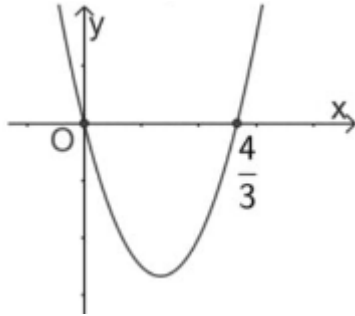
Từ đồ thị suy ra:
$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'\left(\frac{4}{3}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -4 \end{cases}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm: $f(x) - f'(x) = 2x^3 - 10x^2 + 8x$.

Cho $f(x) - f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}.$

Vậy diện tích hình phẳng là $S = \int_0^4 |2x^3 - 10x^2 + 8x| dx = \frac{71}{3} \Rightarrow m + n = 74$.

Câu 109. (Sở Nghệ An 2023) Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx (a, b \in \mathbb{R})$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng $\frac{m}{n} (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)$ và

$\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $m + n$.

A. 49.

B. -29.

C. 77.

D. 19.

Lời giải**Chọn C**

$$\Rightarrow y' = 3x^2 + 2ax + b$$

Theo đồ thị, ta thấy điểm $(0; 0), \left(\frac{4}{3}; 0\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y' = f'(x)$ nên:

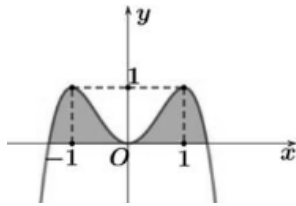
$$\begin{cases} b = 0 \\ 3 \cdot \frac{16}{9} + \frac{8}{3}a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 3x^2 - 4x \\ f(x) = x^3 - 2x^2 \end{cases}$$

Ta có: $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow 3x^2 - 4x = x^3 - 2x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$

Vậy diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ là:

$$S = \int_0^4 |x^3 - 5x^2 + 4x| dx = \frac{71}{6} \Rightarrow \begin{cases} m = 71 \\ n = 6 \end{cases} \Leftrightarrow m + n = 77$$

Câu 110. (Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình 2023) Cho đồ thị hàm số trùng phương $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c, (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ như hình vẽ.



Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi miền tô đậm trong hình vẽ quanh trục Ox là

A. $\frac{144\sqrt{3}}{35}$.

B. $\frac{15\sqrt{2}}{16}$.

C. $\frac{144\sqrt{3}\pi}{35}$.

D. $\frac{256\sqrt{2}\pi}{315}$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị, ta có: $\begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -x^4 + 2x^2$.

Vậy thể tích khối tròn xoay là $V = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (-x^4 + 2x^2)^2 dx = \frac{256\sqrt{2}}{315} \pi$.

Câu 111. (Chuyên Thái Bình 2023) Cho các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn các điều kiện $f(x) = x \cdot g'(x), g(x) = x \cdot f'(x), \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) - g(1) = 4$ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = 1, x = 2, y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng

A. $4 \ln 2$.

B. $2 \ln 2$.

C. $16 \ln 2$.

D. $8\ln 2$.

Lời giải

Chọn#A.

Ta có

$$f(x) - g(x) = x \cdot g'(x) - x \cdot f'(x) \Leftrightarrow f(x) + x \cdot f'(x) = g(x) + x \cdot g'(x) \Leftrightarrow (x \cdot f(x))' = (x \cdot g(x))' \\ \Rightarrow x \cdot f(x) = x \cdot g(x) + C \Rightarrow 1 \cdot f(1) = 1 \cdot g(1) + C \Leftrightarrow f(1) - g(1) = C \Rightarrow C = 4.$$

$$\text{Vậy } x \cdot f(x) = x \cdot g(x) + 4 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = \frac{4}{x}.$$

$$S = \int_1^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_1^2 \left| \frac{4}{x} \right| dx = 4 \cdot \ln x \Big|_1^2 = 4 \ln 2$$

Câu 112. (Sở Quảng Bình 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và $f(x) \neq 0, \forall x > 0$. Biết rằng $f'(x) = (2x+1)f^2(x)$ và $f(1) = -\frac{1}{2}$. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường

$y = f(x), x = 1, x = e^2$ bằng

A. $2 + \ln \frac{2}{e^2 + 1}$.

B. $-2 + \ln \frac{2}{e^2 + 1}$.

C. $1 - \ln \frac{1}{e^2 + 1}$.

D. $1 - \ln \frac{e+1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Từ giả thiết: } f'(x) = (2x+1)f^2(x) \Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = -2x-1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)} \right)' = -2x-1$$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{f(x)} = \int (-2x-1) dx = -x^2 - x + C$$

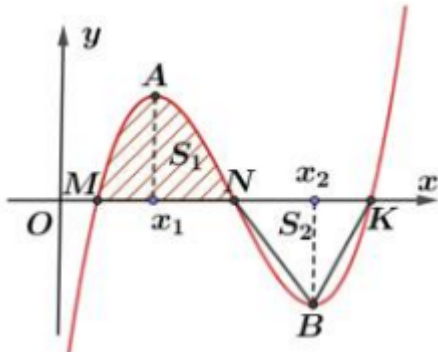
$$\text{Mà } f(1) = -\frac{1}{2} \text{ nên } C = 0. \text{ Vậy } f(x) = \frac{1}{x^2 + x}.$$

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), x = 1, x = e^2$ là

$$S = \int_1^{e^2} \left| \frac{1}{x^2 + x} \right| dx = 2 + \ln \frac{2}{1 + e^2}$$

Câu 113. (Sở Thái Nguyên 2023) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) trong hình vẽ. Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $f(x_1) + f(x_2) = 0$. Gọi A, B là hai điểm cực

trị của đồ thị (C) ; M, N, K là giao điểm của (C) với trục hoành; S_1 là diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình, S_2 là diện tích tam giác NBK . Biết tứ giác $MAKB$ nội tiếp đường tròn, khi đó tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

D. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$

Lời giải

Diện tích sẽ không đổi nếu ta dời gốc toạ độ đến vị trí điểm N

Khi đó trong hệ toạ độ mới

$$N(0;0); M\left(-\sqrt{\frac{b}{a}};0\right); K\left(\sqrt{\frac{b}{a}};0\right) \Rightarrow NK = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$g'(x) = 3ax^2 - b; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{b}{3a}} \Rightarrow B\left(\sqrt{\frac{b}{3a}}; -\frac{2b}{3}\sqrt{\frac{b}{3a}}\right)$$

$$S_1 = -\int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} (ax^3 - bx) dx = \left(-\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{2}bx^2\right)\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} = \frac{1}{4} \frac{b^2}{a}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} NK \cdot \frac{2b}{3} \sqrt{\frac{b}{3a}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \frac{2b}{3} \sqrt{\frac{b}{3a}} = \frac{\sqrt{3}b^2}{9a}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Câu 114. (Sở Phú Thọ 2023) Trong mặt phẳng Oxy , gọi (H) là tập hợp điểm $M(x; y)$ thỏa mãn

$x^2 + y^2 = k(|x| + |y|)$ với k là số nguyên dương, S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (H) . Giá trị lớn nhất của k để $S < 250$ bằng

A. 5.

B. 4.

C. 7.

D. 6.

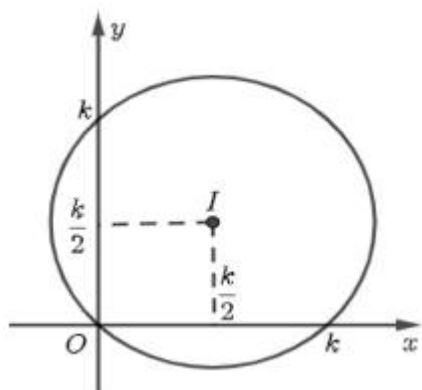
Lời giải

Chọn D

Do tính đối xứng qua Ox, Oy của (H) nên ta chỉ cần xét khi $x > 0; y > 0$. Khi đó

$$x^2 + y^2 = k(|x| + |y|) \text{ thành } x^2 + y^2 = k(x + y) \Leftrightarrow \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{2} (H_1).$$

Do k là số nguyên dương nên (H_1) là đường tròn tâm $I\left(\frac{k}{2}; \frac{k}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{k}{\sqrt{2}}$.



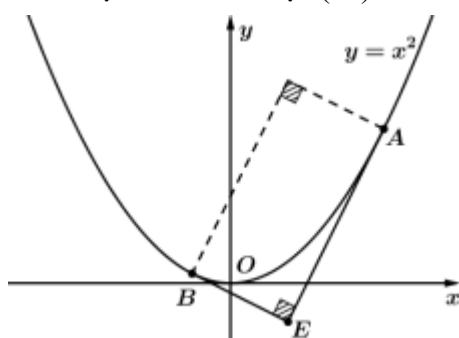
Diện tích của (H_1) ứng với $x > 0; y > 0$ là $S_1 = \pi \frac{k^2}{2} - 2 \int_0^k \left(\frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{2} - \left(x - \frac{k}{2}\right)^2} \right) dx$.

Do tính đối xứng của (H) nên $S = 4S_1$.

$$S < 250 \Leftrightarrow S_1 < \frac{125}{2} \Leftrightarrow \pi \frac{k^2}{2} - 2 \int_0^k \left(\frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{2} - \left(x - \frac{k}{2}\right)^2} \right) dx < \frac{125}{2}.$$

Dùng máy tính cầm tay, có thể thay trực tiếp các giá trị của k , thay $k = 6$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 115. (Sở Thái Nguyên 2023) Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (C) , biết rằng tồn tại hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến tại A, B và hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai tiếp tuyến tại A, B tạo thành một hình chữ nhật (H) có chiều dài gấp đôi chiều rộng (minh họa như hình vẽ)



Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và hai tiếp tuyến tại A, B . S_2 là diện tích hình chữ nhật (H) . Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

A. $\frac{125}{768}$.

B. $\frac{125}{128}$.

C. $\frac{1}{6}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $A(a; a^2), B(b, b^2)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A là: $\Delta_1: y = 2ax - a^2$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại B là: $\Delta_2: y = 2bx - b^2$.

Ta có $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Rightarrow 2a \cdot 2b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{4}a$.

$$\Delta_1 \cap \Delta_2 = E\left(\frac{4a^2 - 1}{8a}; -\frac{1}{4}\right) \Rightarrow BE = \frac{\sqrt{(4a^2 + 1)^3}}{16a^2}, AE = \frac{\sqrt{(4a^2 + 1)^3}}{8a}.$$

$$AE = 2BE \Rightarrow \frac{\sqrt{(4a^2 + 1)^3}}{8a} = 2 \cdot \frac{\sqrt{(4a^2 + 1)^3}}{16a^2} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1: y = 2x - 1 \\ \Delta_2: y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{3}{8}; -\frac{1}{4}\right).$$

$$\text{Vậy } S_2 = \frac{(4a^2 + 1)^3}{128a^3} = \frac{125}{128}.$$

$$S_1 = \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{3}{8}} \left[x^2 - \left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{16} \right) \right] dx + \int_{\frac{3}{8}}^1 [x^2 - (2x - 1)] dx = \frac{125}{768} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{6}$$

Câu 116. (Sở Cần Thơ 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + (x+1)f'(x) = 4x^3 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng:

A. $\frac{37}{12}$.

B. $\frac{8}{3}$.

C. $\frac{9}{4}$.

D. $\frac{59}{12}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f(x) + (x+1)f'(x) = 4x^3 + 2 \Leftrightarrow f'(x) \cdot (x+1) + f(x) \cdot (x+1)' = 4x^3 + 2 \\ \Leftrightarrow [f(x) \cdot (x+1)]' = 4x^3 + 2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được:

$$\int [f(x) \cdot (x+1)]' dx = \int (4x^3 + 2) dx \Leftrightarrow f(x) \cdot (x+1) = x^4 + 2x + C$$

$$\text{Với } x = -1 \Rightarrow C = 1. \text{ Khi đó } f(x) = \frac{x^4 + 2x + 1}{x+1} = x^3 - x^2 + x + 1, f'(x) = 3x^2 - 2x + 1.$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - x^2 + x + 1 = 3x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

Diện tích hình phẳng hạn bởi các đường thẳng $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng:

$$S = \int_0^3 |(x^3 - 4x^2 + 3x)| dx = \frac{9}{4}$$

Câu 117. (Sở Hải Phòng 2023) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) - f'(x) = x^3 - 6x^2 + 7x - 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x)$ và $y = xf'(x)$ bằng

A. $\frac{69}{32}$.

B. $\frac{21}{32}$.

C. $\frac{27}{32}$.

D. $\frac{135}{64}$.

Lời giải

Chọn C

Theo bài ra, ta có: $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$

$$\Rightarrow f(x) - f'(x) = x^3 + (b-3)x^2 + (c-2b)x + d - c \Rightarrow \begin{cases} b-3 = -6 \\ c-2b = 7 \\ d-c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ c = 1 \\ d = -1 \end{cases}.$$

Vậy $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 \Rightarrow xf'(x) - f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

$$\bullet xf'(x) - f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = \int_{-\frac{1}{2}}^1 |2x^3 - 3x^2 + 1| dx = \frac{27}{32}$$

Câu 118. (Sở Hải Dương 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(1) = -\frac{1}{2}$ và $f(x) + x \cdot f'(x) = (2x^3 + x^2) \cdot f^2(x), \forall x \in [1; 2]$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục $Ox, x = 1, x = 2$. Chọn mệnh đề đúng?

A. $\frac{1}{2} < S < 1$

B. $2 < S < 3$

C. $1 < S < \frac{3}{2}$

D. $0 < S < \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn D

$$f(x) + x \cdot f'(x) = (2x^3 + x^2) \cdot f^2(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} f(x) + \frac{1}{x} f'(x) = (2x + 1) \cdot f^2(x)$$

$$\frac{-\frac{1}{x^2} \cdot f(x) - \frac{1}{x} \cdot f'(x)}{f^2(x)} = -2x - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\frac{1}{x}}{f(x)} \right)' = -2x - 1 \Rightarrow \frac{\frac{1}{x}}{f(x)} = -x^2 - x + C.$$

Thay $x = 1$ vào cả hai vế suy ra $C = 0$.

$$f(x) = \frac{-1}{x^3 + x^2} \Rightarrow S = \int_1^2 \left| \frac{-1}{x^3 + x^2} \right| dx \approx 0,2123$$

Câu 119. (Cụm trường Ninh Thuận - Ninh Thuận 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $xf'(x) - f(x) = 2x^3 - 3x^2, \forall x \in \mathbb{R}$, biết $f(1) = 2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = f'(x)$ bằng

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

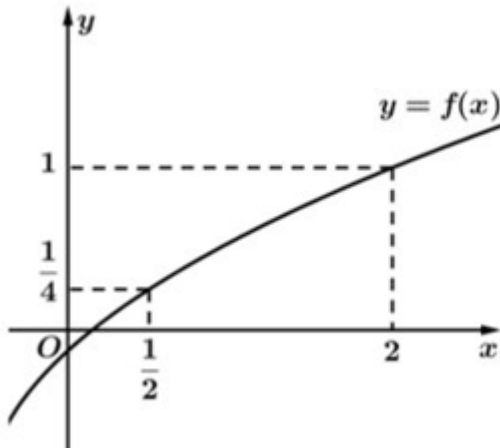
$$xf'(x) - f(x) = 2x^3 - 3x^2 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 2x - 3 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 2x - 3 \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = x^2 - 3x + C$$

Vì $f(1) = 2$ nên suy ra $C = 4$ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x; f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$.

$$\text{Ta có } f(x) = f'(x) \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 10x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 \pm \sqrt{2} \end{cases}.$$

$$\text{Diện tích cần tính là } \int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}} |f(x) - f'(x)| dx = \int_{2-\sqrt{2}}^{2+\sqrt{2}} |x^3 - 6x^2 + 10x - 4| dx = 2.$$

Câu 120.(Chuyên Quang Trung – Bình Phước 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $(0; +\infty)$, có đồ thị như hình vẽ đồng thời thỏa mãn $f'(x) - \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{5}{18} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right), \forall x > 0$



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x) - (x-1)^2}{x}$ và $y = 0$ bằng

- A. $\frac{37}{24} - \frac{17}{9} \ln 2$.
- B. $\frac{37}{24} - \frac{11}{9} \ln 2$.
- C. $\frac{37}{24} - \frac{13}{9} \ln 2$.
- D. $\frac{31}{24} - \frac{13}{9} \ln 2$.

Lời giải

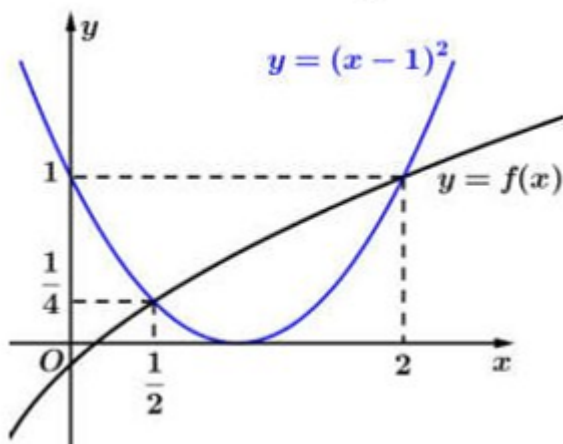
Chọn C

Ta có: $f'(x) - \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{5}{18} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right), \forall x > 0 \Leftrightarrow \left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{5}{18} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right), \forall x > 0$

$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{5}{18} \left(x + \frac{1}{x}\right) + C, \forall x > 0$. Thế $x = 2$ ta có: $f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{18} \cdot \frac{5}{2} + C$.

Nhìn vào đồ thị dễ thấy $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}; f(2) = 1$ nên suy ra $C = \frac{5}{9}$ tức

$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{5}{18} \left(x + \frac{1}{x} + 2\right), \forall x > 0$.



Xét phương trình $\frac{f(x) - (x-1)^2}{x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = (x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}$

Ta xét tích phân sau: $I_{(1)} = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx$. Đặt $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$, khi đó:

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^2 t f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2} = \int_{\frac{1}{2}}^2 f\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x} = I_{(2)}$$

Suy ra: $I_{(1)} + I_{(2)} = 2I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} \left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} \left(\frac{5}{18} \left(x + \frac{1}{x} + 2 \right) \right) dx \Rightarrow I = \frac{5(4\ln 2 + 3)}{36}$

Vậy diện tích $S = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x) - (x-1)^2}{x} dx = I - \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{(x-1)^2}{x} dx = \frac{5(4\ln 2 + 3)}{36} - \ln 4 + \frac{9}{8} = \frac{37}{24} - \frac{13}{9} \ln 2$.

Câu 121.(THPT Hai Bà Trưng – Huế 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$, $f(1) = 1$ và thỏa mãn $x^3 f(x) + 2f^3(x) = 2x^4 f'(x)$, $\forall x \in (0; +\infty)$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$; $x = 4$.

A. $\frac{15}{2}$.

B. $\frac{14}{3}$.

C. $\frac{255}{4}$.

D. $\frac{62}{5}$.

Lời giải

Chọn D

$$x^3 f(x) + 2f^3(x) = 2x^4 f'(x) \text{ (xét trên } (0; +\infty))$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 \cdot \left(f'(x) - \frac{1}{2x} f(x) \right) = 2f^3(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot f'(x) - \frac{1}{2x\sqrt{x}} f(x) = \frac{f^3(x)}{x^4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{\sqrt{x}} \right)' = \left(\frac{f(x)}{\sqrt{x}} \right)^3 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot (\text{Đặt } \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = u.)$$

$$\Rightarrow u' = u^3 \cdot \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow \frac{u'}{u^2} = \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow -\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2x^2} + c$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x}{2y^2(x)} = -\frac{1}{2x^2} + c. \text{ Thay } x=1 \Rightarrow c=0$$

$$\Rightarrow f^2(x) = x^3 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^3} \Rightarrow S = \int_1^4 f(x) dx = \frac{62}{5}$$

Câu 122. (THPT Phan Huy Chú - Hà Nội 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1; 2]$ thỏa mãn $f(2) = 6$, $\int_{-1}^2 f(x) dx = 0$ và $\int_{-1}^2 [f'(x)]^2 dx = 36$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng

A. $\frac{32}{3}$.

B. $\frac{35}{3}$.

C. $\frac{28}{3}$.

D. $\frac{26}{3}$.

Lời giải

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^2 f(x) d(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)f(x) \Big|_{-1}^2 - \int_{-1}^2 (x+1)f'(x) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^2 (x+1)f'(x) dx = 3f(2) = 18$$

Xét tích phân $\int_{-1}^2 [f'(x) - k(x+1)]^2 dx = 0$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^2 [f'(x)]^2 dx - 2k \int_{-1}^2 f'(x) \cdot (x+1) dx + k^2 \int_{-1}^2 (x+1)^2 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow 9k^2 - 36k + 36 = 0 \Leftrightarrow k = 2.$$

Suy ra $\int_{-1}^2 [f'(x) - 2(x+1)]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2(x+1) \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + C$.

Mà $f(2) = 6 \Rightarrow C = -2$. Suy ra $f(x) = x^2 + 2x - 2$. Khi đó $f'(x) = 2x + 2$.

Xét phương trình $f(x) = f'(x) \Leftrightarrow x = \pm 2$.

$$S = \int_{-2}^2 |f(x) - f'(x)| dx = \frac{32}{3}$$

Câu 123. (Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + xf'(x) = 4x^3 - 6x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng

A. $\frac{71}{6}$

B. $\frac{45}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{7}{12}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) + xf'(x) = 4x^3 - 6x^2 \Rightarrow (xf(x))' = 4x^3 - 6x^2 \Rightarrow xf(x) = x^4 - 2x^3 + C$.

Cho $x = 0 \Rightarrow C = 0$, khi đó $f(x) = x^3 - 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x$.

Xét phương trình $x^3 - 2x^2 = 3x^2 - 4x \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$.

Vậy diện tích $S = \int_0^4 |x^3 - 5x^2 + 4x| dx = \int_0^1 |x^3 - 5x^2 + 4x| dx + \int_1^4 |x^3 - 5x^2 + 4x| dx = \frac{71}{6}$.

Câu 124. (Sở Bắc Giang 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện $f(0) = 0, (x^2 + 1)f'(x) - xf(x) = -x^3 - x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và đường thẳng $x = 3$ xấp xỉ giá trị nào nhất trong các giá trị sau đây?

A. 7,0

B. 6,3

C. 6,7

D. 6,0 .

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $(x^2 + 1)f'(x) - xf(x) = -x^3 - x, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} f'(x) - \frac{x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}} f(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} f(x) \right]' = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} f(x) = -\sqrt{x^2 + 1} + C \quad (*)$$

Vì $f(0) = 0 \Rightarrow C = 1$; Thế vào $(*)$ ta được $f(x) = -(x^2 + 1) + \sqrt{x^2 + 1}$.

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow -(x^2 + 1) + \sqrt{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Khi đó $S = \int_0^3 |f(x)| dx = S = \int_0^3 \left| -(x^2 + 1) + \sqrt{x^2 + 1} \right| dx \approx 6,3$.

Câu 125. (Sở Sơn La 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(-1; +\infty)$ và thỏa

mãn $2f(x) + (x^2 - 1)f'(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 3}}, \forall x \in (-1; +\infty)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị

hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0; x = 1$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 1)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(2; 3)$.

D. $(3; 4)$.

Lời giải

Chọn A

$$2f(x) + (x^2 - 1)f'(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) + \underbrace{\frac{2}{x^2 - 1}}_{p(x)} f'(x) = \frac{x(x+1)}{(x-1)\sqrt{x^2 + 3}} \quad (*)$$

$$\text{Tổng quát: } e^{\int p(x) dx} \cdot (f'(x) + p(x)f(x)) = \left[e^{\int p(x) dx} \cdot f(x) \right]'$$

$$\int p(x) dx = \int \frac{2}{x^2 - 1} dx = \int \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)(x-1)} dx = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Rightarrow e^{\int p(x) dx} = \frac{x-1}{x+1}$$

Nhân 2 vế của (*) với $\frac{x-1}{x+1}$ ta được:

$$\left[\frac{x-1}{x+1} \cdot f(x) \right]' = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} \cdot f(x) = \sqrt{x^2+3} + C$$

$$\text{Thay } x=1 \Rightarrow c+2=0 \Leftrightarrow C=-2 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} \cdot f(x) = \sqrt{x^2+3} - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} f(x) = \frac{x^2+3-4}{\sqrt{x^2+3}+2} \Rightarrow \frac{f(x)}{x+1} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+3}+2}. \text{ Ta có } S = \int_0^1 |f(x)| dx \approx 0,6$$

Câu 126. (THPT Liên Trường, Nghệ An 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=1, f(x) > 0$ với mọi $x \geq 0$ và $f(x) - f'(x) = e^{-2x} \cdot f^2(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = 0, x = 1$ gần bằng với số nào sau nhất?

A. 1,25.

B. 1,5.

C. 1.

D. 1,75.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f(x) - f'(x) = e^{-2x} \cdot f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f'(x)}{f^2(x)} = e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x \cdot f(x) - e^x \cdot f'(x)}{f^2(x)} = e^{-x} \Leftrightarrow \left(\frac{e^x}{f(x)} \right)' = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{f(x)} = -e^{-x} + C.$$

Vì $f(0)=1$ nên suy ra $C = 2$.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{-e^{-x} + 2}.$$

$$\text{Do đó } S = \left| \int_0^1 \frac{e^x}{-e^{-x} + 2} dx \right| = 1,23.$$

Câu 127. (Sở Trà Vinh 2023) Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + x \cdot f'(x) + f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x), y = f'(x)$.

A. $S = 4\pi$.

B. $S = 8\pi$.

C. $S = 8$.

D. $S = 4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\begin{aligned}f(x) + x \cdot f'(x) + f'(x) &= 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4 \\ \Leftrightarrow ((x+1)f(x))' &= 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4 \\ \Leftrightarrow (x+1)f(x) &= x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x + C.\end{aligned}$$

Cho $x = -1 \Rightarrow C = 2$ suy ra $(x+1)f(x) = (x+1)(x^3 - 3x^2 + 2x + 2) \Leftrightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$.

$$\text{Do đó } f'(x) = 3x^2 - 6x + 2, \text{ giải phương trình } f(x) = f'(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = f(x), y = f'(x)$ bằng

$$S = \int_0^2 |f(x) - f'(x)| dx = \int_0^2 |x^3 - 6x^2 + 8x| dx = 8.$$

Câu 128. (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng 2023) Cho hàm số

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3, (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị (C) . Gọi $y = g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị (P) đi qua gốc tọa độ. Biết hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và (P) lần lượt là $-1; 1; 2$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng

A. $\frac{27}{4}$. **B.** $\frac{37}{8}$. **C.** $\frac{17}{3}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) - g(x) = a(x+1)(x-1)(x-2)$.

Mặt khác ta có $f(0) - g(0) = 3 \Rightarrow f(x) - g(x) = \frac{3}{2}(x+1)(x-1)(x-2)$.

$$\text{Khi đó } S = \int_{-1}^2 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-1}^2 \left| \frac{3}{2}(x+1)(x-1)(x-2) \right| dx = \frac{37}{8}.$$

Câu 129. (Sở Thái Bình 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$f'(x) + 4x - 6x \cdot e^{x^2 - f(x) - 1} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = -1$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đồ thị hàm số $y = f'(x) + f''(x)$ bằng

A. $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{32}{3}$. **C.** $\frac{22}{3}$. **D.** $\frac{27}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) + 4x - 6x \cdot e^{x^2 - f(x) - 1} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow f'(x) + 4x = 6x \cdot e^{x^2 - f(x) - 1} \Leftrightarrow [f'(x) + 4x] e^{f(x) + 1} = 6x \cdot e^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow [f'(x) + 4x] e^{f(x) + x^2 + 1} = 6x \cdot e^{3x^2} \Leftrightarrow [e^{f(x) + 2x^2 + 1}]' = 6x \cdot e^{3x^2}$$

Suy ra $e^{f(x)+2x^2+1} = \int 6x \cdot e^{3x^2} dx = e^{3x^2} + C$.

Vì $f(0) = -1$ nên suy ra $C = 0$.

Vậy $f(x) = x^2 - 1$.

Do đó, ta có $f'(x) = 2x$. $f''(x) = 2$.

Xét phương trình $f(x) - [f'(x) + f''(x)] = x^2 - 1 - (2x + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy $S = \int_{-1}^3 [f(x) - [f'(x) + f''(x)]] dx = \int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 3) dx = \frac{32}{3}$.

Câu 130. (Sở Hậu Giang 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn điều kiện $(x^2 + 1)f'(x) + xf(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = -2$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{1+f(x)}$, hai trục tọa độ và đường thẳng $x = 3$. Quay hình (H) xung quanh trục Ox ta được một khối tròn xoay có thể tích V bằng

A. 14π .

B. 15π .

C. 12π .

D. 13π .

Lời giải

Chọn C

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)f'(x) + xf(x) &= -x \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} \cdot f'(x) + \frac{2xf(x)}{2\sqrt{x^2 + 1}} &= -\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + 1} \cdot f(x) \right)' &= \left(-\sqrt{x^2 + 1} \right)' \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} \cdot f(x) &= -\sqrt{x^2 + 1} + C \end{aligned}$$

Vì $f(0) = -2$ nên $C = 1$. Vậy $f(x) = -1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Khi đó: $g(x) = \frac{1}{1+f(x)} = \sqrt{x^2 + 1}$

Thể tích $V = \pi \int_0^3 \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)^2 dx = 12\pi$.

Câu 131. (Sở Sóc Trăng 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 0$ và $f(x) + f'(x) = \sin x + x \cdot \sin x + x \cdot \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành, trục tung và $x = \frac{\pi}{2}$ bằng

A. π .

B. $\frac{\pi}{2}$.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) + f'(x) = \sin x + x \cdot \sin x + x \cdot \cos x$

$$\Leftrightarrow e^x \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) = (\sin x + x \cdot \sin x + x \cdot \cos x)e^x$$

$$\Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = (e^x \sin x + e^x x \cdot \sin x + e^x x \cdot \cos x)$$

$$\Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = (e^x \cdot x \cdot \sin x)'$$

$$\text{Suy ra } \int [e^x \cdot f(x)]' dx = \int (e^x x \cdot \sin x)' dx \Leftrightarrow e^x \cdot f(x) = e^x x \cdot \sin x + C.$$

Do $f(0) = 0$ suy ra $C = 0$. Khi đó $e^x \cdot f(x) = e^x x \cdot \sin x \Leftrightarrow f(x) = x \cdot \sin x$.

$$\text{Suy ra } S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |x \sin x| dx = 1.$$

Câu 132. (Sở Hà Tĩnh 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f(x) + xf'(x) + f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$.

A. $S = 8$.

B. $S = 4$.

C. $S = 8\pi$.

D. $S = 4\pi$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$f(x) + xf'(x) + f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4$$

$$\Leftrightarrow f(x) + (x+1)f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4 (*)$$

$$\Leftrightarrow [(x+1)f(x)]' = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 4$$

$$\text{mà } \int (4x^3 - 6x^2 - 2x + 4) dx = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x + C \text{ nên } (x+1)f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x + C_1.$$

Cho $x = -1$ thì $0 = -2 + C_1$ suy ra $C_1 = 2$, ta được $(x+1)f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x + 2$.

- Với $x = -1$ thay vào (*) thì $f(-1) = -4$;

- Với $x \neq -1$ thì $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$,

Do đó, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$.

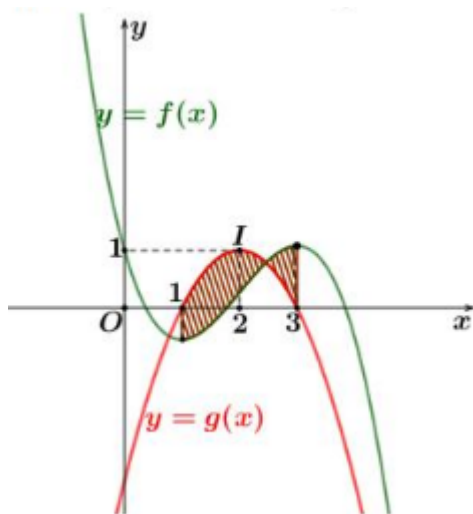
Xét phương trình $f(x) = f'(x) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x + 2 = 3x^2 - 6x + 2$.

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Do đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 |f(x) - f'(x)| dx = \int_0^4 |x^3 - 6x^2 + 8x| dx \\ &= \int_0^2 |x^3 - 6x^2 + 8x| dx + \int_2^4 |x^3 - 6x^2 + 8x| dx \\ &= \left| \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \right| + \left| \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \right| = 8. \end{aligned}$$

Câu 133. (Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương 2023) Cho hàm đa thức bậc ba $y = f(x)$ và hàm số $y = g(x)$ với đồ thị là Parabol đỉnh I như hình vẽ dưới đây.



Biết rằng đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 x_2 x_3 = 12$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x); y = g(x); x = 1; x = 3$ gần số nào nhất trong các số sau đây?

A. 2,27.

B. 1,27.

C. 2,17.

D. 1,17.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị, ta suy ra $(P): y = g(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Xét hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a < 0) \rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

$$\text{Từ đồ thị, ta suy ra: } \begin{cases} d = 1 \\ f'(1) = 0 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 27a + 6b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ b = -6a \\ c = 9a \end{cases}.$$

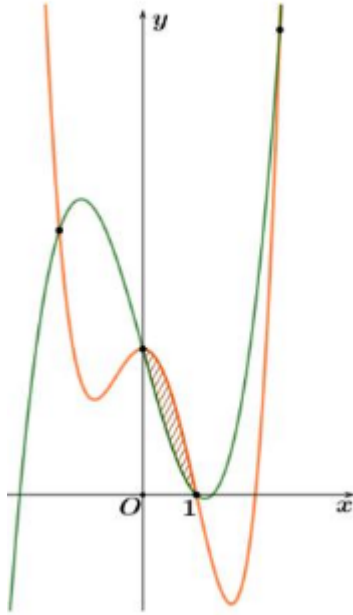
Phương trình hoành độ giao điểm $f(x) - g(x) = ax^3 + (1 - 6a)x^2 + (9a - 4)x + 4$ có 3 nghiệm

$$x_1, x_2, x_3 \text{ thỏa mãn } x_1 x_2 x_3 = 12 \Rightarrow -\frac{4}{a} = 12 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy diện tích hình phẳng là } S = \int_1^3 \left| -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x + 4 \right| dx \approx 1,178.$$

Câu 134. (Cụm Thuận Thành - Bắc Ninh 2023) Cho hàm số

$y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$) và $y = g(x) = x^3 - 4x + 3$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Biết hai đồ thị $y = f(x)$, $y = g(x)$ cắt nhau tại 4 điểm phân biệt có hoành độ $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ thỏa mãn $x_1 + x_4 = x_3$ và $x_1x_4 + 4(x_2 + x_3) = 0$ đồng thời diện tích phần gạch chéo trên hình bằng $\frac{7}{10}$. Hỏi diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$, $h(x) = 4a + b - c + d + e$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. (2;4).

B. (7;8).

C. (11;13).

D. (29;32).

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị suy ra $x_2 = 0, x_3 = 1$.

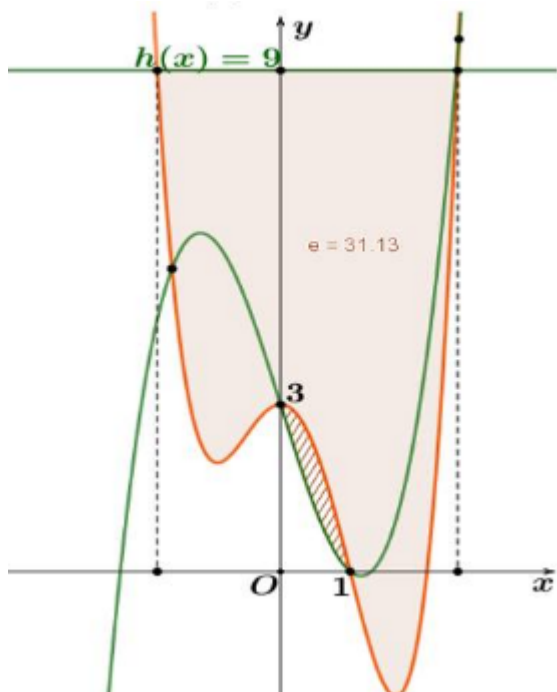
Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_4 = 1 \\ x_1x_4 = -4 \end{cases} \Rightarrow x_1, x_4$ là nghiệm phương trình: $x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm: $f(x) - g(x) = ax : (x-1)(x^2 - x - 4), a > 0$.

Ta lại có: $\frac{7}{10} = a \int_0^1 |x(x-1)(x^2 - x - 4)| dx \Rightarrow a = 1$.

Mà $f(x) - g(x) = ax^4 + (b-1)x^3 + cx^2 + (d+4)x$, vì $e = 3$. Từ đó suy ra $\begin{cases} b = -1 \\ c = -3 \\ d = 0 \end{cases}$.

Suy ra $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 3$ và $h(x) = 4a + b - c + d + e = 9$.



Phương trình $f(x) - h(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x \approx -1,77 \\ x \approx 2,54 \end{cases}$.

Vậy diện tích hình phẳng là $S = \int_{-1,77}^{2,54} (6 - x^4 + x^3 + 3x^2) dx \approx 31,13$.

Câu 135. (Chuyên Vinh 2023) Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $g(x) = f(x) \cdot e^{-2x}$ có hai giá trị cực trị là 2 và $-e^6$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2g(x)$ và $h(x) = (2ax + b) \cdot e^{-2x}$ bằng

A. $2 + \frac{1}{e^6}$.

B. $e^6 - 2$.

C. $2 + e^6$.

D. $2 - \frac{1}{e^6}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = 2ax + b$.

Hơn nữa $g'(x) = f'(x) \cdot e^{-2x} - 2f(x) \cdot e^{-2x} = (f'(x) - 2f(x)) \cdot e^{-2x}$ nên

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases} (a < b).$$

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = 2g(x)$ và $h(x) = (2ax + b) \cdot e^{-2x}$ là

$$2g(x) = h(x) \Leftrightarrow 2f(x) \cdot e^{-2x} = (2ax + b) \cdot e^{-2x} \Leftrightarrow [2f(x) - f'(x)] \cdot e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2g(x)$ và $h(x) = (2ax + b) \cdot e^{-2x}$ bằng

$$\int_a^b |2g(x) - h(x)| dx = \left| \int_a^b g'(x) dx \right| = |g(a) - g(b)| = 2 + e^6.$$

Câu 136. (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc ba thỏa mãn:

$$f(1) = 0 \text{ và } 2(x+3)f'(x) - f(x) = (5x^2 + 3x - 16)(x+3), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành là

A. $\frac{131}{4}$.

B. $\frac{133}{4}$.

C. $\frac{135}{4}$.

D. $\frac{129}{4}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Từ giả thiết } 2(x+3)f'(x) - f(x) = (5x^2 + 3x - 16)(x+3) \Rightarrow f(x) = (x+3)(ax^2 + bx + c) (a \neq 0)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + (2b+6a)x + 3b + c$$

$$\text{Vì } f(1) = 0 \text{ nên } a + b + c = 0 (*)$$

Khi đó

$$2(x+3)f'(x) - f(x) = (5x^2 + 3x - 16)(x+3), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 2f'(x) - (ax^2 + bx + c) = 5x^2 + 3x - 16$$

$$\Leftrightarrow 2[3ax^2 + (2b+6a)x + 3b + c] - (ax^2 + bx + c) = 5x^2 + 3x - 16$$

$$\Leftrightarrow 5ax^2 + (3b+12a)x + 6b + c = 5x^2 + 3x - 16$$

Đồng nhất hệ số ta được

$$\begin{cases} 5a = 5 \\ 3b + 12a = 3 \\ 6b + c = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \text{ (t/m(*))} \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = (x+3)(x^2 - 3x + 2)$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y = f(x)$ và trục hoành:

$$(x+3)(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Diện tích hình phẳng cần tìm là } S = \int_{-3}^2 |(x+3)(x^2 - 3x + 2)| dx = \frac{131}{4}.$$