Nguyễn Phi Hùng - Võ Thành Văn

Đại học Khoa học Huế

****

Phương pháp đặt ẩn phụ trong giải phương trình vô tỷ

A. Lời nói đầu

Qua bài viết này chúng tôi muốn giới thiệu cho các bạn một số kĩ năng đặt ẩn phụ trong giải phương trình vô tỷ. Như chúng ta đã biết có nhiều trường hợp giải một phương trình vô tỷ mà ta biến đổi tương đương sẽ ra một phương trình phức tạp , có thể là bậc quá cao ...Có lẽ phương pháp hữu hiệu nhất để giải quyết vấn đề này chính là đặt ẩn phụ để chuyển về một phương trình đơn giản và dễ giải quyết hơn .

Có 3 bước cơ bản trong phương pháp này :

- Đặt ẩn phụ và gán luôn điều kiện cho ẩn phụ
- Đưa phương trình ban đầu về phương trình có biến là ẩn phụ

Tiến hành giải quyết phương trình vừa tạo ra này . Đối chiếu với điều kiện để chọn ẩn phụ thích hợp.

- Giải phương trình cho bởi ẩn phụ vừa tìm được và kết luận nghiệm

* Nhận xét :

- Cái mấu chốt của phương pháp này chính là ở bước đầu tiên . Lí do là nó quyết định đến toàn bộ lời giải hay, dở , ngắn hay dài của bài toán .
- Có 4 phương pháp đặt ẩn phụ mà chúng tôi muốn nêu ra trong bài viết này đó là :

+ PP Lượng giác hoá
+ PP dùng ẩn phụ không triệt để
+ PP dùng ẩn phụ đưa về dạng tích
+ PP dùng ẩn phụ đưa về hệ

B. Nội dung phương pháp

I. Phương pháp lượng giác hoá :

1. Nếu $|x| \le a$ thì ta có thể đặt $x = a\sin t$,t$\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$hoặc $x = a\cos t, t \in (0;\pi)$

Ví dụ 1 : Giải phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x(1+2\sqrt{1-x^2})$

Lời giải : ĐK :$|x| \le 1$ Đặt $x = \sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$Phương trình đã cho trở thành :

$$\sqrt{1+\cos t} = \sin t(1+2\cos t) \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right) = \sin t + \sin 2t = 2\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{t}{2}\right)(\sqrt{2}\sin\left(\frac{3t}{2}\right) - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{t}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{3t}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = (2k+1)\pi \\ t = \frac{\pi}{6} + k\frac{4\pi}{3} \end{array}\right.$$

Kết hợ p với điều kiện của t suy ra :$t = \frac{\pi}{6}$

Vậy phương trình có 1 nghiệm : $x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Ví dụ 2 : Giải phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3}\right] = \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1-x^2}{3}}$

Lời giải : ĐK : $|x| \le 1$

Khi đó VP > 0 .

Nếu $x \in [-1;0]$: $\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3} \le 0$

Nếu $x \in [0;1]$: $\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3} \ge 0$.

Đặt $x = \cos t$, với $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ta có :

$$2\sqrt{6}\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right) + \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\left(\cos^3\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^3\left(\frac{t}{2}\right)\right) = 2 + \sin t \Leftrightarrow 2\sqrt{6}\cos\left(1 + \frac{1}{2}\sin t\right) = 2 + \sin t$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{6}\cos t - 1)(2 + \sin t) = 0 \Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Ví dụ 3 : Giải phương trình: $\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} = \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} + \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$

Lời giải : ĐK :$|x| \le \frac{1}{2}$

Đặt $2x = \cos t, t \in (0;\pi)$

phương trình đã cho trở thành :

$$\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right) + \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)\sqrt{2} = \tan\left(\frac{t}{2}\right) + \cot an\left(\frac{t}{2}\right) \Leftrightarrow 2(1+\sin t) = \frac{4}{\sin^2 t} \Leftrightarrow \sin^3 t + \sin^2 t - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$

Ví dụ 4 (THTT): Giải phương trình: $x^3-3x=\sqrt{x+2}$ (1)

Hướng dẫn :

Nếu $x<-2$: phương trình không xác định .

Chú ý với $x>2$ ta có : $x^3-3x=x+x(x^2-4)>x>\sqrt{x+2}$

Vậy để giải phương trình (1) ta chỉ cần xét với $x\in[-2;2]$

Đặt $x=2\cos t, t\in(0;\pi)$

khi đó phương trình đã cho trở thành : $\cos 3t=\cos\left(\frac{t}{2}\right)$

2. Nếu $|x|\geq a$ thì ta có thể đặt :

$x=\frac{a}{\sin t}, t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), t\neq 0$ hoặc $x=\frac{a}{\cos t}, t\in(0;\pi); t\neq\frac{\pi}{2}$

Ví dụ 5 : Giải phương trình: $x^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=1$

Lời giải : ĐK : $|x|>1$

Đặt $x=\frac{1}{\sin t}, t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Phương trình đã cho trở thành :

$$\frac{1}{\sin^2 t}(1+\cot ant)=1\Leftrightarrow -\cos^2 t=\cot ant\Leftrightarrow \cos t\left(\cos t+\frac{1}{\sin t}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos t=0\\ \sin 2t=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow t=-\frac{\pi}{12}+k\pi$$

kết hợp với điều kiện của t suy ra $t=-\frac{\pi}{12}$

Vậy phương trình có 1 nghiệm : $x=\frac{1}{\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)}=-\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$

Tổng quát: Giải phương trình $x^2\left(a+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=a$

Ví dụ 6 : Giải phương trình: $x+\frac{3x}{\sqrt{x^2-9}}=2$

Lời giải : ĐK : $|x|>3$

Đặt $x=\frac{3}{\cos t}, t\in(0;\pi), t\neq\frac{\pi}{2}$, phương trình đã cho trở thành :

$$\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{\sin t}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow 1+\sin 2t=2\sin^2 2t\Leftrightarrow \sin 2t=1\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\frac{3}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}=3\sqrt{2}\text{ (thoả mãn)}$$

Tổng quát: Giải phương trình: $x+\frac{ax}{\sqrt{x^2-a^2}}=b$ với a,b là các hằng số cho trước

3. Đặt $x=\tan t, t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ để đưa về phương trình lượng giác đơn giản hơn :

Ví dụ 7 : Giải phương trình: $x^3-3\sqrt{3}x^2-3x+\sqrt{3}=0$ (1)

Lời giải :

Do $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ không là nghiệm của phương trình nên (1) ⇔ $\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \sqrt{3}$ (2)

Đặt $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, Khi đó (2) trở thành : $\tan 3t = \sqrt{3} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}$

Suy ra (1) có 3 nghiệm : $x = \tan\left(\frac{\pi}{9}\right); x = \tan\left(\frac{4\pi}{9}\right); x = \tan\left(\frac{7\pi}{9}\right)$

Ví dụ 8 : Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 1} + \frac{x^2 + 1}{2x} = \frac{\left(x^2 + 1\right)^2}{2x\left(1 - x^2\right)}$

Lời giải : ĐK : $x \neq 0; x \neq \pm 1$

Đặt $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), t \neq 0; \pm\frac{\pi}{4}$, phương trình đã cho trở thành :

$$\frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\sin 2t} = \frac{2}{\sin 4t} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos t}\left(1 + \frac{1}{2\sin t} - \frac{1}{2\sin t.\cos 2t}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\sin t.\cos 2t + \cos 2t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin t\left(1 - 2\sin^2 t\right) - 2\sin^2 t = 0 \Leftrightarrow \sin t\left(1 - \sin t - 2\sin^2 t\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin t = 0 \\ \sin t = -1 \\ \sin t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ t = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện suy ra : $t = \frac{\pi}{6}$

Vậy phương trình có 1 nghiệm : $x = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

4. Mặc định điều kiện : $|x| \leq a$. Sau khi tìm được số nghiệm chính là số nghiệm tối đa của phương trình và kết luận :

Ví dụ 9 : Giải phương trình: $\sqrt[3]{6x + 1} = 2x$

Lời giải :

Phương trình đã cho tương đương với : $8x^3 - 6x = 1 (1)$

Đặt $x = \cos t, t \in [0; \pi]$, Lúc đó (1) trở thành : $\cos 3t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \pm\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} (k \in Z)$

Suy ra (1) có tập nghiệm : $S = \left[\cos\left(\frac{\pi}{9}\right); \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right); \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)\right]$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho có tập nghiệm chính là S

II. Phương pháp dùng ẩn phụ không triệt để

* Nội dung phương pháp :

Đưa phương trình đã cho về phương trình bậc hai với ẩn là ẩn phụ hay là ẩn của phương trình đã cho :

Đưa phương trình về dạng sau : $\sqrt{f(x)}.Q(x) = f(x) + P(x).x$

khi đó :

Đặt $\sqrt{f(x)} = t, t \geq 0$. Phương trình viết thành : $t^2 - t.Q(x) + P(x) = 0$

Đến đây chúng ta giải t theo x. Cuối cùng là giải quyết phương trình $\sqrt{f(x)} = t$ sau khi đã đơn giản hóa và kết luận

Ví dụ 10 : Giải phương trình $2\sqrt{2x + 4} + 4\sqrt{2 - x} = \sqrt{9x^2 + 16}$ (1)

Lời giải : ĐK : $|x| \leq 2$

Đặt $t=\sqrt{2(4-x^2)}$

Lúc đó :(1) $\Leftrightarrow 4(2x+4)+16\sqrt{2(4-x^2)}+16(2-x)=9x^2+16 \Leftrightarrow 8(4-x^2)+16\sqrt{2(4-x^2)}=x^2+8x$ Phương trình trở thành : $4t^2+16t-x^2-8x=0$

Giải phương trình trên với ẩn t , ta tìm được : $t_1=\frac{x}{2}; t_2=-\frac{x}{2}-4$

Do $|x|\le 2$ nên $t_2<0$ không thỏa điều kiện $t\ge 0$

Với $t=\frac{x}{2}$ thì : $\sqrt{2(4-x^2)}=\frac{x}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x\ge 0 \\ 8(4-x^2)=x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (thỏa mãn điều kiên $|x|\le 2$)

Ví dụ 11 :Giải phương trình $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$

Lời giải : ĐK : $x\ge -1$

Đặt $t=\sqrt{x+1}\ge 0$,phương trình đã cho trở thành :

$xt^2+12t-36=0 \Leftrightarrow t=\frac{-6\pm 6t}{x}$

* Với $t=\frac{-6-6t}{x}$, ta có : $(x+6)t=-6$ (vô nghiệm vì : $VT\ge 0; VP<0$)

* Với $t=\frac{-6+6t}{x}$, ta có : $6=(6-x)t$

Do $x=6$ không là nghiệm của phương trình nên : $t=\frac{6}{6-x} \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\frac{6}{6-x}$

Bình phương hai vế và rút gọn ta được : $x=3$ (thỏa mãn)

Tổng quát: Giải phương trình: $x^2+ax+2b\sqrt{x+a}=b^2$

Ví dụ 12 : Giải phương trình: $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$

Lời giải :

Đặt $\sqrt{2x^2+1}=t\ge 1$

Phương trình đã cho viết thành :

$3(t-1)=x+3(t^2-1)-3x^2+8xt \Leftrightarrow 3t^2-(8x-3)t-3x^2+x=0$

Từ đó ta tìm được $t=\frac{x}{3}$ hoặc $t=1-3x$

Giải ra được : $x=0$

* Nhận xét : Cái khéo léo trong việc đặt ẩn phụ đã được thể hiện rõ trong ở phương pháp này và cụ thể là ở ví dụ trên . Ở bài trên nếu chỉ dừng lại với việc chọn ẩn phụ thì không dễ để giải quyết trọn vẹn nó . Vấn đề tiếp theo chính là ở việc kheo léo biến đổi phần còn lại để làm biến mất hệ số tự do , việc gải quyết t theo x được thực hiện dễ dàng hơn .

Ví dụ 13 : Giải phương trình: $2008x^2-4x+3=2007x\sqrt{4x-3}$

Lời giải : ĐK : $x\ge \frac{3}{4}$

Đặt $\sqrt{4x-3}=t\ge 0$ phương trình đã cho trở thành : $2008x^2-2007xt-t^2=0$

Giải ra : $x=t$ hoặc $x=-\frac{t}{2008}$ (loại)

* $x=t$ ta có : $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Vậy $x=1, x=3$ là các nghiệm của phương trình đã cho .

Ví dụ 14 : Giải phương trình: $(4x-1)\sqrt{x^3+1}=2x^3+2x+1$

Lời giải : ĐK : $x \ge -1$

Đặt $t = \sqrt{x^3+1}$,Phương trình đã cho trở thành $2(t^2-1)+2x+1=(4x-1)t \Leftrightarrow 2t^2-(4x-1)t+2x-1=0$

Phương trình trên đã khá đơn giản !!!!!!!

III. Phương pháp dùng ẩn phụ đưa về dạng tích

1. Dùng một ẩn phụ

Ví dụ 15 : Giải phương trình: $x^2+\sqrt{x+\frac{3}{2}}=\frac{9}{4}$ (1)

Lời giải : ĐK : $x \ge -\frac{3}{2}$

Đặt $\sqrt{x+\frac{3}{2}}=t \ge 0$ phương trình (1) trở thành :

$$\left(t^2-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}-t \Leftrightarrow t(t^3-3t+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t^3-3t+1=0(2) \end{array}\right.$$

(2) giải được bằng cách áp dụng phương pháp I :

Đặt $x=2\cos t, t\in(0;\pi)$ để đưa về dạng : $\cos 3t=-\frac{1}{2}$

Tổng quát: Giải phương trình: $x^2+\sqrt{x+a}=a^2$ với a là hằng số cho trước .

Ví dụ 16 :Giải phương trình: $x^3-3x^2+2\sqrt{(x+2)^3}=6x(1)$

Lời giải : ĐK : $x \ge -2$

Viết lại (1) dưới dạng : $x^3-3x(x+2)+2\sqrt{(x+2)^3}=0(2)$

Đặt $t=\sqrt{x+2}\ge 0$, Khi đó (2) trở thành :

$$x^3-3xt^2+2t^3=0 \Leftrightarrow (x-t)^2(x+2t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=t \\ x=-2t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{x+2} \\ x=-2\sqrt{x+2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\le 0 \\ x^2-4x-8=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=2-2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm : $x=2, x=2-2\sqrt{3}$

Ví dụ 17 : Giải phương trình : $x+\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=0$

Lời giải : ĐK : $x\in[1;6]$ (1)

Đặt $t=\sqrt{x-1}\ge 0$ (2) , phương trình đã cho trở thành :

$t^2+\sqrt{5+t}=5$ (3) $\Leftrightarrow t^4-10t^2-t+20=0 \Leftrightarrow (t^2+t-4)(t^2-t-5)=0$

Đối chiếu với hai điều kiện (1) và (2) thay vào và giải ra : $x=\frac{11-\sqrt{17}}{2}$

Ví dụ 18 : Giải phương trình: $x=\left(2006+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2$

Lời giải : ĐK : $x\in[0;1]$ (1)

Đặt $t=\sqrt{1-\sqrt{x}} \Rightarrow 0\le t\le 1$, Khi đó : $\sqrt{x}=1-t^2, x=(1-t^2)^2$,phương trình đã cho trở thành :

$(1-t^2)=(2006+1-t^2)(1-t)^2 \Leftrightarrow (1-t)^2(1+t)^2=(2007-t^2)(1-t)^2 \Leftrightarrow 2(1-t)^2(t^2+t-1003)=0$

Vì $0\le t\le 1$ nên $t^2+t-1003<0$

Do đó phương trình tương đương với : $t-1=0 \Leftrightarrow t=1$

Do vậy $x=0$ (thỏa (1))

2. Dùng 2 ẩn phụ .

Ví dụ 19 : Giải phương trình: $\sqrt{4x^2+5x+1}-2\sqrt{x^2-x+1}=9x-3$

Lời giải :

Đặt $a=\sqrt{4x^2+5x+1}; b=2\sqrt{x^2-x+1}$

$\Rightarrow a^2-b^2=9x-3 \Rightarrow a-b=a^2-b^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=0 \\ a+b-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3} \\ \begin{cases} a-b=9x-3 \\ 2a=9x-2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3} \\ x=0 \\ x=\dfrac{56}{65} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của pt là $S=\left\{\frac{1}{3};0;\frac{56}{65}\right\}$

Ví dụ 20 : Giải phương trình: $2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8}$ (1)

Lời giải : ĐK : $\left[\begin{array}{l} -2\le x\le 1 \\ x\ge 2 \end{array}\right.$ (*)

Đặt $u=\sqrt{x^2-2x+4}, v=\sqrt{x+2}$ ta có : $u^2-v^2=x-3x+2$

Lúc đó (1) trở thành : $2(u^2-v^2)=3uv \Leftrightarrow (2u+v)(u-2v)=0 \Leftrightarrow u=2v$ (Do $2u+v>0$)

Tìm x ta giải : $\sqrt{x^2-2x+4}=2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow x^2-6x-4=0 \Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{13}$ (Thỏa (*))

Vậy (1) có 2 nghiệm : $x_{1,2}=3\pm\sqrt{13}$

Ví dụ 21 : Giải phương trình: $\sqrt{5x^2-14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$

Lời giải : ĐK : $x\ge 5$

Chuyển vế rồi bình phương hai vế phương trình mới ,ta có:

$(x+1)(5x+9)=x^2+24x+5+10\sqrt{(x+4)(x-5)(x+1)} \Leftrightarrow 2(x^2-4x-5)+3(x+4)-5\sqrt{(x^2-4x-5)(x+4)}=0$ (2)

Đặt $u=\sqrt{x^2-4x-5}, v=\sqrt{x+4}, u,v\ge 0$,thì :

$(2)\Leftrightarrow 2u^2+3v^2-5uv=0 \Leftrightarrow (u-v)(2u-3v)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ 2u=3v \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x-9=0 \\ 4x^2-25x-56=0 \end{array}\right.$

Giải ra ta được 2 nghiệm thỏa mãn : $x_1=\dfrac{5+\sqrt{61}}{2}; x_2=8$

Ví dụ 22 : Giải phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x(1-x)^2}+\sqrt[4]{(1-x)^3}=\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2(1-x)}$

Lời giải : ĐK : $0\le x\le 1$

Đặt : $\begin{cases} u=\sqrt[4]{x} \\ v=\sqrt[4]{1-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u\ge 0 \\ v\ge 0 \\ u^4+v^4=1 \end{cases}$

Từ phương trình ta được :

$u^2+uv^2+v^3=v^2+u^3+u^2v \Leftrightarrow (u-v)(u+v)(1-u-v)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u-v=0 \\ u+v=1 \end{array}\right.$ (Do $u+v>0$)

từ đó ta giải ra được các nghiệm : $x=0; x=1; x=\dfrac{1}{2}$

3. Dùng 3 ẩn phụ .

Ví dụ 23 : Giải phương trình: $\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt[3]{x^2-x-8}+\sqrt[3]{x^2-8x+1}=2$

Lời giải :

Đặt $a=\sqrt[3]{7x+1}, b=-\sqrt[3]{x^2-x-8}, c=\sqrt[3]{x^2-8x+1}$ ta có :

$$\begin{cases} a+b+c=2 \Leftrightarrow (a+b+c)^3=8(1) \\ a^3+b^3+c^3=(7x+1)-(x^2-x-8)+(x^2-8x-1)=8(2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có : $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=3(a+b)(b+c)(c+a)=0$

Nên : $(a+b)(b+c)(c+a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right.$

từ đó dễ dàng tìm ra 4 nghiệm của phương trình : $S=(-1;0;1;9)$

Ví dụ 24 : Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{5-x}+\sqrt[3]{2x-9}-\sqrt[3]{4x-3}=0$ (1)

Lời giải :

Đặt $a=\sqrt[3]{3x+1}, b=\sqrt[3]{5-x}, c=\sqrt[3]{2x-9}$,ta có: $a^3+b^3+c^3=4x-3$

khi đó từ (1) ta có : $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$

Giải như ví dụ 23 suy ra được 3 nghiệm của phương trình : $x=-3; x=4; x=\frac{8}{5}$

IV. Phương pháp dùng ẩn phụ đưa về hệ

1. Dùng ẩn phụ đưa về hệ đơn giản giải bằng phép thế hoặc rút gọn theo vế .

a. Dùng một ẩn phụ .

Ví dụ 25 : Giải phương trình: $x^2+\sqrt{x+5}=5$

Lời giải : ĐK : $x\geq -5$

Đặt $t=\sqrt{x+5}, t\geq 0$ Ta có : $x=t^2-5$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+t=5 \\ t^2-x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+t=5 \\ x^2-t^2+t+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+t=5 \\ (x+t)(x-t+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+t=5 \\ x+t=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+t=5 \\ x-t=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1-\sqrt{21}}{2} \\ x=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$$

Tổng quát: Giải phương trình: $x^2+\sqrt{x+a}=a$

b. Dùng 2 ẩn phụ .

* Nội Dung : $\sqrt[m]{a+f(x)}+\sqrt[n]{b-f(x)}=c$

* Cách giải :

Đặt : $u=\sqrt[m]{a+f(x)}, v=\sqrt[n]{b-f(x)}$

Như vậy ta có hệ : $\begin{cases} u+v=c \\ u^m+v^n=a+b \end{cases}$

Ví dụ 26 : Giải phương trình: $\sqrt[4]{57-x}+\sqrt[4]{x+40}=5$ (1)

Lời giải : ĐK : $-40\leq x\leq 57$

Đặt $u=\sqrt[4]{57-x},, v=\sqrt[4]{x+40}$

Khi đó :(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ u^4+v^4=97 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ \left[(u+v)^2-2uv\right]^2-2u^2v^2=97 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ 2(uv)^2-10uv+528=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ \left[\begin{array}{l} uv=6 \\ uv=44 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ uv=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases} \\ \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \end{array}\right. \text{(Do hệ } \begin{cases} u+v=5 \\ uv=44 \end{cases} \text{vô nghiệm)}$$

Đến đây chỉ việc thay vào để tìm nghiệm của phương trình ban đầu .

Ví dụ 27 : Giải phương trình: $\sqrt{\sqrt{2}-1-x}+\sqrt[4]{x}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Lời giải : ĐK : $0 \le x \le \sqrt{2}-1$

Đặt : $\begin{cases} \sqrt{\sqrt{2}-1-x}=u \\ \sqrt[4]{x}=v \end{cases}$ với $\begin{cases} 0 \le u \le \sqrt{\sqrt{2}-1} \\ 0 \le v \le \sqrt[4]{\sqrt{2}-1} \end{cases}$ (*)

Như vậy ta được hệ :

$$\begin{cases} u+v=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ u^2+v^4=\sqrt{2}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}-v \\ \left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}-v\right)^2+v^4=\sqrt{2}-1(1) \end{cases}$$

Giải (1) :$(1) \Leftrightarrow (v^2+1)^2-\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}+v\right)^2=0 \Leftrightarrow v^2-v+1-\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}=0 \Leftrightarrow v_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{\dfrac{4}{\sqrt[4]{2}}-3}}{2}\left(v_{1,2}>0\right)$

Vậy $v_{1,2}$ thỏa (*) chính là 2 nghiệm của phương trình đã cho .

Ví dụ 28 : Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{7}{4}\sqrt{x}-1+x^2}=\left(1-\sqrt{x}\right)^2$

Lời giải :

Đặt : $\begin{cases} y=\sqrt{x} \ge 0 \\ z=1-\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=1 \\ y^4-z^4=\dfrac{7}{4}\sqrt{x}-1=\dfrac{7}{4}y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=1 \\ y^4-(1-y)^4=\dfrac{7}{4}y-1(*) \end{cases}$

Giải phương trình (*),ta có: $4y\left(y-\dfrac{3}{4}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=\dfrac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{9}{16} \end{array}\right.$

2. Dùng ẩn phụ đưa về hệ đối xứng

Dạng 1 : Giải phương trình: $x^n+b=a\sqrt[n]{ax-b}$

Cách giải: Đặt $t=\sqrt[n]{ax-b}$ ta có hệ : $\begin{cases} x^n+b=at \\ t^n+b=ax \end{cases}$ Việc giải hệ này đã trở nên dễ dàng

Ví dụ 29 : Giải phương trình: $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$

Lời giải :

Đặt : $t=\sqrt[3]{2x-1}$ ta có hệ : $\begin{cases} x^3+1=2t \\ t^3+1=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+1=2t \\ x^3-t^3=2(t-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+1=2t \\ (x-t)(x^2+t^2+tx+2)=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow 2\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=t \\ x^3-2x+1=0 \end{cases}(1) \\ \begin{cases} x^3+1=2t \\ x^2+t^2+tx+2=0 \end{cases}(2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(x^2+x-1)=0 \\ (t+x)^2+x^2+t^2+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là : $S = \left(1; \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$

Dạng 2 : Giải phương trình: $x = a + \sqrt{a + \sqrt{x}}$

Cách giải : Đặt $t = a + \sqrt{x}$,phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x = a + \sqrt{t} \\ t = a + \sqrt{x} \end{cases}$

<u>Ví dụ 30 :</u> Giải phương trình: $x = 2007 + \sqrt{2007 + \sqrt{x}}$

<u>Lời giải :</u> ĐK : $x \geq 0$

Đặt : $t = 2007 + \sqrt{x}$ (1), PT

Lấy (3) trừ (2) ta được : $x - t = \sqrt{t} - \sqrt{x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{t} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{t} + \sqrt{x} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = t$

(1) $x - \sqrt{x} - 2007 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{8030 + 2\sqrt{8029}}{4}$ (Do $x \geq 0$)

Dạng 3 : Chọn ẩn phụ từ việc làm ngược :

<u>Ví dụ 31</u> : Giải phương trình: $x^2 - 2x = 2\sqrt{2x - 1}$

Lời giải : ĐK : $x \geq \dfrac{1}{2}$

Đặt $\sqrt{2x - 1} = ay + b$

Chọn a, b để hệ : $\begin{cases} x^2 - 2x = 2(ay + b) \\ (ay + b)^2 = 2x + 1 \end{cases}$ $\left(x \geq \dfrac{1}{2}, y \geq 1\right)$ (*) là hệ đối xứng .

Lấy $a = 1, b = -1$ ta được hệ : $\begin{cases} x^2 - 2x = 2(y - 1) \\ y^2 - 2y = 2(x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 2(y - 1) \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

Giải hệ trên ta được : $x = y = 2 \pm \sqrt{2}$

Đối chiếu với điều kiện của hệ (*) ta được nghiệm duy nhất của phương trình là : $x = 2 + \sqrt{2}$

Dạng 4 :

Nội dung phương pháp :

Cho phương trình : $\sqrt[n]{ax + b} = c(dx + e)^n + \alpha x + \beta$

với các hệ số thỏa mãn : $\begin{cases} d = ac + \alpha \\ e = bc + \beta \end{cases}$

Cách giải :

Đặt $dy + e = \sqrt[n]{ax + b}$

<u>Ví dụ 32 :</u> Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{4x + 9}{28}} = 7x^2 + 7$

<u>Lời giải :</u> ĐK : $x \geq -\dfrac{9}{4}$

PT $\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{4x + 9}{28}} = 7\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{7}{4}$

- Kiểm tra : $a = \dfrac{1}{7}, b = \dfrac{9}{28}, c = 7, d = 1, e = \dfrac{1}{2}, \alpha = 0, \beta = -\dfrac{7}{4}$ (thoả mãn) ☺

Đặt : $y + \dfrac{1}{2} = \sqrt{\dfrac{4x + 9}{28}} \Leftrightarrow y^2 + y + \dfrac{1}{4} = \dfrac{4x + 9}{28} \Leftrightarrow 7y^2 + 7y + \dfrac{7}{4} = x + \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow x + \dfrac{1}{2} = 7y^2 + 7y$ (1)

Mặt khác : $y+\frac{1}{2}=7x^2+7x$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ : $\begin{cases} x+\frac{1}{2}=7y^2+7y \\ y+\frac{1}{2}=7x^2+7x \end{cases}$ Đây là hệ đối xứng loại II đã biết cách giải .

<u>Ví dụ 33</u> : Giải phương trình: $x^2-6x+3=\sqrt{x+3}, x\geq 3$

<u>Lời giải :</u>

PT $\Leftrightarrow (x-3)^2-6=\sqrt{x+3}$

- Kiểm tra : $a=1, b=3, c=1, d=1, e=-3, \alpha=0, \beta=-6$

Đặt : $y-3=\sqrt{x+3} \Leftrightarrow y^2-6y+9=x+3 \Leftrightarrow x-3=y^2-6y+3$ (1)

Mặt khác : $y-3=x^2-6x+3$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ :

$\begin{cases} x-3=y^2-6y+3 \\ y-3=x^2-6x+3 \end{cases}$ Đến đây đã khá dễ dàng

<u>Ví dụ 34</u> : Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x-5}=8x^3-36x^2+53x-25$

<u>Lời giải :</u>

PT $\Leftrightarrow \sqrt[3]{3x-5}=(2x)^3-3.4x^2.3+3.9.2x-27-x+2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x-5}=(2x-3)^3-x+2$

- Kiểm tra : $a=3, b=-5, c=1, d=2, e=-3, \alpha=-1, \beta=2$ (thoả mãn) ☺

Đặt : $2y-3=\sqrt[3]{3x-5} \Leftrightarrow 8y^3-36y^2+54y-27=3x-5 \Leftrightarrow 8y^3-36y^2+53y-25=3x-y-3$ (1)

Mặt khác : $8x^3-36x^2+53x-25=2y-3$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ :

$\begin{cases} 8y^3-36y^2+53y-25=3x-y-3 \\ 8x^3-36x^2+53x-25=2y-3 \end{cases}$

Giải hệ trên đã thật đơn giản !!!!!!!!! ☺

Huế , ngày 15 tháng 4 năm 2007