

DẠNG 4**Kết hợp đổi biến, từng phần tính tích phân**

Câu 1: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$, với $a, b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{N}^*$. Tính tổng $S = a + b + c$.

- A. $S = 1$. B. $S = 0$. C. $S = 4$. D. $S = 3$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ 4x - 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_0^{\ln 5} e^{2x} f'(e^x) dx$ bằng

- A. 126. B. 84. C. 63. D. 42.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5) = 1$ và $\int_0^1 xf(5x) dx = 1$. Khi đó

$$\int_0^5 x^2 f'(x) dx \text{ bằng}$$

- A. -25. B. 15. C. $\frac{123}{5}$. D. 23.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x > 0 \\ x^2 - x - 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_{-2}^2 xf'(2x) dx$ bằng

- A. $\frac{13}{24}$. B. $\frac{50}{3}$. C. $\frac{19}{24}$. D. $\frac{11}{6}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4) = 5$; $\int_{-2}^0 f(2x + 4) dx = 6$.

$$\text{Tính giá trị } I = \int_0^4 xf'(x) dx.$$

- A. $I = 8$. B. $I = -8$. C. $I = 4$. D. $I = -4$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - f'(x) \right)$, $\forall x \in (0; +\infty)$ và $f(4) = \frac{4}{3}$.

$$\text{Giá trị của } \int_1^4 (x^2 - 1) f'(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $-\frac{263}{15}$. B. $-\frac{263}{30}$. C. $\frac{457}{15}$. D. $\frac{457}{30}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x + 1) f'(x)$ là

- A. $\frac{x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4}} + C$. B. $\frac{x - 4}{2\sqrt{x^2 + 4}} + C$. C. $\frac{x^2 + 2x - 4}{2\sqrt{x^2 + 4}} + C$. D. $\frac{2x^2 + x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4}} + C$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(3) = 21$, $\int_0^3 f(x) dx = 9$. Tính tích

$$\text{phân } I = \int_0^1 x \cdot f'(3x) dx. ?$$

A. $I = 15$.

B. $I = 6$.

C. $I = 12$.

D. $I = 9$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2) = 3$, $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2$, $\int_0^2 xf'(x) dx = 3$.

Tính

$$\int_0^1 f(x) dx$$

A. 5.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 10: Cho $\int_1^2 \frac{x-2}{x} \ln x dx = a + b \ln 2 + c \ln^2 2$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $S = a + 2b - 3c$.

A. $S = \frac{9}{2}$.

B. $S = 6$.

C. $S = 2$.

D. $S = 0$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5) = 1$ và $\int_0^1 xf(5x) dx = 1$. Tính tích

phân $I = \int_0^5 x^2 f'(x) dx$.

A. $I = 23$.

B. $I = 15$.

C. $I = \frac{123}{5}$.

D. $I = -25$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x > 0 \\ x^2 - x - 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tính phân $I = \int_{-2}^2 xf'(2x) dx$ bằng

A. $\frac{13}{24}$.

B. $\frac{50}{3}$.

C. $\frac{19}{24}$.

D. $\frac{11}{6}$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(0) = 1$ và

$f(x) + f(3-x) = x^2 - 3x + 4$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính phân $\int_0^3 xf'(x) dx$ bằng

A. $\frac{21}{4}$.

B. $\frac{23}{4}$.

C. $\frac{19}{4}$.

D. $\frac{49}{4}$.

Câu 14: Cho biết $\int_0^1 x[\sin \pi x + \ln(x+1)] dx = a + \frac{b}{\pi} + c \ln 2$; với a, b, c là những số hữu tỉ. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ tương ứng bằng

A. 5.

B. $\frac{7}{2}$.

C. $\frac{7}{4}$.

D. $\frac{5}{4}$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 3$ và

$f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_0^2 xf'(x) dx$.

A. $I = \frac{-10}{3}$.

B. $\frac{-4}{3}$.

C. $\frac{5}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 3$ và

$f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^2 x.f'(x) dx$

A. $I = -\frac{10}{3}$.

B. $I = -\frac{4}{3}$.

C. $I = \frac{5}{3}$.

D. $I = \frac{2}{3}$.

Câu 17: Cho $\int_0^1 x(e^{2x} + 2\sqrt[3]{x-1})dx = \frac{ae^2 - b}{c}$, với a, b, c là các số nguyên và a, b nguyên tố cùng nhau.

Tính $P = a + b + c$.

A. $P = 10$.

B. $P = 18$.

C. $P = 46$.

D. $T = 24$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & \text{khi } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \text{khi } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x)dx$ bằng

A. $\frac{3}{2} - 4\ln 3 + 4\ln 2$.

B. $\frac{3}{2} + 4\ln 3 + 4\ln 2$.

C. $-\frac{3}{2} + 4\ln 3 + 4\ln 2$.

D. $\frac{3}{2} + 4\ln 3 - 4\ln 2$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(3) = 21$, $\int_0^3 f(x)dx = 9$. Tính $\int_0^1 xf'(3x)dx$ bằng

A. 9.

B. 12.

C. 6.

D. 10.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $\int_0^1 f(x)dx = 3$. Tích phân $\int_0^1 x^3 f'(x^2)dx$ bằng

A. $-\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. -1.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x), \forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng tích phân $I = \int_0^1 x \cdot f'(x)dx = -\frac{a}{b}$ (với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T = 3a - b$.

A. $T = 0$.

B. $T = -48$.

C. $T = 16$.

D. $T = 1$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$ và thỏa mãn $3xf'(x) = 3 + 2f'(x), \forall x \in D$. Biết rằng $f(2) = \ln 8, f(0) = 0$ và tích phân $I = \int_{-1}^0 (f(x) + f(1))dx = \frac{a \ln 5 - b \ln 2}{3} - 1, (a, b \in \mathbb{Z})$. Tính giá trị $a + b$.

A. 7.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{9}{5}$ và

$$\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \frac{2}{5}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f^2(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{16}$.

C. $\frac{1}{25}$.

D. $\frac{1}{7}$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cos x$, với mọi

$x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x) dx$ bằng:

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. $-\frac{1}{4}$.

D. $-\frac{\pi}{4}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$, với $a, b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{N}^*$. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = 1$.B. $S = 0$.C. $S = 4$.D. $S = 3$.

Lời giải

Chọn C

Xét tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx$.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

Ta có: $I = \int_0^1 \frac{1}{t^2 - 5t + 6} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2} \right) dt = \ln \left| \frac{t-3}{t-2} \right| \Big|_0^1 = \ln \frac{4}{3}$.

Vậy $a = 1, b = 0, c = 3 \Rightarrow S = a + b + c = 4$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ 4x - 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_0^{\ln 5} e^{2x} f'(e^x) dx$ bằng

A. 126.

B. 84.

C. 63.

D. 42.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$. Với $x = 0 \Rightarrow t = 1$ và $x = \ln 5 \Rightarrow t = 5$.

Ta có $I = \int_1^5 t f'(t) dt$. Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = f'(t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = f(t) \end{cases}$.

Suy ra $I = \int_1^5 t f'(t) dt = t f(t) \Big|_1^5 - \int_1^5 f(t) dt = 5f(5) - f(1) - \int_1^2 (4x - 3) dx - \int_2^5 (x^2 + 1) dx$
 $= 130 - 1 - 3 - 42 = 84$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5) = 1$ và $\int_0^1 x f(5x) dx = 1$. Khi đó

$\int_0^5 x^2 f'(x) dx$ bằng

A. -25.

B. 15.

C. $\frac{123}{5}$.

D. 23.

Lời giải

Chọn A

+) Xét $A = \int_0^1 x f(5x) dx = 1$

Đặt $t = 5x \Rightarrow dt = 5dx$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=5 \end{cases}$$

$$A = \int_0^5 \frac{t}{5} f(t) \cdot \frac{dt}{5} = \frac{1}{25} \int_0^5 t \cdot f(t) dt = 1 \Rightarrow \int_0^5 t \cdot f(t) dt = 25 \Rightarrow \int_0^5 x \cdot f(x) dx = 25$$

$$+) I = \int_0^5 x^2 f'(x) dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ v' = f'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 2x \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$I = \int_0^5 x^2 f'(x) dx = \left(x^2 f(x) \right) \Big|_0^5 - \int_0^5 2xf(x) dx = 25 \cdot f(5) - 2 \cdot 25 = 25 - 2 \cdot 25 = -25$$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x > 0 \\ x^2 - x - 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_{-2}^2 xf'(2x) dx$ bằng

A. $\frac{13}{24}$.

B. $\frac{50}{3}$.

C. $\frac{19}{24}$.

D. $\frac{11}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$. Đổi cận $x = -2 \Rightarrow t = -4, x = 2 \Rightarrow t = 4$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int_{-4}^4 t f'(t) dt = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 x f'(x) dx = \frac{1}{4} \left(x f(x) \Big|_{-4}^4 - \int_{-4}^4 f(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(104 - \int_{-4}^0 (x^2 - x - 1) dx - \int_{-4}^0 (2x - 1) dx \right) = \frac{50}{3}. \end{aligned}$$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4) = 5; \int_{-2}^0 f(2x+4) dx = 6$.

Tính giá trị $I = \int_0^4 xf'(x) dx$.

A. $I = 8$.

B. $I = -8$.

C. $I = 4$.

D. $I = -4$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_{-2}^0 f(2x+4) dx = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_{-2}^0 f(2x+4) d(2x+4) = 6 \xrightarrow{t=2x+4} \int_0^4 f(t) dt = 12.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}. \text{ Khi đó } I = xf(x) \Big|_0^4 - \int_0^4 f(x) dx = 4 \cdot 5 - 12 = 8.$$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - f'(x) \right), \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(4) = \frac{4}{3}$.

Giá trị của $\int_1^4 (x^2 - 1) f'(x) dx$ bằng

A. $-\frac{263}{15}$.

B. $-\frac{263}{30}$.

C. $\frac{457}{15}$.

D. $\frac{457}{30}$.

Lời giải**Chọn C**

Từ giả thiết ta có

$$f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - f'(x) \right) \Rightarrow f(x) + xf'(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow (xf(x))' = x + \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow xf(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$$

Mặt khác $f(4) = \frac{4}{3}$, suy ra $C = -8$ hay $xf(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 8$.

Đặt $u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2x dx$.

$dv = f'(x) dx$, chọn $v = f(x)$.

Khi đó

$$\int_1^4 (x^2 - 1) f'(x) dx = (x^2 - 1) f(x) \Big|_1^4 - 2 \int_1^4 xf(x) dx = 15f(4) - 2 \int_1^4 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 8 \right) dx = \frac{457}{15}.$$

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1)f'(x)$ là

A. $\frac{x+4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$.

B. $\frac{x-4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$.

C. $\frac{x^2+2x-4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$.

D. $\frac{2x^2+x+4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$.

Lời giải**Chọn B**

$$\int g(x) dx = \int (x+1) f'(x) dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = (x+1) \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int g(x) dx = (x+1)f(x) - \int f(x) dx = (x+1)f(x) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx.$$

Tính $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx$, đặt $t = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow t^2 = x^2+4 \Rightarrow t dt = x dx$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx = \int \frac{t}{t} dt = \int 1 dt = t + C = \sqrt{x^2+4} + C.$$

Khi đó: $\int g(x) dx = (x+1) \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \sqrt{x^2+4} + C = \frac{x-4}{\sqrt{x^2+4}} + C.$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(3) = 21$, $\int_0^3 f(x) dx = 9$. Tính tích

phân $I = \int_0^1 x \cdot f'(3x) dx$?

A. $I = 15$.

B. $I = 6$.

C. $I = 12$.

D. $I = 9$.

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(3x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{3} f(3x) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } I = x \cdot \frac{1}{3} f(3x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3} f(3x) dx = \frac{1}{3} f(3) - \underbrace{\frac{1}{3} \int_0^1 f(3x) dx}_K$$

$$\text{Đặt } t = 3x \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3} dt. \text{ Đổi cận } \begin{matrix} x=1 \Rightarrow t=3 \\ x=0 \Rightarrow t=0 \end{matrix}$$

$$K = \int_0^3 f(t) \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int_0^3 f(x) dx = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3.$$

$$\text{Cuối cùng } I = \frac{1}{3} \cdot 21 - \frac{1}{3} \cdot 3 = 6.$$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2) = 3$, $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2$, $\int_0^2 xf'(x) dx = 3$.

Tính

$$\int_0^1 f(x) dx$$

A. 5.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x}, \text{ ta có } dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx.$$

$$\text{Đổi cận: khi } x=1 \text{ thì } t=1; \text{ khi } x=4 \text{ thì } t=2.$$

$$\text{Khi đó } 2 = \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^2 f(t) dt \Rightarrow \int_1^2 f(t) dt = 1 \text{ hay } \int_1^2 f(x) dx = 1.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } 3 = \int_0^2 xf'(x) dx = xf(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(x) dx = 2f(2) - \int_0^2 f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow 3 = 2 \cdot 3 - \int_0^2 f(x) dx \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 3.$$

$$\text{Ta lại có: } \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx = 3 - 1 = 2.$$

Câu 10: Cho $\int_1^2 \frac{x-2}{x} \ln x dx = a + b \ln 2 + c \ln^2 2$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $S = a + 2b - 3c$.

A. $S = \frac{9}{2}$.

B. $S = 6$.

C. $S = 2$.

D. $S = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_1^2 \frac{x-2}{x} \ln x dx = \int_1^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x dx = \int_1^2 \ln x dx - 2 \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx.$

Tính $I_1 = \int_1^2 \ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x \end{cases}$

$I_1 = \int_1^2 \ln x dx = (x \ln x) \Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx = 2 \ln 2 - \int_1^2 dx = 2 \ln 2 - 1.$

Tính $I_2 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$

Đổi

x	t
2	$\ln 2$
1	0

cận:

$$I_2 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^{\ln 2} t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\ln 2} = \frac{\ln^2 2}{2}$$

Do đó $\int_1^2 \frac{x-2}{x} \ln x dx = 2 \ln 2 - 1 - \ln^2 2$

Suy ra $a = -1; b = 2; c = -1.$

Vậy $S = a + 2b - 3c = -1 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 6.$

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5) = 1$ và $\int_0^1 xf(5x) dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^5 x^2 f'(x) dx$.

A. $I = 23.$ B. $I = 15.$ C. $I = \frac{123}{5}.$ D. $I = -25.$

Lời giải**Chọn D**

Ta có $\int_0^1 xf(5x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 5xf(5x) d(5x) = 25 \Rightarrow \int_0^5 xf(x) dx = 25.$

Khi đó $I = \int_0^5 x^2 f'(x) dx = \int_0^5 x^2 d(f(x)) = x^2 f(x) \Big|_0^5 - \int_0^5 f(x) d(x^2)$
 $= 25f(5) - 2 \int_0^5 xf(x) dx = 25 - 50 = -25.$

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x > 0 \\ x^2-x-1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tính phân $I = \int_{-2}^2 xf'(2x) dx$ bằng

A. $\frac{13}{24}$.

B. $\frac{50}{3}$.

C. $\frac{19}{24}$.

D. $\frac{11}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$. Đổi cận $x = -2 \Rightarrow t = -4, x = 2 \Rightarrow t = 4$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int_{-4}^4 t f'(t) dt = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 x f'(x) dx = \frac{1}{4} \left(x f(x) \Big|_{-4}^4 - \int_{-4}^4 f(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(104 - \int_{-4}^0 (x^2 - x - 1) dx - \int_{-4}^0 (2x - 1) dx \right) = \frac{50}{3}. \end{aligned}$$

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(0) = 1$ và $f(x) + f(3-x) = x^2 - 3x + 4$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^3 x f'(x) dx$ bằng

A. $\frac{21}{4}$.

B. $\frac{23}{4}$.

C. $\frac{19}{4}$.

D. $\frac{49}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Do $f(x) + f(3-x) = x^2 - 3x + 4$ nên $f(3) + f(0) = 4 \Rightarrow f(3) = 4 - f(0) = 3$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int_0^3 x f'(x) dx = \int_0^3 x d(f(x)) = x f(x) \Big|_0^3 - \int_0^3 f(x) dx = 3 f(3) - \int_0^3 f(x) dx = 9 - \int_0^3 f(x) dx$$

Xét tích phân $I = \int_0^3 f(x) dx$.

Đặt $x = 3 - t$ ta có $dx = -dt$

Đổi cận $x = 0$ thì $t = 3$ và $x = 3$ thì $t = 0$ nên

$$\int_0^3 f(x) dx = - \int_3^0 f(3-t) dt = \int_0^3 f(3-t) dt = \int_0^3 f(3-x) dx$$

Do đó

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^3 f(x) dx + \int_0^3 f(3-x) dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^3 (f(x) + f(3-x)) dx = \frac{1}{2} \int_0^3 (x^2 - 3x + 4) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x \right) \Big|_0^3 = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \int_0^3 x f'(x) dx = 9 - \frac{15}{4} = \frac{21}{4}.$$

Câu 14: Cho biết $\int_0^1 x [\sin \pi x + \ln(x+1)] dx = a + \frac{b}{\pi} + c \ln 2$; với a, b, c là những số hữu tỉ. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ tương ứng bằng

A. 5.

B. $\frac{7}{2}$.C. $\frac{7}{4}$.D. $\frac{5}{4}$.**Lời giải****Chọn D**

Ta có: $I = \int_0^1 x [\sin \pi x + \ln(x+1)] dx = \underbrace{\int_0^1 x \sin(\pi x) dx}_A + \underbrace{\int_0^1 x \ln(x+1) dx}_B$.

* Tính $A = \int_0^1 x \sin(\pi x) dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin(\pi x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \end{cases}$ ta được:

$$A = -\frac{x}{\pi} \cos(\pi x) \Big|_0^1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos(\pi x) dx = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}.$$

* Tính $B = \int_0^1 x \ln(x+1) dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \end{cases}$ ta được:

$$B = \left(\frac{x^2-1}{2} \right) \ln(x+1) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2-1}{x+1} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (x-1) dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Vậy $I = A + B = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow T = a + b + c = \frac{1}{4} + 1 + 0 = \frac{5}{4}.$

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 3$ và

$$f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^2 x f'(x) dx.$$

A. $I = \frac{-10}{3}$.B. $\frac{-4}{3}$.C. $\frac{5}{3}$.D. $\frac{2}{3}$.**Lời giải****Chọn A**

+) Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases}$. Chọn $\begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$

$$I = x \cdot f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(x) dx = 2f(2) - J \quad (1) \text{ với } J = \int_0^2 f(x) dx$$

+) Đặt $x = 2 - t \Rightarrow J = -\int_2^0 f(2-t) dt = \int_0^2 f(2-x) dx$

$$= \int_0^2 [x^2 - 2x + 2 - f(x)] dx = \int_0^2 (x^2 - 2x + 2) dx - \int_0^2 f(x) dx = \frac{8}{3} - J$$

Suy ra $2J = \frac{8}{3} \Rightarrow J = \frac{4}{3} \quad (2)$

+) Ta có: $f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$

Chọn $x = 0$, ta có: $f(0) + f(2) = 2$ mà $f(0) = 3$ suy ra $f(2) = -1$ (3)

+) Từ (1), (2) và (3) suy ra $I = 2 \cdot (-1) - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3}$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 3$ và

$$f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính } I = \int_0^2 x \cdot f'(x) dx$$

A. $I = -\frac{10}{3}$.

B. $I = -\frac{4}{3}$.

C. $I = \frac{5}{3}$.

D. $I = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

* Với $x = 0$, ta có: $f(0) + f(2) = 2 \Leftrightarrow f(2) = -1$

$$f(x) + f(2-x) = x^2 - 2x + 2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f(2-x) dx = \int_0^2 (x^2 - 2x + 2) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = \frac{4}{3}$$

$$* \text{ Xét } I = \int_0^2 x \cdot f'(x) dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$I = x \cdot f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(x) dx = 2 \cdot f(2) - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3}.$$

Câu 17: Cho $\int_0^1 x(e^{2x} + 2\sqrt[3]{x-1}) dx = \frac{ae^2 - b}{c}$, với a, b, c là các số nguyên và a, b nguyên tố cùng nhau.

Tính $P = a + b + c$.

A. $P = 10$.

B. $P = 18$.

C. $P = 46$.

D. $T = 24$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 x(e^{2x} + 2\sqrt[3]{x-1})dx = \int_0^1 x(e^{2x} + 2\sqrt[3]{x-1})dx \\
&= \int_0^1 xe^{2x}dx + 2\int_0^1 x\sqrt[3]{x-1}dx \\
&= \frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx + 2\int_0^1 (x-1+1)\sqrt[3]{x-1}dx \\
&= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 (x-1)\sqrt[3]{x-1}dx + 2\int_0^1 \sqrt[3]{x-1}dx \\
&= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} + 2\int_0^1 (x-1)^{\frac{4}{3}}dx + 2\int_0^1 (x-1)^{\frac{1}{3}}dx \\
&= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} + 2\frac{(x-1)^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}\Big|_0^1 + 2\frac{(x-1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} + \frac{6}{7} - \frac{3}{2} = \frac{7e^2-11}{28} = \frac{ae^2-b}{c} \\
&\Rightarrow a=7, b=11, c=28.
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } T = a + b + c = 7 + 11 + 28 = 46.$$

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & \text{khi } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \text{khi } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x)dx$ bằng

- A. $\frac{3}{2} - 4\ln 3 + 4\ln 2$. B. $\frac{3}{2} + 4\ln 3 + 4\ln 2$.
 C. $-\frac{3}{2} + 4\ln 3 + 4\ln 2$. D. $\frac{3}{2} + 4\ln 3 - 4\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x)dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f'(\sin x) \cdot \cos x dx.$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx.$$

$$\text{Với } x=0 \text{ thì } t=0.$$

$$\text{Với } x=\frac{\pi}{2} \text{ thì } t=1.$$

$$\text{Khi đó } I = 2 \int_0^1 t \cdot f'(t) dt.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u=t \\ dv=f'(t)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dt \\ v=f(t) \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Suy ra } I &= 2 \left(\left(t f(t) \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(t) dt \right) = 2 f(1) - 2 \int_0^1 f(x) dx \\
 &= 2 - 2 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{x+1} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x-1) dx \right) \\
 &= 2 - 2 \left(\left(2 \ln |x+1| \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \left(x^2 - x \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \right) \\
 &= 2 - 4(\ln 3 - \ln 2) - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{3}{2} - 4 \ln 3 + 4 \ln 2.
 \end{aligned}$$

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(3) = 21$, $\int_0^3 f(x) dx = 9$. Tính $\int_0^1 x f'(3x) dx$ bằng

A. 9. B. 12. C. 6. D. 10.

Lời giải

Chọn C

Ta xét $\int_0^1 x f'(3x) dx$

Đặt $t = 3x \Rightarrow \frac{dt}{3} = dx$, đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = 3$.

Suy ra $\int_0^1 x f'(3x) dx = \frac{1}{9} \int_0^3 t f'(t) dt = \frac{1}{9} \int_0^3 x f'(x) dx$ (vì tích phân không phụ thuộc vào biến).

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

Suy ra $\frac{1}{9} \int_0^3 x f'(x) dx = \frac{1}{9} \left[x f(x) \Big|_0^3 - \int_0^3 f(x) dx \right] = 7 - 1 = 6$.

Vậy $\int_0^1 x f'(3x) dx = 6$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $\int_0^1 f(x) dx = 3$. Tích phân $\int_0^1 x^3 f'(x^2) dx$ bằng

A. $-\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. -1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0, x = 1 \Rightarrow t = 1$.

Do đó

$$\int_0^1 x^3 \cdot f'(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 t \cdot f'(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 x \cdot f'(x) dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

Khi đó

$$\int_0^1 x^3 \cdot f'(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} \left(x \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx \right) = \frac{1}{2} (f(1) - 3) = \frac{1}{2} (4 - 3) = \frac{1}{2}.$$

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x), \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Biết rằng tích phân } I = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = -\frac{a}{b} \text{ (với } a, b \text{ là}$$

các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T = 3a - b$.

A. $T = 0$.

B. $T = -48$.

C. $T = 16$.

D. $T = 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = \int_0^1 x \cdot d f(x) = I = x \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) - \int_0^1 f(x) dx. \quad (1)$$

$$\text{Theo giả thiết: } 5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x) \Rightarrow \int_0^1 [5f(x) - 7f(1-x)] dx = 3 \int_0^1 (x^2 - 2x) dx$$

$$\Rightarrow 5 \int_0^1 f(x) dx - 7 \int_0^1 f(1-x) dx = 3 \int_0^1 (x^2 - 2x) dx \Rightarrow 5 \int_0^1 f(x) dx - 7 \int_0^1 f(1-x) dx = -2. \quad (2)$$

$$\text{Bằng cách đổi biến } t = 1-x, \text{ ta có } \int_0^1 f(1-x) dx = - \int_1^0 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx. \quad (3)$$

$$\text{Thay (3) vào (2), ta có } 5 \int_0^1 f(x) dx - 7 \int_0^1 f(x) dx = -2 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 1.$$

Mặt khác do $5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x)$ nên lần lượt chọn $x=0, x=1$ ta có

$$\begin{cases} 5f(0) - 7f(1) = 0 \\ 5f(1) - 7f(0) = -3 \end{cases} \Rightarrow f(1) = \frac{5}{8}.$$

$$\text{Thay } f(1) = \frac{5}{8} \text{ và } \int_0^1 f(x) dx = 1 \text{ vào (1) ta có } I = f(1) - \int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{8} - 1 = -\frac{3}{8}.$$

$$\text{Vậy } a = 3; b = 8 \Rightarrow T = 3a - b = 9 - 8 = 1.$$

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ và thỏa mãn

$$3xf'(x) = 3 + 2f'(x), \forall x \in D. \text{ Biết rằng } f(2) = \ln 8, f(0) = 0 \text{ và tích phân}$$

$$I = \int_{-1}^0 (f(x) + f(1)) dx = \frac{a \ln 5 - b \ln 2}{3} - 1, (a, b \in \mathbb{Z}). \text{ Tính giá trị } a + b.$$

Lời giải

Chọn A

Với $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ ta có $3xf'(x) = 3 + 2f'(x) \Leftrightarrow (3x-2)f'(x) = 3 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3}{3x-2}$.

$$\text{Khi đó } f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{3}{3x-2}dx = \int \frac{d(3x-2)}{3x-2} = \begin{cases} \ln(3x-2) + C_1, x > \frac{2}{3} \\ \ln(2-3x) + C_2, x < \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Theo bài ra thì $f(2) = \ln 8, f(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ln 4 + C_1 = \ln 8 \\ \ln 2 + C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \ln 2 \\ C_2 = -\ln 2 \end{cases}$. Suy ra $f(1) = \ln 2$.

$$\text{Ta có } I = \int_{-1}^0 (f(x) + f(1))dx = \int_{-1}^0 (\ln(2-3x) - \ln 2 + \ln 2)dx = \int_{-1}^0 \ln(2-3x)dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(2-3x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{3}{2-3x}dx = \frac{3}{3x-2}dx \\ v = x - \frac{2}{3} = \frac{3x-2}{3} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = \frac{3x-2}{3} \cdot \ln(2-3x) \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{3x-2}{3} \cdot \frac{3}{3x-2}dx$$

$$= -\frac{2}{3}\ln 2 + \frac{5}{3}\ln 5 - \int_{-1}^0 dx = \frac{5\ln 5 - 2\ln 2}{3} - 1.$$

Suy ra $a = 5, b = 2 \Rightarrow a + b = 7$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1) = 1, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{9}{5}$ và

$$\int_0^1 f(\sqrt{x})dx = \frac{2}{5}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f^2(x)dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{16}$.

C. $\frac{1}{25}$.

D. $\frac{1}{7}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx = \frac{2}{5}$, đặt: $\sqrt{x} = t \Rightarrow dx = 2t \cdot dt$, đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0, x = 1 \Rightarrow t = 1$.

$$\text{Khi đó: } \int_0^1 f(\sqrt{x})dx = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \int_0^1 2t \cdot f(t)dt = \frac{2}{5} \Rightarrow \int_0^1 x \cdot f(x)dx = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x \cdot dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = f'(x) \cdot dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{x^2}{2} \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot f'(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot f'(x)dx = \frac{(1)^2}{2} \cdot 1 - \frac{1}{5} = \frac{3}{10} \Leftrightarrow \int_0^1 x^2 \cdot f'(x)dx = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Xét: } \int_0^1 [f'(x) + kx^2]^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 2k \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx + k^2 \int_0^1 x^4 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{5} + 2k \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot k^2 = 0 \Leftrightarrow k = -3.$$

$$\text{Khi đó: } \int_0^1 [f'(x) - 3x^2]^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$\Rightarrow \int f'(x) dx = \int 3x^2 dx \Leftrightarrow f(x) = x^3 + C \Leftrightarrow f(1) = (1)^3 + C \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\text{Nên: } f(x) = x^3 \Leftrightarrow f^2(x) = x^6 \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 x^6 dx = \frac{1}{7}.$$

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cos x$, với mọi

$x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x) dx$ bằng:

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. $-\frac{1}{4}$.

D. $-\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Theo đề bài ta có $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cos x$ và $f(0) = 0$ suy ra $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

$$\text{Xét } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$I = x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \quad (*)$$

$$\text{Ta lại có } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \quad (**)$$

$$\text{Xét } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$\text{Đặt } x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$$

x	$0 \quad \frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2} \quad 0$

$$\text{Suy ra } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \quad (***)$$

$$\text{Từ (**) và (***) suy ra: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{4} \text{ thế vào (*) suy ra } I = -\frac{1}{4}.$$

