

Bài 1: (3 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{3x} + \frac{2}{x+1} - 3 \right) \cdot \frac{x+1}{2-4x} - \frac{3x-x^2+1}{3x}$

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm x để A có giá trị bằng 671
- Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $\frac{2}{A} \in \mathbb{Z}$

Bài 2: (2 điểm)

- Tính giá trị $A = x^{15} - 8x^{14} + 8x^{13} - 8x^{12} + \dots - 8x^2 + 8x + 1$ với $x = 7$
- Phân tích thành nhân tử $P = a^8 + a^4b^4 + b^8$

Bài 3: (3,5 điểm)

- Tìm số tự nhiên n để đa thức A chia hết cho đơn thức B
 $A = 3x^{n-1}y^6 - 5x^{n+1}y^4$ và $B = 2x^3y^n$
- Xác định các giá trị của a, b và c để đa thức $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ chia hết cho $(x-3)^3$

Bài 4: (2 điểm)

- Tìm giá trị lớn nhất của tổng $x + y + z$ biết rằng $x + 5y = 21$ và $2x + 3z = 51$ với $x, y, z \geq 0$
- Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của các phân thức $B = \frac{4x+3}{x^2+1}$

Bài 5: (3,5 điểm) Khi xây dựng bể bơi, để thay nước thường xuyên cho bể người ta đặt một vòi nước chảy vào bể và một vòi chảy ra ở lưng chừng bể. Khi bể cạn, nếu mở cả hai vòi thì sau 2 giờ 42 phút bể đầy nước. Còn nếu đóng vòi chảy ra và mở vòi chảy vào thì sau 1 giờ 30 phút thì đầy bể. Biết vòi chảy vào mạnh hơn gấp 2 lần vòi chảy ra.

- Tính thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra.
- Nếu chiều cao của bể là 2m thì khoảng cách từ chỗ đặt vòi chảy ra đến đáy bể là bao nhiêu?

Bài 6: (6 điểm) Từ đỉnh A của $\triangle ABC$ ta hạ các đường vuông góc AM, AN với phân giác trong và ngoài tương ứng của góc B. Hạ các đường vuông góc AP, AQ với phân giác trong và ngoài tương ứng của góc C.

- Chứng minh rằng 4 điểm MNPQ thẳng hàng
- Cho $QN = 10$ cm tính chu vi tam giác ABC
- Cho điểm O chuyển động trên BC tìm vị trí của O sao cho tích khoảng cách từ O đến AB và AC đạt giá trị lớn nhất.

----- Hết -----

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài 1: (3 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{3x} + \frac{2}{x+1} - 3 \right) \cdot \frac{x+1}{2-4x} - \frac{3x-x^2+1}{3x}$

- Rút gọn biểu thức A
- Tìm x để A có giá trị bằng 671
- Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $\frac{2}{A} \in \mathbb{Z}$

Giải:

a) ĐKXD $x \neq 0, -1, \frac{1}{2}$ (0,5 đ)

Ta có $\frac{(x+2)(x+1)+6x-9x(x+1)}{3x(x+1)} \cdot \frac{x+1}{2(1-2x)} - \frac{3x-x^2+1}{3x} = \frac{1+2x}{3x} - \frac{3x-x^2+1}{3x} = \frac{x-1}{3}$ (0,5 đ)

b) Ta có $A = 671 \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} = 671 \Rightarrow x = 2014$ (thỏa mãn) (1 đ)

c) Ta có $\frac{2}{A} = \frac{2}{\frac{x-1}{3}} = \frac{6}{x-1}$ Với $x \in \mathbb{Z}$ để $\frac{2}{A} \in \mathbb{Z}$ thì $x-1$ phải là ước của 6 (0,5 đ)

Hay $x-1 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$

Kết hợp với ĐKXD ta có $x \in \{-5; 2; 3; 4; 7\}$ (0,5 đ)

Bài 2: (2 điểm)

a) Tính giá trị $A = x^{15} - 8x^{14} + 8x^{13} - 8x^{12} + \dots - 8x^2 + 8x + 1$ với $x = 7$

b) Phân tích thành nhân tử $P = a^8 + a^4b^4 + b^8$

Giải:

a) Thay 8 bằng $x+1$ ta có

$A = x^{15} - (x+1)x^{14} + (x+1)x^{13} - (x+1)x^{12} + \dots - (x+1)x^2 + (x+1)x + 1$
 $= x^{15} - x^{15} - x^{14} + x^{14} + x^{13} - x^{13} - x^{12} + \dots - x^3 - x^2 + x^2 + x + 1 = x + 1 = 7 + 1 = 8$ (1 đ)

b) $P = a^8 + a^4b^4 + b^8 = (a^4)^2 + 2a^4b^4 + (b^4)^2 - a^4b^4 = (a^4 + b^4)^2 - (a^2b^2)^2$
 $= (a^4 + b^4 + a^2b^2)(a^4 + b^4 - a^2b^2)$ (0,5 đ)

Làm tương tự với $a^4 + b^4 + a^2b^2 = (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$

Vậy ta có $P = (a^4 + b^4 - a^2b^2)(a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)$ (0,5 đ)

Bài 3: (3 điểm)

a) Tìm số tự nhiên n để đa thức A chia hết cho đơn thức B

$A = 3x^{n-1}y^6 - 5x^{n+1}y^4$ và $B = 2x^3y^n$

b) Xác định các giá trị của a, b và c

để đa thức $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ chia hết cho $(x-3)^3$

Giải:

a) Điều kiện để A chia hết cho B là

$$\begin{cases} n-1 \geq 3 \\ n+1 \geq 3 \\ 6 \geq n \\ 4 \geq n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \geq 4 \\ n \leq 4 \end{cases} \Rightarrow n=4 \quad (1 \text{ đ})$$

Vậy với $n = 4$ thì đa thức A chia hết cho đơn thức B

$$\text{Khi đó } A:B = (3x^3y^6 - 5x^5y^4) : (2x^3y^4) = \frac{3}{2}y^2 - \frac{5}{2}x^2 \quad (0,5 \text{ đ})$$

b) Chia $P(x)$ cho $(x-3)^3$ ta được thương là $x+9$ và dư là $(0,5 \text{ đ})$

$$R(x) = (a+54)x^2 + (b-216)x + 243 + c$$

$$P(x) \div (x-3)^3 \Rightarrow R(x) \equiv 0 \text{ cho ta } (0,5 \text{ đ})$$

$$a+54=0 \Rightarrow a=-54; b-216=0 \Rightarrow b=216; c+243=0 \Rightarrow c=-243 \quad (0,5 \text{ đ})$$

Bài 4: (2 điểm)

a) Tìm giá trị lớn nhất của tổng $x+y+z$ biết rằng $x+5y=21$ và $2x+3z=51$ với $x,y,z \geq 0$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của các phân thức $B = \frac{4x+3}{x^2+1}$

Giải:

a) Cộng vế với vế của các đẳng thức $x+5y=21$ và $2x+3z=51$ ta được

$$3(x+y+z) + 2y = 72 \quad (0,5 \text{ đ})$$

Như vậy $3(x+y+z)$ lớn nhất khi và chỉ khi $2y$ nhỏ nhất. Mặt khác $y \geq 0$ nên $2y$ nhỏ nhất khi $y=0 \Rightarrow x=21$ và $z=3$

Do đó $3(x+y+z)$ lớn nhất bằng 72 $\Rightarrow x+y+z$ lớn nhất bằng 24 khi $x=21; y=0$ và $z=3$ $(0,5 \text{ đ})$

$$\text{b) Ta có } \frac{4x+3}{x^2+1} = \frac{x^2+4x+4-x^2-1}{x^2+1} = \frac{(x+2)^2}{x^2+1} - 1 \geq -1 \Rightarrow \min B = -1 \text{ với } x = -2$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là $B = -1$ khi $x = -2$ $(0,5 \text{ đ})$

$$\text{Mặt khác ta lại có } \frac{4x+3}{x^2+1} = \frac{4x^2+4-4x^2+4x-1}{x^2+1} = \frac{4(x^2+1)-(4x^2-4x+1)}{x^2+1} = 4 - \frac{(2x-1)^2}{x^2+1} \leq 4$$

$$\Rightarrow \max B = 4 \text{ với } x = \frac{1}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của B là $B = 4$ khi $x = \frac{1}{2}$ $(0,5 \text{ đ})$

Bài 5: (4 điểm)

Khi xây dựng bể bơi, để thay nước thường xuyên cho bể người ta đặt một vòi nước chảy vào bể và một vòi chảy ra ở lưng chừng bể. Khi bể cạn, nếu mở cả hai vòi thì sau 2 giờ 42 phút bể đầy nước. Còn nếu đóng vòi chảy ra và mở vòi chảy vào thì sau 1 giờ 30 phút thì đầy bể. Biết vòi chảy vào mạnh hơn gấp 2 lần vòi chảy ra.

a) Tính thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra.

b) Nếu chiều cao của bể là 2m thì khoảng cách từ chỗ đặt vòi chảy ra đến đáy bể là bao nhiêu?

Giải:

a) Gọi thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc mực nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra là x giờ

$$\text{Trong 1 giờ vòi chảy vào bể được } \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3} \text{ bể} \quad (0,5 \text{ đ})$$

Trong 1 giờ vòi chảy ra được $\frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$ bể (0,5 đ)

Nếu mở cả hai vòi, lượng nước chảy vào bể trong một giờ được $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (0,5 đ)

Trong x giờ đầu, chỉ có vòi chảy vào làm việc nên lượng nước chảy vào bể là $\frac{2}{3}x$ bể

Trong 2 giờ 42 phút – x giờ (tức là 2,7 giờ - x giờ) còn lại, cả hai vòi làm việc nên lượng nước chảy vào bể là $\frac{1}{3}(2,7 - x)$ (0,5 đ)

Ta có phương trình: $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}(2,7 - x) = 1$ (0,5 đ)

Do đó x = 0,3. Thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc mực nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra là 0,3 giờ (0,5 đ)

b) Theo đề bài, nếu riêng vòi chảy vào làm việc trong 1,5 giờ thì mực nước cao 2m. Vậy nếu riêng vòi chảy vào làm việc trong 0,3 giờ thì mực nước cao $\frac{2m \cdot 0,3}{1,5} = 0,4m$

Khoảng cách từ chỗ đặt vòi chảy ra đến đáy bể là 0,4 m (0,5 đ)

Bài 6: (6 điểm) Từ đỉnh A của $\triangle ABC$ ta hạ các đường vuông góc AM, AN với phân giác trong và ngoài tương ứng của góc B. Hạ các đường vuông góc AP, AQ với phân giác trong và ngoài tương ứng của góc C.

a) Chứng minh rằng 4 điểm MNPQ thẳng hàng

b) Cho QN = 10 cm tính chu vi tam giác ABC

c) Cho điểm O chuyển động trên BC tìm vị trí của O sao cho tích khoảng cách từ O đến AB và AC đạt giá trị lớn nhất

Giải:

a) Gọi E = AB $\cap$ MN và F = AC $\cap$ PQ

ta thấy tứ giác AQCP và AMBN là hình chữ nhật

$\Rightarrow$ E, F lần lượt là trung điểm của AB và AC $\Rightarrow EF \parallel BC$

Mà $\angle PCQ = \angle_4$ (vì cùng bằng $\angle_3$) nên PQ $\parallel$ BC $\Rightarrow$ PQ thuộc EF (1) (0,5 đ)

Tương tự M, N thuộc đường thẳng EF (2)

Từ (1) và (2) suy ra M, N, P, Q thẳng hàng. (0,5 đ)

b) Ta có QN = QF + EF + EN (1) (0,5 đ)

Theo tính chất hình chữ nhật ta có

$$QF = \frac{1}{2}AC \text{ (tính chất) (2)}$$

$$NE = \frac{1}{2}BC \text{ (tính chất) (3)} \quad (0,5 \text{ đ})$$

$$EF = \frac{1}{2}BC \text{ (Tính chất đường trung bình tam giác) (4)} \quad (0,5 \text{ đ})$$

$$\text{Từ (1) (2) (3) và (4) ta có } QN = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) \quad (0,5 \text{ đ})$$

$$\text{Vậy } QN = 10 \text{ cm thì chu vi của } \triangle ABC = 2QN = 20 \text{ cm} \quad (0,5 \text{ đ})$$

c) Kẻ BI vuông góc với AC và CJ vuông góc với AB (0,5 đ)

Vì OH $\parallel$ CJ, OK $\parallel$ BI nên theo định lý ta có

$$\frac{OH}{CJ} + \frac{OK}{BI} = \frac{BO}{BC} + \frac{CO}{BC} = 1 \quad (0,5 \text{ đ})$$

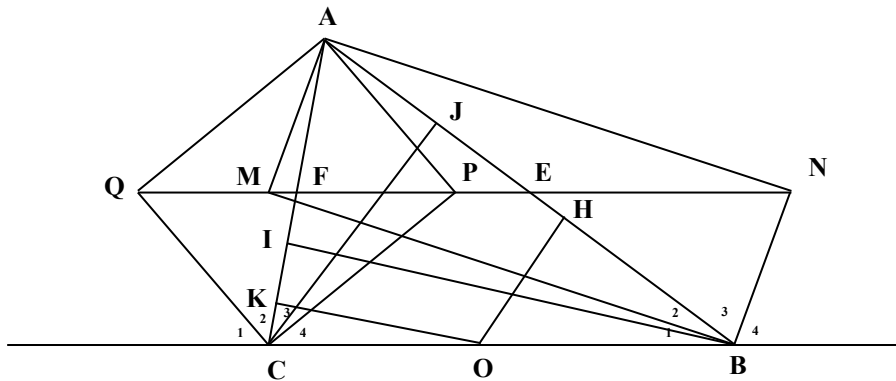
Đặt $OH = x$, $BI = p$ và $CJ = q$

Ta có $0 \leq x \leq q$; $0 \leq OK \leq p$ và $\frac{x}{q} + \frac{OK}{p} = 1$ (0,5 đ)

Do đó $\frac{q}{p} \cdot OH \cdot OK = x(q - x) = -x^2 - qx = -\left(x - \frac{q}{2}\right)^2 + \frac{q^2}{4} \leq \frac{q^2}{4}$ (0,5 đ)

$$\Rightarrow OH \cdot OK \leq \frac{pq}{4}$$

Vậy $OH \cdot OK$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{pq}{4}$ khi và chỉ khi $x = \frac{q}{2}$ hay O là trung điểm của BC (0,5 đ)



----- Hết -----

Chú ý: - Các cách giải khác nếu đúng cho điểm tương tự
 - Riêng bài 6 không vẽ hình hoặc vẽ hình sai không chấm