# BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

**Bài 1.** Biết rằng ma trận vuông A cấp n có n trị riêng là $\lambda_1, \lambda_2, ...., \lambda_n$. Tìm các giá trị riêng của ma trận $A^3$.

**Bài 2.** Hỏi có tồn tại hai ma trận A và B sao cho AB – BA = E (E là ma trận đơn vị)?

**Bài 3.** Xác định a để ma trận sau có hạng bé nhất

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & a & -3 & -2 \\ 3 & a & 0 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

**Bài 4.** Cho A là ma trận vuông cấp n, E là ma trận đơn vị cùng cấp và $A^k = 0$ (ma trận không), $k \in \mathbb{N}, k > 1$.

Chứng minh rằng $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + .... + A^{k-1}$.

**Bài 5.** Cho phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 2 & 7 & 2\lambda+1 \\ 3 & 9 & 4\lambda \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Giải phương trình trên khi $\lambda = 0$.

b) Tìm $\lambda$ để phương trình trên có vô số nghiệm.

**Bài 6.** Chứng tỏ rằng tổng các nghiệm của phương trình

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

bằng – 1.

**Bài 7.** Giả sử $a^3 + b^3 + c^3 = abc$. Chứng minh rằng tồn tại ma trận $X \neq 0$ (ma trận không) thoả mãn

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Bài 8.** Cho $z_n = \left( \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i} \right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Tìm $n$ nhỏ nhất sao cho $\mathrm{Re}(z_n) = 0$.

**Bài 9.** Tìm giá trị lớn nhất của các định thức cấp 3 mà các phần tử chỉ có thể là 1 hay – 1.

**Bài 10.** Cho ma trận $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Tính $J^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

b) Hãy biểu diễn ma trận $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$, $a,b,c \in \mathbb{R}$ theo các ma trận E, $J$ và

$J^2$ (E là ma trận đơn vị); từ đó suy ra ma trận $M^2$ theo E, $J$ và $J^2$.

**Bài 11.** Cho phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} a & -b & b \\ b & a & -a \\ a & b & 1-b \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

a) Giải phương trình trên khi $a = 0$, $b = 1$.

b) Chứng minh rằng phương trình trên luôn có nghiệm với mọi $a,b \in \mathbb{R}$ thoả

mãn $a^2 + b^2 > 0$.

**Bài 12.** Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số $\lambda$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 4_1x + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7 \end{cases}$$

**Bài 13.** Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

a) Tìm vectơ riêng và trị riêng của $A$.

b) Tìm một ma trận khả đảo $V$ sao cho $V^{-1}AV = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

**Bài 14.** Tìm $\lambda$ để tồn tại ma trận $X$ sao cho

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ \lambda \\ 2 \end{pmatrix},$$

sau đó tìm $X$.

**Bài 15.** Chứng minh rằng nếu $z + \frac{1}{z} = 2\sin\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, thì $z^{4k} + \frac{1}{z^{4k}} = 2cos4k\alpha$ với $k \geq 0$ nguyên.

**Bài 16.** Cho A là ma trận vuông thực. Chứng minh rằng nếu A không có giá trị riêng thực thì detA > 0.

**Bài 17.** Chứng minh rằng tổng bình phương các nghiệm của phương trình $x^7 - 1 = 0$ bằng 0.

**Bài 18.** Cho *A* là một ma trận vuông thực cấp *n* có $\det A \neq 0$ và $A^t$ là ma trận chuyển vị của *A*. Chứng minh rằng, với $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực

$$\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right] A^t A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

**Bài 19.** Tìm giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

và tìm ma trận *U* sao cho $U^{-1}AU$ là một ma trận đường chéo.

**Bài 20.** a) Cho $K = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,3}$. Tính $K^2$, $J^2$, *KJ*, *JK*.

b) Tính $A^n$, n > 0 nguyên, với $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

**Bài 21.** Cho đa thức $f(x) = 3x^3 - 2x + 5$. Tính f(*A*) trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Bài 22.** Chứng minh rằng các giá trị riêng của ma trận $A^2$ bằng các bình phương của các giá trị riêng tương ứng của ma trận A.

**Bài 23.** Cho A là một ma trận vuông thực. Chứng minh rằng nếu detA < 0 thì A luôn có trị riêng thực.

**Bài 24.** A là ma trận vuông sao cho $A^3 = 0$ (ma trận không). Hãy tính $(E + A)^n$ với n nguyên > 0, E là ma trận đơn vị.

**Bài 25.** Cho A là ma trận vuông sao cho $A^2 = A$. Hãy tính $(E + A)^n$, với n nguyên > 0, E là ma trận đơn vị.

**Bài 26.** Chứng minh rằng các trị riêng của ma trận nghịch đảo $A^{-1}$ bằng nghịch đảo các giá trị riêng của ma trận A.

**Bài 27.** Cho $a_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k,n \in \mathbb{C}$. Tính $S = a_0^m + a_1^m + ... + a_{n-1}^m,\ m \in \mathbb{N}$.

**Bài 28.** Cho $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Tìm ma trận $A^n,\ n \in \mathbb{N}$.

**Bài 29.** Cho $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Tìm $A^{100}$.

**Bài 30.** Cho $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$. với $a, b \in \mathbb{R}$. Tìm $A^n,\ n \in \mathbb{N}$.

**Bài 31.** Cho $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Tìm $A^{1000}$.

**Bài 32.** Chứng minh rằng nếu ma trận vuông A thoả mãn $A^4 + E = 0$, thì các giá trị riêng của A không thể là số thực.

**Bài 33.** Tìm hạng của ma trận sau phụ thuộc vào *m*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & m & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & m & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Bài 34.** Tính định thức sau, trong đó *u*, *v* là nghiệm phương trình $x^2 + p = 0$; $p \in \mathbb{R}$: $\begin{vmatrix} u & v & u & v \\ v & u & v & u \\ a & b & c & d \\ p & p & p & p \end{vmatrix}$.

**Bài 35.** Tìm một ma trận chéo đồng dạng với ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Bài 36.** Tính $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2000}$.

**Bài 37.** Cho ma trận vuông cấp 10

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

trong đó $a_{10,1} = a_{12} = a_{23} = .... = a_{9,10} = 1$, còn những phần tử khác bằng không. Tính $A^{10}$.

**Bài 38.** Cho ma trận vuông cấp 10

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

trong đó $a_{1,10} = a_{21} = a_{32} = .... = a_{10,9} = 1$, còn những phần tử khác bằng không. Tính $A^{10}$.

**Bài 39.** Tìm một ma trận vuông cấp ba $B = (b_{ij}),\ b_{ij} \neq 0,\ i, j = 1,2,3$ sao cho det$B$ = 1998.

**Bài 40.** Tìm một ma trận vuông cấp ba $B = (b_{ij}),\ b_{ij} \neq 0,\ i, j = 1,2,3$ sao cho det$B$ = 2000.

**Bài 41.** Tìm một ma trận vuông cấp hai $B = (b_{ij}),\ b_{ij} \neq 0,\ i, j = 1,2$ sao cho $B$ có 2 trị riêng $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$.

**Bài 42.** Tìm một ma trận vuông cấp hai $A = (a_{ij}),\ a_{ij} \neq 0,\ i, j = 1,2$ sao cho $A$ có 2 trị riêng $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 4$.

**Bài 43.** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau:

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a & b \\ a & a & a & b & a \\ a & a & b & a & a \\ a & b & a & a & a \\ b & a & a & a & a \end{pmatrix}.$$