Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội

Đề thi tuyển chọn hệ kỹ sư tài năng năm 2001

Môn thi : **Toán**

Thời gian làm bài : 120 phút[1]

Bài 1:

Cho hàm số $f(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2}$. Xét dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi $u_0 = 1, u_{n+1} = f(u_n)$ với mọi n nguyên dương.

1/ Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có một nghiệm duy nhất α trong khoảng $(\frac{1}{2}, 1)$.

2/ Chứng minh rằng $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ với mọi n nguyên dương.

3/ Chứng minh rằng $f'(x)$ tăng trên đoạn $[\frac{1}{2}, 1]$. Suy ra tồn tại một số $k \in (0,1)$ sao cho $|u_n - \alpha| = k|u_n - \alpha|$ với mọi n nguyên dương,

4/ Chứng minh rằng:

$$lim_{n\to\infty} u_n = \alpha.$$

Bài 2:

Với hai số $x, y \in \mathbb{R}$ ta đặt $d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

Chứng minh rằng với 3 số $x, y, z \in \mathbb{R}$ ta luôn có $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Bài 3:

Cho hàm số $f(x)$ có $f"(x) > 0$ và $a < b$, Chứng minh rằng :

1/

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \qquad \forall\, x_1, x_2 \in [a,b], \forall\, 0 < \lambda < 1.$$

2/

$$\int_a^b f(x)dx \leq (b-a) f(\frac{a+b}{2})$$

Bài 4:

Cho $a < b$ và hàm số $f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(a) = f(b) = 0$ và $\int_a^b |f'(x)|dx = m$. Chứng minh rằng :

$$|f(x)| \leq \frac{m}{2} \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

---

[1] Tài liệu được soạn thảo lại bằng $\LaTeX\, 2_\varepsilon$ bởi **Phạm duy Hiệp**