

CD 6: CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Dạng 1: Chứng minh một số (một tổng) là số chính phương
Dạng 2: Chứng minh một số (một tổng) không là số chính phương
Dạng 3: Tìm số chính phương

Dạng 1: Chứng minh một số (một tổng) là số chính phương

Câu 1. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2022 - 2023)

Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$. Chứng minh rằng: $abcd + 2023$ viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

Lời giải

Cách 1:

Ta có: $(2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4m(m+1) + 1$

Do đó ta có $(2m+1)^2$ là số chính phương lẻ chia 8 luôn dư 1 .

Nếu a, b, c, d đều lẻ thì a^2, b^2, c^2, d^2 chia 8 đều dư 1 dẫn đến không xảy ra $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$ (vì vế trái chia 8 dư 1 , vế phải chia 8 dư 3)

Vậy trong các số a, b, c, d phải có ít nhất một số chẵn nên $abcd$ chẵn $\Rightarrow abcd + 2023$ lẻ.

Đặt $abcd + 2023 = 2k + 1 (k \in \mathbb{Z}) = (k+1)^2 - k^2$

Cách 2:

$$a^2 - b^2 = c^2 + d^2 \Rightarrow (a-b)(a+b) = c^2 + d^2$$

Giả sử cả bốn số a, b, c, d đều lẻ thì $(a-b), (a+b)$ chẵn $\Rightarrow (a-b)(a+b):4$

$$\Rightarrow (c^2 + d^2):4$$

mà c^2, d^2 là các số chính phương lẻ khi chia cho 4 dư 1 nên $\Rightarrow (c^2 + d^2):4$ dư 2 (mâu thuẫn). Điều giả sử sai.

Suy ra ít nhất một trong bốn số có một số chẵn $\Rightarrow abcd$ chẵn $\Rightarrow abcd + 2023$ lẻ.

$$abcd + 2023 = \frac{abcd}{2} + \frac{abcd}{2} + 1011 + 1012 = \left(\frac{abcd}{2} + 1012 \right) + \left(\frac{abcd}{2} + 1011 \right)$$

Ta có:

$$= \left[\left(\frac{abcd}{2} + 1012 \right) + \left(\frac{abcd}{2} + 1011 \right) \right] \cdot 1$$

$$= \left[\left(\frac{abcd}{2} + 1012 \right) + \left(\frac{abcd}{2} + 1011 \right) \right] \cdot \left[\left(\frac{abcd}{2} + 1012 \right) - \left(\frac{abcd}{2} + 1011 \right) \right]$$

$$= \left(\frac{abcd}{2} + 1012 \right)^2 - \left(\frac{abcd}{2} + 1011 \right)^2$$

mà $abcd$ chẵn nên $abcd : 2$ hay $\frac{abcd}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(\frac{abcd}{2} + 1012 \right)^2 ; \left(\frac{abcd}{2} + 1011 \right)^2$ là các số chính phương.

Vậy $abcd + 2023$ viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

Câu 2. (HSG 7 thị xã Nghi Sơn 2022 - 2023)

Cho n là số tự nhiên có hai chữ số, Tìm n biết $n+4$ và $2n$ đều là các số chính phương.

Lời giải

Nhận xét: Số chính phương không thể tận cùng là $2; 3; 7; 8$

Vì $2n$ là số chính phương nên n chẵn $\Rightarrow n$ tận cùng là $0; 2; 4; 6; 8$

- Nếu n tận cùng là $4; 8$ thì $n+4$ không phải là số chính phương.
- Nếu n tận cùng là 6 thì $2n$ không phải là số chính phương.

Do đó n chỉ có thể tận cùng là 0 hoặc $2 \Rightarrow n+4$ chỉ có thể tận cùng là 4 hoặc 6 .

Vì n là số có hai chữ số nên $14 \leq n+4 < 104$. Mà $n+4$ là số chính phương tận cùng là 4 hoặc 6 nên $n+4 \in \{16; 36; 64\}$

- Nếu $n+4=16 \Rightarrow n=12$ khi đó $2n=24$ (không thỏa mãn)
- Nếu $n+4=36 \Rightarrow n=32$ khi đó $2n=64$ (thỏa mãn)
- Nếu $n+4=64 \Rightarrow n=60$ khi đó $2n=120$ (không thỏa mãn)

Vậy $n=32$

Câu 3. (HSG 7 Thành phố Ninh Bình 2022 - 2023)

Cho 5 số dương đôi một khác nhau sao cho mỗi số không có ước nguyên tố nào khác 2 và 3 . Chứng minh rằng trong 5 số đó tồn tại hai số mà tích của chúng là một số chính phương

Lời giải

Mỗi số trong 5 số có dạng $2^x \cdot 3^y$ trong đó x, y là số tự nhiên khác 0 .

$(x; y)$ chỉ có thể $(C; C); (L; L); (C; L); (L; C)$ vì có 5 số 4 dạng

nên tồn tại 2 số cùng một dạng nên tích 2 số này là số chính phương.

Câu 4. (HSG 7 huyện Điện Bàn 2022 - 2023)

Cho số tự nhiên a gồm 60 chữ số 1 , số tự nhiên b gồm 30 chữ số 2 . Chứng minh rằng hiệu $a-b$ là một số chính phương.

Lời giải

$$a = \underbrace{111 \dots 111}_{60 \text{ c/s } 1} = \underbrace{111 \dots 111}_{30 \text{ c/s } 1} \underbrace{00 \dots 00}_{30 \text{ c/s } 0} + \underbrace{111 \dots 111}_{30 \text{ c/s } 1} = \underbrace{111 \dots 111}_{30 \text{ c/s } 1} \cdot 10^{30} + \underbrace{111 \dots 111}_{30 \text{ c/s } 1}$$

Ta có:

$$c = \underbrace{111\dots111}_{30c/1} \Rightarrow 9c + 1 = \underbrace{999\dots99}_{30c/9} + 1 = 10^{30}$$

Đặt

$$\text{Khi đó } a = c \cdot (9c + 1) + c = 9c^2 + 2c \quad \text{và} \quad b = 2c$$

$$\text{Xét hiệu } a - b = 9c^2 + 2c - 2c = 9c^2 = (3c)^2$$

$$\text{Vậy } a - b = (3c)^2 \text{ là số chính phương.}$$

Câu 5. (HSG 7 huyện HƯNG HÀ, trường VĂN LANG 2022 - 2023)

$$\text{Biết } \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 11x. \text{ Chứng minh rằng } 110x \text{ là số chính phương.}$$

Lời giải

Nhận xét: Vế trái của đẳng thức luôn ≥ 0 nên vế phải ≥ 0

$$\text{suy ra } 11x \geq 0 \text{ hay } x \geq 0.$$

Vì $x \geq 0$ nên ta có

$$\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 11x$$

$$x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + x + \frac{1}{20} + \dots + x + \frac{1}{110} = 11x$$

$$\text{suy ra } x = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \text{ (t/m)}$$

$$\text{Với } x = \frac{10}{11} \text{ thì } 110x = 100 = 10^2 \text{ nên } 110x \text{ là số chính phương.}$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình 2021 - 2022S)

Cho các số thực dương m và n thỏa mãn: $m^{2020} + n^{2020} = m^{2021} + n^{2021} = m^{2022} + n^{2022}$ và $P = 7 + m^2 + n^2$. Chứng minh rằng P là số chính phương.

Lời giải

$$m^{2020} + n^{2020} = m^{2021} + n^{2021} = m^{2022} + n^{2022}$$

$$\text{Suy ra } m^{2022} + n^{2022} - m^{2021} - n^{2021} = 0 \text{ và } m^{2021} + n^{2021} - m^{2020} - n^{2020} = 0$$

$$\text{Hay } m^{2021} \cdot (m - 1) + n^{2021} \cdot (n - 1) = 0 \text{ và } m^{2020} \cdot (m - 1) + n^{2020} \cdot (n - 1) = 0$$

Từ đó suy ra

$$\Rightarrow m^{2021} \cdot (m - 1) - m^{2020} \cdot (m - 1) + n^{2021} \cdot (n - 1) - n^{2020} \cdot (n - 1) = 0$$

$$\Rightarrow m^{2020} \cdot (m - 1)^2 - n^{2020} \cdot (n - 1)^2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } m^{2020} > 0; n^{2020} > 0; (m - 1)^2 \geq 0; (n - 1)^2 \geq 0$$

Nên $m^{2020}(m-1)^2 \geq 0$ và $n^{2020}(n-1)^2 \geq 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $m^{2020}(m-1)^2 = 0$ và $n^{2020}(n-1)^2 = 0$ hay $(m-1)^2 = 0$ (do $m^{2020} > 0$) và $(n-1)^2 = 0$ (do $n^{2020} > 0$)

Từ đó ta có $m-1=0$ và $n-1=0$ hay $m=1$ và $n=1$

Khi đó $P = 7 + m^2 + n^2 = 7 + 1 + 1 = 9 = 3^2$

Vậy P là số chính phương.

Câu 7. (HSG 7 huyện Quan Hoa, tỉnh Thanh Hoá 2021 - 2022)

Cho các số nguyên dương n thỏa mãn $n+1$ và $2n+1$ đều là số chính phương. Chứng minh rằng $n:24$.

Lời giải

Đặt $n+1=k^2, 2n+1=m^2 (k, m \in \mathbb{N})$

Vì $2n+1$ là số lẻ nên m là số lẻ. Đặt $m=2t+1 (t \in \mathbb{N})$ ta có: $2n+1=(2t+1)^2$
 $\Rightarrow n=2t(t+1) \Rightarrow n$, suy ra $n=2t(t+1)$ hay n là số chẵn $\Rightarrow k$ là số lẻ.

Do vậy $n=k^2-1=(k-1).(k+1)$ là tích của hai số chẵn liên tiếp nên $n:8$

Mặt khác: $(n+1)+(2n+1)=3n+2=k^2+m^2$ là số chia 3 dư 2

Mà số chính phương khi chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1 nên k^2 và m^2 chia 3 dư 1

Do đó $m^2-k^2=(2n+1)-(n+1)=n:3$. Vì $(3,8)=1$ nên $n:24$ (đpcm).

Câu 8. (HSG 7 huyện Nghĩa Hành năm 2021 - 2022)

Cho 5 số chính phương bất kì có chữ số hàng chục khác nhau còn chữ số hàng đơn vị đều là 6 . Chứng minh rằng tổng các chữ số hàng chục của 5 số chính phương đó là một số chính phương.

Lời giải

Nếu một số chính phương $M=a^2$ có chữ số hàng đơn vị là 6 thì a là số chẵn,

Do đó $a:2 \Rightarrow a^2:4$.

Theo dấu hiệu chia hết cho 4 thì hai chữ số tận cùng của M phải chia hết cho 4.

Nên 2 chữ số tận cùng của M phải là một trong các số: 16; 36; 56; 76; 96.

Mà 5 số chính phương bất kì có chữ số hàng chục khác nhau, chữ số hàng đơn vị đều là 6 nên 5 chữ số hàng chục đó chính là: 1; 3; 5; 7; 9.

Từ đó tổng các chữ số hàng chục của 5 số chính phương đó là:

$1+3+5+7+9=25=5^2$ là số chính phương.

Câu 9. (HSG 7 huyện Tam Dương năm 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và thỏa mãn $b = 3a + c$.
 Chứng minh rằng tích $f(1) \cdot f(-2)$ là bình phương của một số nguyên.

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Nên: $f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = a + b + c + d$

$$f(-2) = a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d = -8a + 4b - 2c + d$$

Khi đó: $f(1) - f(-2) = (a + b + c + d) - (-8a + 4b - 2c + d) = 9a - 3b + 3c$
 $= (9a + 3c) - 3b = 3(3a + c) - 3b = 3b - 3b = 0$ (do $b = 3a + c$).

Suy ra $f(1) = f(-2)$

Do đó $f(1) \cdot f(-2) = [f(1)]^2 = (a + b + c + d)^2$ là bình phương của một số nguyên.

Câu 10. (HSG 7 huyện Vũ Thư năm 2021 - 2022)

Cho đa thức: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là các số nguyên). Biết $7a + b + c = 0$.
 Chứng minh rằng $f(3) \cdot f(-2)$ là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}$)

$$\Rightarrow f(3) = 27a + 9b + 3c + d \quad \text{và} \quad f(-2) = -8a + 4b - 2c + d$$

$$\Rightarrow f(3) - f(-2) = 35a + 5b + 5c = 5(7a + b + c) = 0 \quad (\text{vì } 7a + b + c = 0)$$

$$\Rightarrow f(3) = f(-2) \Rightarrow f(3) \cdot f(-2) = [f(3)]^2$$

Vì $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ nên $f(3) \in \mathbb{Z} \Rightarrow [f(3)]^2$ là số chính phương.

Vậy $f(3) \cdot f(-2)$ là số chính phương.

Câu 11. (HSG 7 huyện Vũ Thư, tỉnh Thái Bình, 2022- 2023)

Cho đa thức: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Biết a, b, c là các số nguyên và $2a + b = 0$. Chứng minh rằng: $f(5) \cdot f(-3)$ là số chính phương.

Lời giải

Vì $f(x) = ax^2 + bx + c$, nên:

$$f(5) = 25a + 5b + c$$

$$f(-3) = 9a - 3b + c \quad (1)$$

$$\text{Mà: } 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a \quad (2)$$

$$f(5) = 15a + c$$

$$f(-3) = 15a + c$$

Do đó: $f(5).f(-3) = (15a + c)^2$ là số chính phương (vì a, c đều là số nguyên)

Câu 12. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, trường Đào Duy Từ; huyện Nam Trà My, trường Trà Ka; huyện Thăng Bình; huyện Bến Lức 2018 - 2019)

Cho tích $a.b$ là số chính phương và $(a, b) = 1$. Chứng minh rằng a và b đều là số chính phương

Lời giải

Giả sử a không phải là số chính phương, suy ra khi phân tích số a ra thừa số nguyên tố thì số a chứa thừa số k mũ lẻ

Vì $(a, b) = 1$ nên b không chứa thừa số nguyên tố k

Do đó $a.b$ chứa thừa số nguyên tố k mũ lẻ $\Rightarrow a.b$ không phải là số chính phương, trái với giả thiết nên giả sử sai

Vậy nếu $a.b$ là số chính phương và $(a, b) = 1$ thì a và b đều là số chính phương

Câu 13. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho tích $a.b$ là số chính phương và $(a, b) = 1$. Chứng minh rằng a và b đều là số chính phương.

Lời giải

$$\text{Đặt } a.b = c^2 \quad (1)$$

$$\text{Gọi } (a, b) = d \text{ nên } a : d, c : d$$

$$\text{Hay } a = m.d \text{ và } c = n.d \text{ với } (m, n) = 1$$

$$\text{Thay vào (1) ta được: } m.d.b = n^2.d^2$$

$$\Rightarrow m.b = n^2.d \Rightarrow \begin{cases} b : n^2 \\ n^2 : b \end{cases} \text{ do } (a, b) = 1, (b, d) = 1$$

$$\Rightarrow b = n^2$$

$$\text{Thay vào (1) ta được: } a.n^2 = n^2.d^2 \Rightarrow a = d^2$$

Vậy a và b đều là số chính phương.

Câu 14. (HSG 7 trường Phan Đình Phùng 2017 - 2018; huyện Lâm Thao 2016 - 2017)

Cho tích $a.b$ là số chính phương và $(a, b) = 1$. Chứng minh rằng a và b đều là số chính phương

Lời giải

Giả sử a không phải là số chính phương, suy ra khi phân tích số a ra thừa số nguyên tố thì số a chứa thừa số k mũ lẻ

Vì $(a, b) = 1$ nên b không chứa thừa số nguyên tố k

Do đó $a.b$ chứa thừa số nguyên tố k mũ lẻ $\Rightarrow a.b$ không phải là số chính phương, trái với giả thiết nên giả sử sai

Vậy nếu $a.b$ là số chính phương và $(a, b) = 1$ thì a và b đều là số chính phương.

Dạng 2: Chứng minh một số không là số chính phương

Câu 1. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)

Với n là số tự nhiên, chứng minh rằng: $n^2 + 2022$ không phải là số chính phương.

Lời giải

Vì n là số tự nhiên nên n^2 là số chính phương thì n^2 có dạng $4k$ hoặc $4k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$)

Nếu $n^2 = 4k$ thì $n^2 + 2022 = 4k + 2022 = 4(k + 505) + 2$

$\Rightarrow n^2 + 2022$ không phải là số chính phương

Nếu $n^2 = 4k + 1$ thì $n^2 + 2022 = 4k + 1 + 2022 = 4k + 2023 = 4(k + 505) + 3$

$\Rightarrow n^2 + 2022$ không phải là số chính phương

Vậy với mọi số tự nhiên n thì $n^2 + 2022$ không phải là số chính phương.

Câu 2. (HSG 7 huyện Quảng Xương, Tiền Hải 2022 - 2023)

Cho $A = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$. Chứng tỏ rằng A không phải là số chính phương

Lời giải

Ta có: $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111.a + 111.b + 111.c = 3.37.(a + b + c)$

Vì số chính phương phải chứa thừa số nguyên tố với số mũ chẵn.

Do đó $a + b + c = 3.37.k^2$ ($k \in \mathbb{N}$). Điều này vô lý vì: $3 \leq a + b + c \leq 27$

Vậy A không là số chính phương

Câu 3. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc-Thanh Hoá 2022 - 2023)

Cho $f(x)$ là đa thức hệ số nguyên và thỏa mãn $f(0) = 0$ và $f(1) = 2$. Chứng minh rằng $f(7)$ không thể là số chính phương.

Lời giải

Vì $f(0) = 0$ và $f(1) = 2$ nên $f(x)$ có dạng:

$f(x) = 2 + x(x - 1).g(x)$ trong đó $g(x)$ là đa thức với hệ số nguyên.

Ta có $f(7) = 2 + 42.g(7) \equiv 2 \pmod{3}$ nên $f(7)$ không thể là số chính phương

Câu 4. (HSG 7 huyện Hiệp Hoà 2022 - 2023)

Cho p là tích của 2023 số nguyên tố đầu tiên. Chứng minh rằng $p-1$ và $p+1$ không là số chính phương

Lời giải

Nhận xét: Một số chính phương khi chia cho 3 và 4 thì chỉ có thể có số dư là 0 hoặc 1

+) Từ giả thiết, suy ra p chia hết cho $2 \cdot 3$ nhưng không chia hết cho 4

Như vậy, vì $p:3$ suy ra $p-1$ chia cho 3 dư 2 (mâu thuẫn) $\Rightarrow p-1$ không là số chính phương.

+) Vì $p:2$ và p không chia hết cho 4 , suy ra p chia cho 4 dư $2 \Rightarrow p+1$ chia cho 4 dư 3 (mâu thuẫn) nên $p+1$ cũng không là số chính phương.

Vậy $p-1$, $p+1$ không là số chính phương.

Câu 5. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Trần Đức Thông 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{2001}{2000^2+1} + \frac{2001}{2000^2+2} + \dots + \frac{2001}{2000^2+2000}$. Chứng minh rằng: $1 < A^2 < 4$.

Lời giải

Tổng A có tất cả 2000 số hạng.

Ta có: $\frac{2001}{2000^2+1} > \frac{2001}{2000^2+2} > \frac{2001}{2000^2+3} > \dots > \frac{2001}{2000^2+2000}$

$$A > \frac{2001}{2000^2+2000} \cdot 2000 = \frac{2001 \cdot 2000}{2000(2000+1)} = 1 \quad (1)$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác: } A &< \frac{2001}{2000^2+1} \cdot 2000 = \frac{2001 \cdot 2000}{2000^2+1} = \frac{(2000+1) \cdot 2000}{2000^2+1} = \frac{2000^2+2000}{2000^2+1} \\ &= \frac{(2000+1) \cdot 2000}{2000^2+1} = \frac{(2000^2+1)+1999}{2000^2+1} = 1 + \frac{1999}{2000^2+1} < 2 \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $1 < A < 2$ hay $1 < A^2 < 4$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Triệu Sơn năm năm 2021 - 2022)

Chứng minh rằng nếu số tự nhiên $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $b^2 - 4ac$ là số chính phương $m^2 (m \in \mathbb{N})$.

$$\begin{aligned} &+ \quad \text{Xét} \quad 4a \cdot \overline{abc} = 4a(100a+10b+c) = 400a^2 + 40ab + 4ac \\ &= 400a^2 + 20ab + 20ab + b^2 - b^2 + 4ac \\ &= 20a(20a+b) + b(20a+b) - (b^2 - 4ac) = (20a+b) \cdot (20a+b) - (b^2 - 4ac) \\ &= (20a+b)^2 - (b^2 - 4ac) = (20a+b)^2 - m^2 = (20a+b+m)(20a+b-m) \end{aligned}$$

+ Vì $\overline{abc}$ là số nguyên tố suy ra tồn tại một trong hai thừa số $20a + b + m$ hoặc $20a + b - m$ chia hết cho số nguyên tố $\overline{abc}$.

+ Vì $b^2 - m^2 = 4ac > 0 \Rightarrow b > m$ nên:

$$20a + b - m \leq 20a + b + m < 20a + b + b < 100a + 10b + c = \overline{abc}$$

Suy ra $20a + b + m$ và $20a + b - m$ đều không chia hết cho số nguyên tố $\overline{abc}$.

Do đó điều giả sử là sai.

Vậy nếu số tự nhiên $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không là số chính phương.

Câu 7. (HSG 7 huyện Mường La năm 2021 - 2022)

Cho $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ với a, b, c là các chữ số bất kì. Chứng minh rằng S không phải là số chính phương.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} S &= \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = (100a + 10b + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) \\ &= 111a + 111b + 111c = 111(a + b + c) = 37 \cdot 3(a + b + c) \end{aligned}$$

Giả sử S là số chính phương, thì S phải chứa số nguyên tố 37 với số mũ chẵn $\Rightarrow 3(a + b + c) : 37 \Rightarrow (a + b + c) : 37$

Điều này không xảy ra vì a, b, c là các chữ số nên $0 \leq a, b, c \leq 9 \Rightarrow 0 \leq a + b + c \leq 27$.

Vậy $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ không phải là số chính phương.

Câu 8. (HSG 7 huyện Hoàng Hoá 2017-2018)

Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n để $n^2 + 2002$ là số chính phương.

Lời giải

Nếu số chính phương chia hết cho a (a là số nguyên tố) thì nó chia hết cho a^2

Giả sử: $A = n^2 + 2002$ là số chính phương.

+ Xét trường hợp 1: n là số chẵn $\Rightarrow n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 \Rightarrow A = n^2 + 2002 = 4k^2 + 2002$

Ta có: $4k^2$ chia hết cho 2 , 2002 chia hết cho $2 \Rightarrow A$ chia hết cho $2 \Rightarrow A$ chia hết cho 4

Do $4k^2$ chia hết cho 4 , còn 2002 không chia hết cho $4 \Rightarrow A$ không chia hết cho 4 (loại)

+ Xét trường hợp 2: n là số lẻ $\Rightarrow n = 2k + 1$

$\Rightarrow A$ là số chính phương lẻ, có dạng $(2b + 1)^2 = 4b^2 + 4b + 1$ chia cho 4 dư 1 .

Mà $A = (2k + 1)^2 + 2002 = 4k^2 + 4k + 2003$ chia cho 4 dư 3 (loại)

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $n^2 + 2002$ là số chính phương.

Câu 9. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Lưu Khánh Đàm 2022 - 2023)

Có tìm được hai chữ số a và b để $\overline{2011ab}$ là bình phương của một số tự nhiên không? Vì sao?

Lời giải

Ta có: $0 \leq \overline{ab} \leq 99 \Rightarrow 201100 \leq \overline{2011ab} \leq 201199$

$$448^2 < \overline{2011ab} < 449^2$$

448 và 449 là hai số tự nhiên liên tiếp

nên $\overline{2011ab}$ không là bình phương của một số tự nhiên.

Vậy không tìm được hai chữ số a và b để $\overline{2011ab}$ là bình phương của một số tự nhiên.

Dạng 3: Tìm số chính phương

Câu 1. (HSG 7 Thành Phố Phúc Yên-Trường THCS Đồng Xuân 2022 - 2023)

Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng nếu cộng chữ số hàng nghìn với 3 và trừ chữ số hàng đơn vị đi 3 ra vẫn được một số chính phương

Lời giải

Gọi $\overline{abcd}$ là số phải tìm với $a, b, c, d \in \mathbb{N}; 0 \leq a, b, c, d \leq 9; a \neq 0$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ (a+3)bc(d-3) = m^2 \end{cases} \text{ với } k, m \in \mathbb{N}; 31 < k < m < 99$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{abcd} + 3000 - 3 = m^2 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } m^2 - k^2 = 2997 \Rightarrow (m+k)(m-k) = 2997 = 81 \cdot 37 = 111 \cdot 27 = 333 \cdot 9$$

Vì tích trên là lẻ nên m, k khác tính chẵn lẻ và hai thừa số đều lẻ mà $k, m \in \mathbb{N}; 31 < k < m < 99$ nên ta có các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} m - k = 37 \\ m + k = 81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 59 \\ k = 22 \end{cases}$$

Khi đó $k^2 = 22^2 = 484$, chỉ có 3 chữ số, loại.

$$\text{TH2: } \begin{cases} m + k = 111 \\ m - k = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 69 \\ k = 42 \end{cases}$$

Khi đó $m^2 = 69^2 = 4761$; $k^2 = 42^2 = 1764$ (thỏa mãn)

Vậy số cần tìm là: 1764.

Câu 2. (HSG 7 Bắc Giang 2022 - 2023)

Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho các số $n+1$; $6n+1$; $20n+1$ đều là các số chính phương.

Lời giải

+ Số chính phương lẻ chia 8 dư 1.

+ Số chính phương chia 3 dư 0 hoặc 1 .

Ta thấy $6n+1$ là số chính phương lẻ nên chia 8 dư 1

Suy ra $6n:8 \Rightarrow 3n:4$ mà $(3;4)$ suy ra $n:4$

Nên $n+1$ là số chính phương lẻ do đó $n+1$ chia 8 dư $1 \Rightarrow n:8(1)$

Ta lại có $(n+1)+(20n+1)=21n+2$ chia 3 dư 2

Suy ra $n+1$ và $20n+1$ đều chia 3 dư 1 (số chính phương chia 3 dư 0 hoặc 1)

Từ đó ta có $n:3(2)$

Mặt khác $(3;8)=1$ (3)

Từ (1); (2); và (3) Suy ra $n:24 \Rightarrow n \in B(24) = \{0; 24; 48; \dots\}$

Vì n là số nguyên dương nên ta xét các trường hợp sau:

+ Với $n=24$ ta có $20n+1=481$ (không là số chính phương)
 $\Rightarrow n=24$ loại.

+ với $n=48$ ta có $n+1=49=7^2$; $6n+1=289=17^2$; $20n+1=961=31^2$
 $\Rightarrow n=48$ thỏa mãn bài toán

Vậy số nguyên dương nhỏ nhất $n=48$.

Câu 3. (HSG 7 olympic Mỹ Đức – Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn: $25 - b^2 = 8(a - 2023)^2$

Lời giải

$$25 - b^2 = 8(a - 2023)^2 \Rightarrow 8(a - 2023)^2 + b^2 = 25$$

Mà $b^2 \geq 0$ suy ra $8(a - 2023)^2 \leq 25 \Rightarrow (a - 2023)^2 \leq \frac{25}{8}$

Mặt khác $(a - 2023)^2$ là số chính phương nên $(a - 2023)^2 = 0$ hoặc $(a - 2023)^2 = 1$

Nếu $(a - 2023)^2 = 0$ thì $b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$ (Do $b \in \mathbb{N}$)

Nếu $(a - 2023)^2 = 1 \Rightarrow b^2 = 17$ (không thỏa mãn)

Vậy $a = 2023$ và $b = 5$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 4. (HSG 7 huyện Quan Sơn 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ biết rằng $2\overline{ab} + 1$ và $3\overline{ab} + 1$ đều là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $2\overline{ab} + 1 = m^2$ và $3\overline{ab} + 1 = n^2$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$)

Nếu $\overline{ab}$ chia cho 5 dư 1 thì $2\overline{ab} + 1$ chia cho 5 dư 3. Điều này là vô lí.

Nếu $\overline{ab}$ chia cho 5 dư 2 thì $3\overline{ab} + 1$ chia cho 5 dư 2. Điều này cũng vô lí.

Nếu $\overline{ab}$ chia cho 5 dư 3 thì $2\overline{ab} + 1$ chia cho 5 dư 2. Đây là điều vô lí.

Nếu $\overline{ab}$ chia cho 5 dư 4 thì $3\overline{ab} + 1$ chia cho 5 dư 3. Điều này là vô lí.

Vậy $\overline{ab} : 5$

Mặt khác do m lẻ nên m^2 chia cho 8 dư 1 suy ra $\overline{ab} : 4$

Nếu $\overline{ab}$ chia cho 8 dư 4 thì $3\overline{ab} + 1$ chia cho 8 dư 5. Điều này là vô lí.

Vậy $\overline{ab} : 8$

Mà $(5; 8) = 1$ nên $\overline{ab} : 40$

Suy ra $\overline{ab} = 40$ hoặc $\overline{ab} = 80$

Thử lại trực tiếp ta có $\overline{ab} = 40$ (thỏa mãn)

Vậy $\overline{ab} = 40$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Bá Thước, thị trấn Cảnh Nang 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $1! + 2! + 3! + \dots + x! = y^2$

Lời giải

+Với $x = 1$, ta có $1! = y^2 \Rightarrow 1 = y^2 \Rightarrow y = \pm 1$ (thỏa mãn)

+Với $x = 2$, ta có $1! + 2! = y^2 \Rightarrow 3 = y^2 \Rightarrow$ không tìm được giá trị của y thỏa mãn đề bài

+Với $x = 3$, ta có $1! + 2! + 3! = y^2 \Rightarrow 9 = y^2 \Rightarrow y = \pm 3$ (thỏa mãn)

+Với $x \geq 4$, ta có $1! + 2! + 3! + 4! + \dots + x! = 33 + 5! + 6! + \dots + x!$ có chữ số tận cùng là 3 (Vì $5!, 6!, \dots, x!$ đều có chữ số tận cùng là 0 nên không phải là số chính phương, còn y^2 lại là số chính phương

$\Rightarrow$ không tìm được giá trị của y thỏa mãn đề bài.

Vậy các cặp số nguyên x, y thỏa mãn là: $(x, y) = (1; 1); (1; -1); (3; 3); (3; -3)$

Câu 6. (HSG 7 huyện Tiên Hải 2021 - 2022)

Cho n là số tự nhiên có 2 chữ số. Tìm n biết $n + 4$ và $2n$ là số chính phương.

Lời giải

Vì n là số tự nhiên có hai chữ số $\Rightarrow 9 < n < 100 \Rightarrow 18 < 2n < 200$.

Mà $2n$ là số chính phương chẵn $\Rightarrow 2n \in \{36; 64; 100; 144; 196\} \Rightarrow n \in \{18; 32; 50; 72; 98\}$

Mà $n + 4$ là số chính phương $\Rightarrow n = 32$.

Vậy $n = 32$

Câu 7. (HSG 7 tỉnh Bắc Giang 2012 - 2013)

Cho n là số tự nhiên có 2 chữ số. Tìm n biết $n+4$ và $2n$ đều là các số chính phương.

Lời giải

Vì n là số có hai chữ số nên $9 < n < 100 \Rightarrow 18 < 2n < 200$

Mặt khác $2n$ là số chính phương chẵn

nên $2n$ có thể nhận các giá trị: 36; 64; 100; 144; 196.

Với $2n = 36 \Rightarrow n = 18 \Rightarrow n + 4 = 22$ không là số chính phương

Với $2n = 64 \Rightarrow n = 32 \Rightarrow n + 4 = 36$ là số chính phương

Với $2n = 100 \Rightarrow n = 50 \Rightarrow n + 4 = 54$ không là số chính phương

Với $2n = 144 \Rightarrow n = 72 \Rightarrow n + 4 = 76$ không là số chính phương

Với $2n = 196 \Rightarrow n = 98 \Rightarrow n + 4 = 102$ không là số chính phương

Vậy số cần tìm là $n = 32$

Câu 8. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Tìm tất cả các số chính phương có 4 chữ số chia hết cho 153 .

Lời giải

Gọi số cần tìm là a ($a \in \mathbb{N}^*, 1000 \leq a \leq 9999$)

Ta có: $a : 153 \Rightarrow \begin{cases} a : 5 \\ a : 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3^2 \\ y = 5^2 \end{cases}$

$\Rightarrow a : 51^2 \Rightarrow a : 2601$

$\Rightarrow a = 51^2 \cdot k^2 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow a = 2601$

Vậy số cần tìm là: 2601.

Câu 9. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên m để $(m+1)(m^2+2m)$ là một số chính phương.

Lời giải

Ta có $(m+1)(m^2+2m)$ là một số chính phương.

$$(m+1)(m^2+2m) = k^2 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Suy ra

$$\text{Vì } k^2 \geq 0 \Rightarrow (m+1)(m^2+2m) \geq 0$$

$$\text{Với } m < -2 \Rightarrow (m+1)(m^2+2m) < 0 \quad (\text{loại})$$

Với $m \in \{-2; -1; 0\}$ ta đều có $k^2 = 0$ (thỏa mãn)

Với $m > 0$ ta có $k^2 = (m+1)(m^2+2m)$

Gọi d là một ước chung nguyên tố của $m+1$ và m^2+2m

$$\begin{cases} (m+1):d \\ (m^2+2m):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m+1):d \\ m:d \end{cases} \Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1$$

Suy ra

Nên $(m+1)(m^2+2m)$ là một số chính phương khi $m+1$ và m^2+2m đều là số chính phương.

Để m^2+2m là số chính phương thì $m^2+2m=a^2 \ (a \in \mathbb{Z})$.

Suy ra $(m+1)^2-1=a^2 \Rightarrow (m+1+a)(m+1-a)=1 \Rightarrow m+1+a=m+1-a \Rightarrow a=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-2 \end{cases} \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy $m \in \{-2; -1; 0\}$ thì $(m+1)(m^2+2m)$ là một số chính phương.

Câu 10. (HSG 7 huyện Trục Ninh, tỉnh, trường, 2022 - 2023)

Cho $A=4^{27}+4^{1000}+4^x$. Tìm số tự nhiên x lớn nhất sao cho A là số chính phương.

Lời giải

Giả sử tồn tại số tự nhiên x để A là số chính phương.

* Xét $x \geq 27$:

$$A=4^{27}+4^{1000}+4^x=4^{27}(1+4^{973}+4^{x-27})$$

Ta có:

$$=(2^2)^{27} \left[(2^{x-27})^2 + 2 \cdot 2^{x-27} \cdot 1 + 1 + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \right]$$

$$=(2^2)^{27} \left[(2^{x-27})^2 + 2^{x-27} + 2^{x-27} + 1 + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \right]$$

$$=(2^2)^{27} \left[2^{x-27}(2^{x-27}+1) + (2^{x-27}+1) + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \right]$$

$$=(2^{27})^2 \left[(2^{x-27}+1)^2 + 4^{973} - 2 \cdot 2^{x-27} \right]$$

Ta có: $(2^{27})^2$ là số chính phương.

Với $x \geq 27$ và $x \in \mathbb{N}$ thì $1+4^{973}+4^{x-27} \in \mathbb{N}$

nên để A là một số chính phương thì $B=(2^{x-27}+1)^2+4^{973}-2 \cdot 2^{x-27}$ cũng là một số chính phương

$$\Rightarrow B \geq 0 \text{ mà } (2^{x-27}+1)^2 \geq 0 \text{ nên } 4^{973}-2 \cdot 2^{x-27} \geq 0$$

$$\Rightarrow 2^{1946}-2^{x-26} \geq 0$$

$$\Rightarrow x-26 \leq 1946$$

$$\Rightarrow x \leq 1972$$

Kết hợp với điều kiện ta có: $27 \leq x \leq 1972$

Vì x là số tự nhiên lớn nhất nên $x = 1972$.

Thay $x = 1972$ vào A ta được $A = \left[2^{27} \cdot (2^{1945} + 1) \right]^2$ là số chính phương (1)

* Xét $0 \leq x < 27$:

Giả sử tồn tại x thỏa mãn $0 \leq x < 27$ để A là số chính phương

$$A = 4^{27} + 4^{1000} + 4^x = 4^x (4^{27-x} + 4^{1000-x} + 1)$$

$$= (2^x)^2 \left[(2^{27-x})^2 + 2 \cdot 2^{27-x} \cdot 1 + 1 + (2^2)^{1000-x} - 2 \cdot 2^{27-x} \right]$$

$$= (2^x)^2 \left[(2^{27-x})^2 + 2^{27-x} + 2^{27-x} + 1 + 2^{2000-2x} - 2^{28-x} \right]$$

$$= (2^x)^2 \left[(2^{27-x} + 1)^2 + (2^{2000-2x} - 2^{28-x}) \right]$$

Ta có: $(2^x)^2$ là số chính phương.

Với $0 \leq x < 27$ và $x \in \mathbb{N}$ thì $4^{27-x} + 4^{1000-x} + 1 \in \mathbb{N}$

Nên để A là một số chính phương thì $C = (2^{27-x} + 1)^2 + 2^{2000-2x} - 2^{28-x}$ cũng là một số chính phương

$$\Rightarrow C \geq 0 \text{ mà } (2^{27-x} + 1)^2 \geq 0 \text{ nên } 2^{2000-2x} - 2^{28-x} \geq 0 \Rightarrow 2000 - 2x \geq 28 - x \Rightarrow x \leq 1972 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x = 1972$ là số lớn nhất để A là số chính phương.

Câu 11. (HSG 7 thị xã Bình Long, 2022 - 2023)

Tìm số chính phương có 4 chữ số, biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

Lời giải

Gọi số chính phương có 4 chữ số, biết 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau cần tìm là $\overline{aabb}$ ($1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$)

Vì $\overline{aabb}$ là số chính phương nên: $\overline{aabb} = n^2$.

$$Ta \text{ có: } n^2 = 1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11 \cdot (100a + b) \Rightarrow n^2 : 11 \Rightarrow n : 11$$

$$Mà 999 < n^2 < 10000 \Rightarrow 31 < n < 100. \text{ Do } n : 11 \text{ nên } n \in \{33; 44; 55; 66; 77; 88; 99\}$$

$$\text{Thử trực tiếp chỉ có } n = 88 \Rightarrow n^2 = 88^2 = 7744$$

Vậy số cần tìm là 7744.

Dạng 4: Dạng khác

Câu 1. (HSG 7 huyện Lương Tài 2022 - 2023)

Biết $a+1$ và $2a+1$ đồng thời là các số chính phương. Chứng minh rằng $a : 12$.

Lời giải

Ta có $a+1$ và $2a+1$ đồng thời là các số chính phương

Đặt $a+1=m^2$; $2a+1=n^2 (m, n \in \mathbb{N})$

Mà $2a+1$ là số lẻ $\Rightarrow n$ lẻ

$$\Rightarrow 2a = n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$$

Vì n lẻ nên $n+1, n-1$ là hai số chẵn liên tiếp

$$(n-1)(n+1):8 \Rightarrow 2a:8 \Rightarrow a:4 \quad (1)$$

Mặt khác $a+1+2a+1=3a+2=n^2+m^2$ là số chia cho 3 dư 2

Do vậy cả 2 số n^2 và m^2 chia cho 3 dư 1

$$\text{Khi đó } m^2 - n^2 = 2a+1 - a - 1 = a : 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a:12$

Vậy $a:12$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên $\overline{ab}$ sao cho $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$.

Lời giải

Do $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$ nên suy ra $(a+b)^3$ là số chính phương

$\Rightarrow (a+b)$ cũng là số chính phương

$$(a+b)=k^2 \quad (\text{với } k \in \mathbb{N}) \text{ nên } \overline{ab}^2 = k^6$$

$$\Rightarrow \overline{ab} = k^3 \text{ mà } 10 \leq \overline{ab} \leq 99 \Rightarrow 10 \leq k^3 \leq 99$$

$$\text{Từ đó suy ra } k \in \{3; 4\} \Rightarrow \overline{ab} \in \{27; 64\}$$

Thử lại:

$$+ \overline{ab} = 27 \text{ nên } a=2, b=7 \text{ thỏa mãn } \overline{ab}^2 = (a+b)^3$$

$$+ \overline{ab} = 64 \text{ nên } a=6, b=4 \text{ không thỏa mãn } \overline{ab}^2 = (a+b)^3$$

Vậy $\overline{ab} = 27$.