|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO****NGHỆ AN***(Đề thi gồm 01 trang)* | **ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10****TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU****TRƯỜNG THPT CHUYÊN – ĐH VINH****NĂM HỌC 2021 – 2022.****MÔN THI: TOÁN*****Ngày thi: 06/06/2021.****(Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề)* |

1. **(6,0 điểm)**

a) Giải phương trình: 

b) Giải hệ phương trình: 

1. **(3,0 điểm)**

a) Tìm  sao cho 

b) Tìm số nguyên dương  để  là bình phương của một số hữu tỉ dương.

1. **(2,0 điểm)** Cho các số dương , ,  thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức



1. **(7,0 điểm)** Cho đường tròn  có dây cung  cố định và không đi qua tâm . Gọi  là điểm di động trên đường tròn  sao cho tam giác  nhọn và . Gọi  là trung điểm của cạnh  và  là trực tâm tam giác . Tia  cắt đường tròn  tại , đường thẳng  cắt cạnh  tại  và đường thẳngcắt đường tròntại  (khác).

a) Chứng minh rằng tứ giác  là hình bình hành và .

b) Tia  cắt đường tròn  tại  ( khác ), đường thẳng đi qua  và vuông góc với đường thẳng  cắt  tại  . Chứng minh rằng các đường thẳng ,  và  cùng đi qua một điểm.

c) Một đường tròn thay đổi luôn tiếp xúc với  tại  và cắt các cạnh ,  lần lượt tại ,  phân biệt. Gọi  là trung điểm của . Chứng minh rằng  luôn đi qua một điểm cố định.

1. **(2,0 điểm)** Cho số  số nguyên tố khác nhau. Chứng minh rằng có ít nhất hai số trong các số đã cho mà hiệu của chúng chia hết cho .

🙢**HẾT**🙠

**HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**

1. **(6,0 điểm)**

a) Giải phương trình: 

b) Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

a) Giải phương trình: 

 Điều kiện: 

Phương trình 

 

Đặt: . Khi đó, ta có:

 

 

 

 

Vậy phương trình có tập nghiệm 

b) Giải hệ phương trình: 

Lấy  ta có pt: 

 

+ ***Trường hợp 1***:  thay vào  ta được: 

 

+ ***Trường hợp 2***:  thay vào  ta được: 

 

 

Vậy hệ có nghiệm: 

1. **(3,0 điểm)**

a) Tìm  sao cho 

b) Tìm số nguyên dương  để  là bình phương của một số hữu tỉ dương.

**Lời giải**

a) Tìm  sao cho 



 (loại).





 

 

 .

 , .

 

 

 

 

 

Vậy .

b) Tìm số nguyên dương  để  là bình phương của một số hữu tỉ dương.

Giả sử  với  là  số nguyên dương và 

Ta có:  (với  là số nguyên dương).

 

+ ***Trường hợp 1***: Trong  số  có  số chẵn và  số lẻ

 và  đều lẻ

Từ  .

+ ***Trường hợp 2***: Cả ,  đều lẻ. Đặt ;  Ta có:

Với ,  là các số nguyên dương.

Từ 

 

 .

Ta có:  và ;  khác tính chẵn lẻ.

Xét cặp  lần lượt ; ; ;; ;

Tính ,  suy ra:

1. ; ; 

2. ; ; 

3. ; ; 

4. ; ; 

5. ; ; 

6. ; ; 

Vậy 

1. **(2,0 điểm)**

Cho các số dương , ,  thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức



**Lời giải**

Vì .

Ta có 

  .

Do đó 

  

 Với  và .

Vì  .

Suy ra .

Dấu  xảy ra khi  hay .

1. **(7,0 điểm)**

Cho đường tròn  có dây cung  cố định và không đi qua tâm . Gọi  là điểm di động trên đường tròn  sao cho tam giác  nhọn và . Gọi  là trung điểm của cạnh  và  là trực tâm tam giác . Tia  cắt đường tròn  tại , đường thẳng  cắt cạnh  tại  và đường thẳng  cắt đường tròn  tại  ( khác ).

a) Chứng minh rằng tứ giác  là hình bình hành và .

b) Tia  cắt đường tròn  tại  ( khác ), đường thẳng đi qua  và vuông góc với đường thẳng  cắt  tại  . Chứng minh rằng các đường thẳng ,  và  cùng đi qua một điểm.

c) Một đường tròn thay đổi luôn tiếp xúc với  tại  và cắt các cạnh ,  lần lượt tại ,  phân biệt. Gọi  là trung điểm của . Chứng minh rằng  luôn đi qua một điểm cố định.

**Lời giải**

****

**a)** Kẻ các đường cao  và . Khi đó ta có  song song với  (vì cùng vuông góc với ) và  song song với  (vì cùng vuông góc với ). Do đó tứ giác  là hình bình hành.

+ Từ đó suy ra bốn điểm , , ,  thẳng hàng. Khi đó ta có  nên tứ giác  nội tiếp. Do đó suy ra .

**b)** Giả sử  cắt đường tròn  tại . Khi đó ta có các tứ giác  và  nội tiếp đường tròn, từ đó ta suy ra được  nên  song song với . Từ đó suy ra tứ giác  là hình thang cân. Mà  là trung điểm của  nên  đi qua trung điểm của  , do đó tam giác  cân tại , suy ra ta được . Dễ thấy tam giác  vuông tại  nên suy ra  là trung điểm của , điều này dẫn đến  và  đối xứng với nhau qua . Từ đó suy ra tứ giác  là hình bình hành, suy ra . Do đó  vuông góc với .

Gọi  là giao điểm của  với . Khi đó  là trực tâm của tam giác . Suy ra , suy ra , ,  thẳng hàng. Do đó ta có điều cần chứng minh.

**c)** Ta định nghĩa lại điểm  là giao điểm của  với .

Ta cần chứng minh  là trung điểm của .

Thật vậy, gọi  là giao điểm thứ hai của  với đường tròn ngoại tiếp tam giác .

Ta có các điểm , , ,  cùng nằm trên một đường tròn và  là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ta giác  nên ta có:.

Để ý đến các tứ giác  và  nội tiếp đường tròn

nên ta lại có: .

Khi đó hai tam giác  và  có  và  đồng dạng với nhau, từ đó ta suy ra được .

Cũng do các tứ giác trên nội tiếp nên .

Mà  nên suy ra hai tam giác và  đồng dạng, từ đó ta lại có . Do đó suy ra . Mà  là trung điểm của  nên suy ra  là trung điểm của . Vậy  luôn đi qua điểm  cố định.

1. **(2,0 điểm)**

Cho số  số nguyên tố khác nhau. Chứng minh rằng có ít nhất hai số trong các số đã cho mà hiệu của chúng chia hết cho .

**Lời giải**

 số có ít nhất  số không chia hết cho ; ; .

.

Suy ra tồn tại  số có cùng số dư khi chia .

 số này tồn tại số cùng số dư khi chia hết cho .

Hiệu số này chia hết cho .

Suy ra hiệu số này chia hết cho .

🙢**HẾT**🙠