

§ 2. GIAI BÁT PHƯƠNG TRÌNH VOÂ TYU BAÈNG CAÙCH NÖA VEÀ TÍCH

1. **Đưa về tích số nhờ vào phép biến đổi tương đương**
2. **Liên hợp đưa về tích số khi giải bất phương trình**

Để giải bất phương trình tích hoặc thương dạng $f(x) \cdot g(x) \geq 0$ hoặc $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$, ta có các phương pháp giải sau:

- **Phương pháp 1.** Xét dấu (tổng quát nhất)
 - Bước 1. Tìm miền xác định D.
 - Bước 2. Tìm nghiệm của các phương trình: $f(x)=0; g(x)=0$.
 - Bước 3. Lập bảng xét dấu của $f(x), g(x)$ trên D, suy ra dấu của tích - thương.
- **Phương pháp 2.** Dựa vào miền xác định, chia trường hợp.
- **Phương pháp 3.** Dựa vào miền xác định để tìm dấu của một thừa số.

1. Đưa về tích số nhờ vào phép biến đổi tương đương

Bài 1. Giải bất phương trình: $\frac{3x-2}{\sqrt{2-x^2}} - \sqrt{2-x^2} \leq x-1$ (*)

Điều kiện: $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

$$(*) \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \leq (x-1)\sqrt{2-x^2} \Leftrightarrow (x-1)(x+4) - (x-1)\sqrt{2-x^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+4-\sqrt{2-x^2}) \leq 0 \quad (1)$$

▮ **Lời giải 1.** Lập bảng xét dấu.

Đặt: $f(x) = x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ và $g(x) = x+4-\sqrt{2-x^2}=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} = x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x^2 + 4x + 7 = 0 \end{cases} : \text{ vô nghiệm.}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$ +∞	$-\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$
f(x)		-	0	+
g(x)		+	+	
f(x).g(x)		-	0	+

Kết luận: Dựa vào bảng xét dấu, suy ra tập nghiệm của (1) là $x \in (-\sqrt{2}; 1]$.

▮ **Lời giải 2.** Chia trường hợp dựa vào miền xác định.

• Trường hợp 1. Nếu $x=1$ thì (1) đúng, suy ra $x=1$ là một nghiệm của (1).

• Trường hợp 2. Nếu $1 < x < \sqrt{2}$ thì $x-1 > 0$ nên (1) $\Leftrightarrow x+4-\sqrt{2-x^2} \leq 0$
 $\Leftrightarrow x+4 \leq \sqrt{2-x^2}$: vô nghiệm khi $x \in (1; \sqrt{2})$.

• Trường hợp 3. Nếu $-\sqrt{2} < x < 1$ thì $x-1 < 0$ nên (1) $\Leftrightarrow x+4-\sqrt{2-x^2} \geq 0$
 $\Leftrightarrow x+4 \geq \sqrt{2-x^2} \Leftrightarrow x^2+4x+7 \geq 0$ luôn đúng $\forall x \in (-\sqrt{2}; 1)$.

Kết luận: Hợp ba trường hợp, suy ra tập nghiệm BPT là $x \in (-\sqrt{2}; 1]$.

▮ **Lời giải 3.** Dựa vào miền xác định để tìm dấu của một thừa số.

Ta có: $x+4-\sqrt{2-x^2} \geq 0, \forall x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ nên (1) $\Leftrightarrow x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Kết luận: So với điều kiện, tập nghiệm bất phương trình là $x \in (-\sqrt{2}; 1]$.

Nhận xét. Có rất nhiều cách xét dấu khác nhau, nhưng theo tôi với những bất phương trình phức tạp thường dùng nguyên tắc "mỗi ô thử một điểm". Chẳng hạn như xét dấu $f(x) = x+4-\sqrt{2-x^2}$ thì tôi nhập vào máy

tính bỏ túi: $X+4-\sqrt{2-X^2}$ và muốn xét dấu trong khoảng $(-\sqrt{2}; 1)$ tôi

CALC một giá trị bất kỳ trong khoảng này, chẳng hạn 0 được $4-\sqrt{2} > 0$ và để vào khoảng ấy dấu +.

Bài 2. Giải bất phương trình: $4x^2 + \sqrt{2x+3} \geq 8x+1$ (*)

▮ **Lời giải.** Điều kiện: $2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow 4x^2 + \sqrt{2x+3} - 8x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (1-2x+4x^2) + (1-2x) + \sqrt{2x+3} - (2x+3) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \left[(1-2x)^2 - (\sqrt{2x+3})^2 \right] + (1-2x + \sqrt{2x+3}) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (1-2x-\sqrt{2x+3})(1-2x+\sqrt{2x+3}) + (1-2x+\sqrt{2x+3}) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (1-2x+\sqrt{2x+3})(2-2x-\sqrt{2x+3}) \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Đặt: $\begin{cases} f(x) = 1-2x+\sqrt{2x+3} \\ g(x) = 2-2x-\sqrt{2x+3} \end{cases}$. Khi đó:

$$\text{Cho: } f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{17}}{4}.$$

$$\text{Cho: } g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = 2-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 4x^2 - 10x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5-\sqrt{21}}{4}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5-\sqrt{21}}{4}$	$\frac{3+\sqrt{17}}{4}$	$+\infty$
$f(x)$			+	+	0 -
$g(x)$			+	0 -	-
$f(x).g(x)$			+	0 -	0

Kết luận: Dựa vào bảng xét dấu, suy ra $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{5-\sqrt{21}}{4} \right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{17}}{4}; +\infty \right)$.

Bài 3. Giải bất phương trình: $x - 3\sqrt{2-x^2} + 2x^2\sqrt{2-x^2} \geq 0$ (*)

□ **Lời giải.** Điều kiện: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow x \geq (3-2x^2)\sqrt{2-x^2} \Leftrightarrow x \geq \left[(\sqrt{2-x^2})^2 + (1-x^2) \right] \cdot \sqrt{2-x^2} \\
 &\Leftrightarrow (\sqrt{2-x^2})^3 + (1-x^2)\sqrt{2-x^2} - x \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow (\sqrt{2-x^2})^3 - x^2\sqrt{2-x^2} + (\sqrt{2-x^2} - x) \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow \left[(\sqrt{2-x^2})^2 - x^2 \right] \sqrt{2-x^2} + (\sqrt{2-x^2} - x) \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow (\sqrt{2-x^2} - x) \cdot (\sqrt{2-x^2} + x) \cdot \sqrt{2-x^2} + (\sqrt{2-x^2} - x) \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow (\sqrt{2-x^2} - x) \cdot (3-x^2 + x\sqrt{2-x^2}) \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} - x \leq 0, \left(\text{do: } 3-x^2 + x\sqrt{2-x^2} > 0, \forall x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \right) \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} \leq x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-x^2 \leq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \vee x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.
 \end{aligned}$$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm bất phương trình là $x \in [1; \sqrt{2}]$.

Bài 4. Giải bất phương trình: $(4x^2 - x - 7)\sqrt{x+2} > 4x - 8x^2 + 10$ (*)

□ **Lời giải.** Điều kiện: $x \geq -2$.

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow (4x^2 - x - 7)\sqrt{x+2} + 2(4x^2 - x - 7) > 2(x-2) \\
 &\Leftrightarrow (4x^2 - x - 7)(\sqrt{x+2} + 2) > 2[(\sqrt{x+2})^2 - 4] \\
 &\Leftrightarrow (4x^2 - x - 7)(\sqrt{x+2} + 2) > 2(\sqrt{x+2} + 2)(\sqrt{x+2} - 2) \\
 &\Leftrightarrow 4x^2 - x - 7 > 2(\sqrt{x+2} - 2), \left(\text{do: } \sqrt{x+2} + 2 > 0, \forall x \geq -2 \right) \\
 &\Leftrightarrow 4x^2 > x + 3 + 2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow (2x)^2 > (\sqrt{x+2} + 1)^2 \\
 &\Leftrightarrow (2x)^2 - (\sqrt{x+2} + 1)^2 > 0 \Leftrightarrow (2x - 1 - \sqrt{x+2})(2x + 1 + \sqrt{x+2}) > 0 \quad (1)
 \end{aligned}$$

Đặt: $f(x) = 2x - 1 - \sqrt{x+2}$ và $g(x) = 2x + 1 + \sqrt{x+2}$.

$$\text{Cho } f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 5x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5+\sqrt{41}}{8}.$$

$$\text{Cho } g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = -2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \\ 4x^2 + 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	-1	$\frac{5+\sqrt{41}}{8}$	$+\infty$	
$f(x)$		-	-	0	+	
$g(x)$			0		+	
$f(x).g(x)$		+	0	-	0	+

Kết luận: Dựa vào bảng xét dấu, suy ra $x \in [-2; -1) \cup \left(\frac{5+\sqrt{41}}{8}; +\infty\right)$. Tài liệu

được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>