

ĐỀ SỐ 01- A1K75**Câu 1: (6 điểm)**

- a) Giải phương trình: $\frac{\sqrt{3} \sin x - 2 \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \sin x - 1} = \cos x$
- b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = 3y + \sqrt{y^2 + 4} \\ x^2 - y^2 - 3x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$
- c) Giải phương trình: $\sqrt{(x+2)(2x-1)} + \sqrt{(x+6)(2x-1)} = 3(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6}) + 4$

Câu 2: (6 điểm)

a) Trong một hộp kín có 2016 quả cầu được đánh số thứ tự từ 1 đến 2016. Chọn ngẫu nhiên 3 quả cầu. Tính xác suất để 3 quả cầu được chọn có tổng các số được ghi trên các quả cầu chia hết cho 4.

b) Dãy số $\{u_n\}$, $n=1, 2, \dots$ được xác định như sau: $u_1 = \frac{2}{3}$;

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2(2n+1)u_n+1} . \text{ Tìm số hạng tổng quát } u_n \text{ và tính tổng } S = \sum_{i=1}^{2021} u_i$$

Câu 3: (4 điểm)

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên cạnh AB lấy điểm M khác A và B . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (ACD') .

- a) Trình bày cách dựng thiết diện của hình hộp và mặt phẳng (P) .
- b) Xác định vị trí của M để thiết diện nói trên có diện tích lớn nhất.

Câu 4: (2 điểm)

Cho tứ diện $ABCD$, gọi G là trọng tâm tam giác BCD , G' là trung điểm của AG . Một mặt phẳng (α) đi qua G' cắt các cạnh AB, AC, AD lần lượt tại B', C', D' . Tính

$$\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'}.$$

Câu 5: (2 điểm)

Cho $a, b, c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(b+c)^2} + \frac{c}{(c+a)}.$$

ĐÁP ÁN ĐỀ 01

Câu	Đáp án	Điểm
1	ĐK: $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$ Ta có: $(1) \Leftrightarrow (2\sin x + 1)(2\cos x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$ Đối chiếu ĐK, nghiệm của phương trình là: $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$	0,5 1,5 1
	b Từ pttrình thứ 2, ta có: $3y = y^2 + 3x - 1 - x^2$ thế vào phương trình thứ nhất ta có: $(x-1)^2 + \sqrt{(x-1)^2 + 4} = y^2 + \sqrt{y^2 + 4}$ $\Leftrightarrow ((x-1)^2 - y^2) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + 4} + \sqrt{y^2 + 4}} \right) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ y = 1 - x \end{cases}$ Với $y = x - 1$, ta có: $\begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 - y^2 - 3x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$	1 1

Với $y = 1 - x$, ta có:
$$\begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 - y^2 - 3x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

1

c) Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$

Cách 1:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x+2)(2x-1)} + \sqrt{(x+6)(2x-1)} = 3(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6}) + 4 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 13 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3(\sqrt{x+2} - 3) \\ \Leftrightarrow & \frac{2(x-7)(x+4)}{\sqrt{(x+2)(2x-1)} + 3\sqrt{x+6}} = \frac{-(x-7)(2x+25)}{13 + \sqrt{(x+6)(2x-1)}} + \frac{3(x-7)}{\sqrt{x+2} + 3} \\ \Leftrightarrow & (x-7) \left[\frac{2(x+4)}{\sqrt{(x+2)(2x-1)} + 3\sqrt{x+6}} + \frac{(2x+25)}{13 + \sqrt{(x+6)(2x-1)}} - \frac{3}{\sqrt{x+2} + 3} \right] = 0 \end{aligned}$$

Ta chứng minh:

$$\frac{2(x+4)}{\sqrt{(x+2)(2x-1)} + 3\sqrt{x+6}} + \frac{(2x+25)}{13 + \sqrt{(x+6)(2x-1)}} - \frac{3}{\sqrt{x+2} + 3} > 0$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)} \leq \frac{(x+2) + (2x-1)}{2} = \frac{3x+1}{2}$$

$$\sqrt{1 \cdot (x+6)} \leq \frac{x+6+1}{2} = \frac{x+7}{2}$$

Suy ra:

$$0 < \sqrt{(x+2)(2x-1)} + 3\sqrt{x+6} \leq \frac{3x+1}{2} + 3 \cdot \frac{x+7}{2} = 3x+11$$

$$\Rightarrow \frac{2(x+4)}{\sqrt{(x+2)(2x-1)} + 3\sqrt{x+6}} \geq \frac{2(x+4)}{3x+11} > \frac{2(x+4)}{3(x+4)} = \frac{2}{3}$$

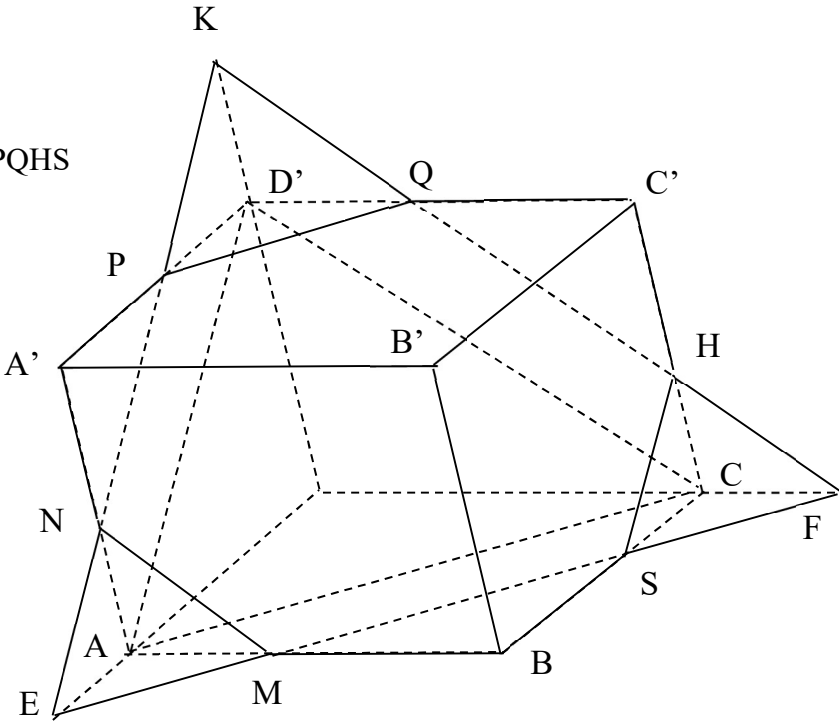
$$\text{Vì } x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x+2} + 3 \geq \sqrt{\frac{1}{2} + 2} + 3 > \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{3}{(\sqrt{x+2}+3)} < \frac{2}{3}$$

$$\text{Vì } x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{(2x+2)}{13 + \sqrt{(x+6)(2x-1)}} > 0$$

Do

đó

	$\frac{2(x+4)}{\sqrt{(x+2)(2x-1)} + 3\sqrt{x+6}} + \frac{(2x+25)}{13 + \sqrt{(x+6)(2x-1)}} - \frac{3}{\sqrt{x+2} + 3} > 0$ Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 7$ Cách 2: chứng minh $x=7$ là nghiệm duy nhất bằng cách đưa về pt tích.	
2	+ Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{2016}^3$ + Các số ghi trên quả cầu có 504 số chia hết 4; 504 số chia 4 dư 1; 504 số chia 4 dư 2; 504 số chia 4 dư 3. + Để chọn được 3 quả cầu có tổng các số được ghi chia hết 4 thì: TH1: Chọn 3 quả có số được ghi là số chia hết 4 có C_{504}^3 (Cách). TH2: 1 quả có số được ghi chia hết 4; một quả có ghi số chia 4 dư 1; một quả có số được ghi chia 4 dư 3 có $C_{504}^1 \cdot C_{504}^1 \cdot C_{504}^1$ (Cách) TH3: 2 quả có số được ghi chia 4 dư 1; một quả có số được ghi chia 4 dư 2 có $C_{504}^1 \cdot C_{504}^2$ (Cách). TH4: 2 quả có số được ghi chia 4 dư 2; một quả có số được ghi chia hết 4 có $C_{504}^1 \cdot C_{504}^2$ (Cách). TH5: 2 quả có số được ghi chia 4 dư 3; một quả có số được ghi chia 4 dư 2 có $C_{504}^1 \cdot C_{504}^2$ (Cách). $\Rightarrow n(A) = C_{504}^3 + C_{504}^1 \cdot C_{504}^1 \cdot C_{504}^1 + 3 \cdot C_{504}^1 \cdot C_{504}^2$ + Xác suất để 3 quả cầu được chọn có tổng các số được ghi chia hết 4 là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \dots$	0,5 1,5 1
	b Nhận xét: $u_n \neq 0 \quad \forall n = 1; 2; 3 \dots$ Ta có: $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + 4n + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} - 2(n+1)^2 = \frac{1}{u_n} - 2n^2 \quad \forall n = 1; 2; 3 \dots$ Đặt $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 2(n+1)^2$ ta có:	0,5 0,5 1

	$\begin{cases} v_1 = -\frac{1}{2} \\ v_{n+1} = v_n \end{cases} \Leftrightarrow v_n = -\frac{1}{2} \quad \forall n = 1; 2; 3 \dots \Rightarrow \frac{1}{u_n} = 2n^2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = \frac{2}{4n^2 - 1} \quad \forall n$ Ta có: $S = \sum_{i=1}^{2021} u_i = \sum_{i=1}^{2021} \frac{2}{4i^2 - 1} = \sum_{i=1}^{2021} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1} \right) = \frac{4042}{4043}$	1
3	a Thiết diện là lục giác MNPQHS 	1
	b Đặt $MA = x$; $AB = a$; $(0 < x < a)$. Ta có: $\frac{S_{\Delta EKF}}{S_{\Delta ACD'}} = \left(\frac{EF}{AC} \right)^2 = \left(1 + \frac{EM}{AC} \right)^2 = \left(2 - \frac{MS}{AC} \right)^2 = \left(2 - \frac{MB}{AB} \right)^2 = \left(\frac{a+x}{a} \right)^2$ $\frac{S_{\Delta ENM}}{S_{\Delta ACD'}} = \left(\frac{NM}{D'C} \right)^2 = \left(\frac{NM}{A'B} \right)^2 = \left(\frac{AM}{AB} \right)^2 = \left(\frac{x}{a} \right)^2 = \frac{S_{\Delta SFH}}{S_{\Delta ACD'}} = \frac{S_{\Delta PQK}}{S_{\Delta ACD'}}$ Diện tích thiết diện MNPQHS là: $S_{MNPQHS} = S_{\Delta ACD'} \left(\left(\frac{a+x}{a} \right)^2 - 3 \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right) = S_{\Delta ACD'} \cdot \frac{a^2 + 2x - 2x^2}{a^2} \leq \frac{3}{2} S_{\Delta ACD'}$	1 1 0,5

[illegible]

	Từ (1),(2) và (3) suy ra $\frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} + \frac{AB}{AB'} = 2 \left(\frac{AM}{AM'} + \frac{AN}{AN'} \right) - 2 = 2.4 - 2 = 6.$ Cách 2: Dùng điều kiện đồng phẳng của 4 điểm: B', C', D', G'	
5	Ta có: $P = \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2}{(b+c)^2} + \frac{c}{(c+a)} = \frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{c}{b}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{a}{c}\right)}.$ Đặt $x = \frac{b}{a}; y = \frac{c}{b}; z = \frac{a}{c} \Rightarrow x, y, z > 0; xyz = 1$ Ta có: $P = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+z}$ $\Leftrightarrow P \geq \frac{z}{1+z} + \frac{1}{1+z} = 1$ Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $P = 1$ khi $x = y = z = 1 \Leftrightarrow a = b = c > 0$	0,5 0,5 0,5 0,5