



Chương

Bài 5.

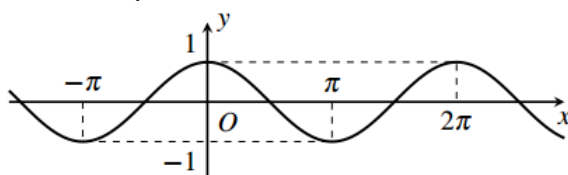
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC



Luyện tập

A. Câu hỏi - Trả lời trắc nghiệm

» Câu 1. Cho hàm số $y = \cos x$ có đồ thị như hình vẽ.



Nghiệm của phương trình $\cos x = -1$ trong khoảng $(0; 2p)$ là:

A. $x = 0$.

B. $x = p$.

C. $x = 2p$.

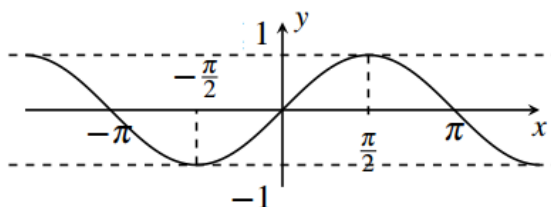
D. $x = \frac{p}{2}$.

👉 Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta dễ thấy phương trình $\cos x = -1$ có một nghiệm trong khoảng $(0; 2p)$ là $x = p$.

» Câu 2. Cho hàm số $y = \sin x$ có đồ thị như hình vẽ.



Nghiệm của phương trình $\sin x = 1$ trong khoảng $(0; p)$ là:

A. $x = 0$.

B. $x = p$.

C. $x = -\frac{p}{2}$.

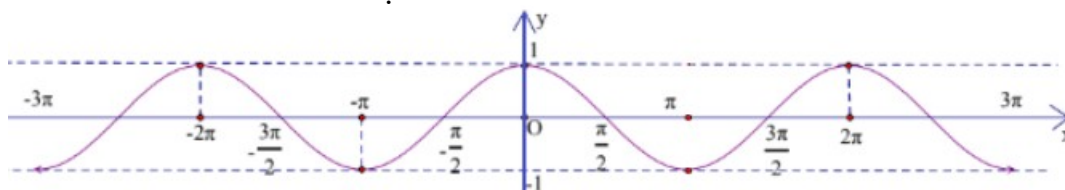
D. $x = \frac{p}{2}$.

👉 Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta dễ thấy phương trình $\sin x = 1$ có một nghiệm trong khoảng $(0; p)$ là $x = \frac{p}{2}$.

» Câu 3. Cho hàm số $y = \cos x$ có đồ thị như hình vẽ.



Tập nghiệm của phương trình $\cos x = 1$ là?



A. $x = kp (k \in \mathbb{Z})$

B. $x = p + k2p (k \in \mathbb{Z})$

C. $x = k2p (k \in \mathbb{Z})$

D. $x = \frac{p}{2} + k2p (k \in \mathbb{Z})$

👉 **Lời giải**

Chọn C

Ta thấy đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị $y=\cos x$ tại các điểm có hoành độ $x=k2p (k \in \mathbb{Z})$

Nên tập nghiệm của phương trình $\cos x = 1$ là $x = k2p (k \in \mathbb{Z})$.

» Câu 4. Phương trình $\cos x = 0$ có nghiệm là:

A. $x = \frac{p}{2} + kp (k \in \mathbb{Z})$

B. $x = k2p (k \in \mathbb{Z})$

C. $x = \frac{p}{2} + k2p (k \in \mathbb{Z})$

D. $x = kp (k \in \mathbb{Z})$

👉 **Lời giải**

Chọn A

Theo công thức nghiệm đặc biệt thì $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{p}{2} + kp (k \in \mathbb{Z})$.

» Câu 5. Phương trình $2 \cdot \sin x - 1 = 0$ có tập nghiệm là

A. $S = \left\{ \frac{p}{6} + k2p; \frac{5p}{6} + k2p, k \in \mathbb{Z} \right\}$

B. $S = \left\{ \frac{p}{3} + k2p; -\frac{2p}{3} + k2p, k \in \mathbb{Z} \right\}$

C. $S = \left\{ \frac{p}{6} + k2p; -\frac{p}{6} + k2p, k \in \mathbb{Z} \right\}$

D. $S = \left\{ \frac{1}{6} + k2p, k \in \mathbb{Z} \right\}$

👉 **Lời giải**

Chọn A

$$2 \cdot \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{p}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{6} + k2p \\ x = \frac{5p}{6} + k2p \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có:

» Câu 6. Phương trình $\cos x = \cos \frac{p}{3}$ có tất cả các nghiệm là:

A. $x = \frac{2p}{3} + k2p (k \in \mathbb{Z})$

B. $x = \pm \frac{p}{3} + kp (k \in \mathbb{Z})$

C. $x = \pm \frac{p}{3} + k2p (k \in \mathbb{Z})$

D. $x = \frac{p}{3} + k2p (k \in \mathbb{Z})$

👉 **Lời giải**

Chọn C

Phương trình $\cos x = \cos \frac{p}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{p}{3} + k2p (k \in \mathbb{Z})$

» Câu 7. Tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x = \sin \frac{p}{3}$ là



A.
$$\begin{cases} x = \frac{p}{3} + k2p \\ x = -\frac{p}{3} + k2p \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

B.
$$\begin{cases} x = \frac{p}{3} + k2p \\ x = \frac{2p}{3} + k2p \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

C. $x = \frac{p}{3} + kp (k \in \mathbb{Z})$

D.
$$\begin{cases} x = \frac{p}{3} + kp \\ x = \frac{2p}{3} + kp \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

👉 **Lời giải**

Chọn B

Áp dụng công thức: $\sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + k2p \\ x = p - a + k2p \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

» Câu 8. Nghiệm của phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ là

A. $x = \pm \frac{p}{2} + k2p$

B. $x = \pm \frac{p}{3} + k2p$

C. $x = \pm \frac{p}{4} + k2p$

D. $x = \pm \frac{p}{6} + k2p$

👉 **Lời giải**

Chọn B

$\cos x = \cos \frac{p}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{3} + k2p \\ x = -\frac{p}{3} + k2p \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

Ta có

» Câu 9. Phương trình $\cos 2px = \frac{2025}{2024}$ có bao nhiêu nghiệm trong $(-p; p)$

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 5.

👉 **Lời giải**

Chọn B

Ta có $\frac{2025}{2024} > 1$ nên phương trình $\cos 2px = \frac{2025}{2024}$ vô nghiệm.

» Câu 10. Nghiệm của phương trình $2 \cos(x - 15^\circ) - 1 = 0$ là

A. $\begin{cases} x = 75^\circ + k360^\circ \\ x = 135^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

B. $\begin{cases} x = 60^\circ + k360^\circ \\ x = -60^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

C. $\begin{cases} x = 45^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

D. $\begin{cases} x = 75^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

👉 **Lời giải**

Chọn D

$2 \cos(x - 15^\circ) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x - 15^\circ) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x - 15^\circ) = \cos 60^\circ$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 15^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ x - 15^\circ = -60^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 75^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$



» Câu 11. Giải phương trình $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A. $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + k2p \ (k \in \mathbb{Z})$

B. $x = \pm \frac{p}{6} + kp \ (k \in \mathbb{Z})$

C. $x = \pm \frac{p}{6} + k2p \ (k \in \mathbb{Z})$

D. $x = \pm \frac{p}{3} + k2p \ (k \in \mathbb{Z})$

👉 **Lời giải**

Chọn C

Ta có: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{p}{6} \Leftrightarrow x = \pm \frac{p}{6} + k2p \ (k \in \mathbb{Z})$

» Câu 12. Nghiệm của phương trình $\cos x = \cos \frac{p}{12}$ là

A. $\begin{cases} x = \frac{p}{12} + k2p \\ x = \frac{11p}{12} + l2p \end{cases} \ (k, l \in \mathbb{Z})$

B. $\begin{cases} x = \frac{p}{12} + k2p \\ x = -\frac{p}{12} + l2p \end{cases} \ (k, l \in \mathbb{Z})$

C. $x = \frac{p}{12} + k2p \ (k \in \mathbb{Z})$

D. $x = \frac{11p}{12} + k2p \ (k \in \mathbb{Z})$

👉 **Lời giải**

$$\cos x = \cos \frac{p}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{12} + k2p \\ x = -\frac{p}{12} + l2p \end{cases} \ (k, l \in \mathbb{Z})$$

Ta có

» Câu 13. Phương trình $\sin \left(2x - \frac{p}{3} \right) = 0$ có nghiệm là

A. $x = kp, k \in \mathbb{Z}$

B. $x = \frac{p}{6} + \frac{kp}{2}, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = \frac{p}{2} + kp, k \in \mathbb{Z}$

D. $x = \frac{p}{3} + kp, k \in \mathbb{Z}$

👉 **Lời giải**

Ta có $\sin \left(2x - \frac{p}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{p}{3} = kp, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{p}{6} + \frac{kp}{2}, k \in \mathbb{Z}$

» Câu 14. Giải phương trình $\cos x = 1$.

A. $x = \frac{kp}{2}, k \in \mathbb{Z}$

B. $x = kp, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = \frac{p}{2} + k2p, k \in \mathbb{Z}$

D. $x = k2p, k \in \mathbb{Z}$

👉 **Lời giải**

Chọn D

Ta có $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2p, k \in \mathbb{Z}$

» Câu 15. Phương trình $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$ có tập nghiệm là:

A. $\left\{ \pm \frac{p}{6} + k2p, k \in \mathbb{Z} \right\}$

B. $\left\{ \pm \frac{p}{3} + k2p, k \in \mathbb{Z} \right\}$



C. $\left\{ \frac{p}{6} + k2p, \frac{5p}{6} + k2p, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $\left\{ \frac{p}{3} + k2p, \frac{2p}{3} + k2p, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

👉 **Lời giải**

Chọn D

$$2 \sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{3} + k2p \\ x = \frac{2p}{3} + k2p \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$S = \left\{ \frac{p}{3} + k2p, \frac{2p}{3} + k2p, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là:

» **Câu 16.** Tổng các nghiệm của phương trình $2 \sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3}$ trên khoảng $(-180^\circ; 180^\circ)$ là
A. 20° . **B.** 100° . **C.** 80° . **D.** 120° .

👉 **Lời giải**

Chọn B

Ta có: $2 \sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin(x + 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 40^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ x + 40^\circ = 120^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20^\circ + k360^\circ \\ x = 80^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

Theo đề bài:

$$-180^\circ < 20^\circ + k360^\circ < 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{5}{9} < k < \frac{4}{9} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = 20^\circ$$

$$-180^\circ < 80^\circ + k360^\circ < 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{13}{18} < k < \frac{5}{18} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = 80^\circ$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $20^\circ + 80^\circ = 100^\circ$.

» **Câu 17.** Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\cos\left(5x - \frac{p}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{p}{3}\right)$ trên $[0; p]$.
A. $\frac{47p}{18}$. **B.** $\frac{4p}{18}$. **C.** $\frac{45p}{18}$. **D.** $\frac{7p}{18}$.

👉 **Lời giải**

Chọn A

Ta có:

$$\cos\left(5x - \frac{p}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{p}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - \frac{p}{6} = 2x - \frac{p}{3} + k2p \\ 5x - \frac{p}{6} = -2x + \frac{p}{3} + k2p \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{p}{18} + \frac{k2p}{3} \\ x = \frac{p}{14} + \frac{k2p}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vì $x \in [0; p]$ nên ta có:

+) Với $x = -\frac{p}{18} + \frac{k2p}{3} \Rightarrow 0 \leq -\frac{p}{18} + \frac{k2p}{3} \leq p \Leftrightarrow \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{19}{12}$, do $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1$ nên $x = \frac{11p}{18}$.



+) Với $x = \frac{p}{14} + \frac{k2p}{7} \Rightarrow 0 \leq \frac{p}{14} + \frac{k2p}{7} \leq p \Leftrightarrow \frac{-1}{4} \leq k \leq \frac{13}{4}$, do $k \in \mathbf{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3\}$ nên
 $x \in \left\{ \frac{p}{14}; \frac{5p}{14}; \frac{9p}{14}; \frac{13p}{14} \right\}$.

Tổng tất cả các nghiệm là: $\frac{11p}{18} + \frac{p}{14} + \frac{5p}{14} + \frac{9p}{14} + \frac{13p}{14} = \frac{47p}{18}$.

- » Câu 18. Số nghiệm phương trình $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ thuộc đoạn $[2p; 4p]$ là
A. 7. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.
 📖 **Lời giải**

Chọn B

Điều kiện: $\cos x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq p + k2p$.

Ta có $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0 \Rightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{kp}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

So với điều kiện nghiệm của phương trình là $x = \frac{kp}{3}$ với $k \in \mathbb{Z}, k \neq 3(2l+1)$

Vì $2p \leq x \leq 4p \Leftrightarrow 2p \leq \frac{kp}{3} \leq 4p \Leftrightarrow 6 \leq k \leq 12$ nên ta chọn $k \in \{6, 7, 8, 10, 11, 12\}$.

- » Câu 19. Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y = \sin 3x$ và $y = \sin x$ bằng nhau?

A. $\begin{cases} x = k2p \\ x = \frac{p}{4} + k2p \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

B. $x = k\frac{p}{4} (k \in \mathbb{Z})$

C. $x = k\frac{p}{2} (k \in \mathbb{Z})$

D. $\begin{cases} x = kp \\ x = \frac{p}{4} + k\frac{p}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

📖 **Lời giải**

Chọn D

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$\sin 3x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + k2p \\ 3x = p - x + k2p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = kp \\ x = \frac{p}{4} + k\frac{p}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

- » Câu 20. Số nghiệm của phương trình $\sin x = 0$ trên đoạn $[0; p]$ là
A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 5.
 📖 **Lời giải**

Chọn B

Ta có $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = kp, k \in \mathbb{Z}$.

$x \in [0; p] \Leftrightarrow 0 \leq kp \leq p \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 1$ mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 0; k = 1$. Suy ra $x = 0; x = p$.

Vậy phương trình $\sin x = 0$ có 2 nghiệm trên đoạn $[0; p]$.

- » Câu 21. Nghiệm của phương trình $\sin\left(\frac{p}{3} - x\right) + 1 = 0$ là



A. $x = \frac{7p}{6} + k2p, k \in \mathbb{Z}.$

B. $x = \frac{5p}{6} + kp, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = -\frac{7p}{6} + kp, k \in \mathbb{Z}.$

D. $x = \frac{5p}{6} + k2p, k \in \mathbb{Z}.$

👉 **Lời giải**

Chọn D

$$\sin\left(\frac{p}{3} - x\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{p}{3} - x\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{p}{3} - x = -\frac{p}{2} + k2p \Leftrightarrow x = \frac{5p}{6} - k2p, k \in \mathbb{Z}.$$

Với $k \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{5p}{6} + k2p$ cũng là nghiệm của phương trình.

» Câu 22. Tập nghiệm của phương trình

$$\cos 3x + \sin \frac{2p}{3} = 0 \quad \text{là}$$

A. $\left\{ \pm \frac{5p}{16} + \frac{k2p}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $\left\{ \pm \frac{2p}{9} + \frac{k2p}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $\left\{ \pm \frac{5p}{9} + \frac{k2p}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $\left\{ \pm \frac{5p}{12} + \frac{k2p}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

👉 **Lời giải**

Chọn A

Phương trình $\cos 3x + \sin \frac{2p}{3} = 0, (1)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$(1) \Leftrightarrow \cos 3x = -\sin \frac{2p}{3} \Leftrightarrow \cos 3x = \cos \frac{5p}{6}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pm \frac{5p}{6} + k2p, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{5p}{18} + \frac{k2p}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

» Câu 23. Trong các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm?

A. $\cos x = 3.$

B. $\sin 2x = -2.$

C. $\cos\left(2x - \frac{p}{3}\right) = -1.$

D. $\cos(2x - 1) = \frac{\sqrt{7}}{2}.$

👉 **Lời giải**

Chọn C

Phương trình lượng giác cơ bản dạng $\sin u = a$, $\cos u = a$ có nghiệm khi và chỉ khi $|a| \leq 1$

» Câu 24. Phương trình nào sau đây có nghiệm?

A. $\sin 2021x - 2 = 0.$

B. $\cos(2x + 2021) = 3.$

C. $\sin^2 x + 1 = 0.$

D. $\cos(2x + 2021) = -1.$

👉 **Lời giải**

Chọn D

Phương trình $\sin x = a$ và $\cos x = a$ có nghiệm khi và chỉ khi $|a| \leq 1$.

Đối chiếu các đáp án ta thấy chỉ có đáp án D là phương trình có nghiệm.



» Câu 25. Phương trình $2\sin x + \sqrt{3} = 0$ có tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất bằng

- A. $\frac{4p}{3}$. B. $2p$. C. $\frac{p}{3}$. D. p .

👉 **Lời giải**

Chọn D

$$2\sin x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{p}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{p}{3} + k2p \\ x = \frac{4p}{3} + k2p \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

* Ta có:

* Xét $x = -\frac{p}{3} + k2p$, $k \in \mathbb{Z}$ ta được nghiệm dương nhỏ nhất là $x_1 = \frac{5p}{3}$ và nghiệm âm lớn nhất là $x_2 = -\frac{p}{3}$.

* Xét $x = \frac{4p}{3} + k2p$, $k \in \mathbb{Z}$ ta được nghiệm dương nhỏ nhất là $x_3 = \frac{4p}{3}$ và nghiệm âm lớn nhất là $x_4 = -\frac{2p}{3}$.

* So sánh x_1 và x_3 ta suy ra nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình đã cho là $x_3 = \frac{4p}{3}$.

So sánh x_2 và x_4 ta suy ra nghiệm âm lớn nhất của phương trình đã cho là $x_2 = -\frac{p}{3}$.

* Ta có $x_2 + x_3 = -\frac{p}{3} + \frac{4p}{3} = p$.

» Câu 26. Nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{p}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{p}{4}\right)$ là

- A. $\begin{cases} x = \frac{p}{12} + 2kp \\ x = -\frac{7p}{12} + 2kp \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -\frac{p}{12} + kp \\ x = -\frac{7p}{12} + kp \end{cases}$.
- C. $\begin{cases} x = -\frac{p}{12} + 2kp \\ x = \frac{7p}{12} + 2kp \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -\frac{p}{12} + kp \\ x = \frac{7p}{12} + kp \end{cases}$.

👉 **Lời giải**

Chọn C

Biến đổi và giải phương trình như sau:

$$\sin\left(x + \frac{p}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{p}{4}\right)$$



$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{p}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{p}{4}\right) = \sin \frac{p}{6} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{p}{4} = \frac{p}{6} + 2kp \\ x + \frac{p}{4} = p - \frac{p}{6} + 2kp \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{p}{12} + 2kp \\ x = \frac{7p}{12} + 2kp \end{cases} \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

» Câu 27. Tập nghiệm của phương trình $\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$ là?

A. $x = -\frac{3p}{2} + 2kp, k \in \mathbb{Z}$

B. $x = \frac{3p}{2} + 2kp, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = \frac{p}{2} + 2kp, k \in \mathbb{Z}$

D. $x = -\frac{3p}{2} + kp, k \in \mathbb{Z}$

» Lời giải

Chọn B

Ta có: $\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sin x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} + 2kp$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Hay $x = \frac{3p}{2} + 2kp, k \in \mathbb{Z}$.

» Câu 28. Cho phương trình $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Số nghiệm của phương trình trên đoạn $\left[-\frac{p}{2}; p\right]$ là?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

» Lời giải

Chọn A

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{p}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{4} + 2kp \\ x = \frac{3p}{4} + 2kp \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Ta có:

Để tìm được số nghiệm của phương trình, ta có thể sử dụng phương pháp đại số hoặc phương pháp sử dụng vòng tròn lượng giác như sau:

PP1: Phương pháp đại số. (tham số $k \in \mathbb{Z}$)

Với nghiệm $x = \frac{p}{4} + 2kp \in \left[-\frac{p}{2}; p\right] \Rightarrow -\frac{p}{2} \leq \frac{p}{4} + 2kp \leq p \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq k \leq \frac{3}{8}$

$\Rightarrow k=0$ tương ứng $x = \frac{p}{4}$ là nghiệm duy nhất thuộc đoạn $\left[-\frac{p}{2}; p\right]$.

Với nghiệm $x = \frac{3p}{4} + 2kp \in \left[-\frac{p}{2}; p\right] \Rightarrow -\frac{p}{2} \leq \frac{3p}{4} + 2kp \leq p \Leftrightarrow -\frac{5}{8} \leq k \leq \frac{1}{8}$

$\Rightarrow k=0$ tương ứng $x = \frac{3p}{4}$ là nghiệm duy nhất thuộc đoạn $\left[-\frac{p}{2}; p\right]$.

Vậy phương trình $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ có hai nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{p}{2}; p\right]$.

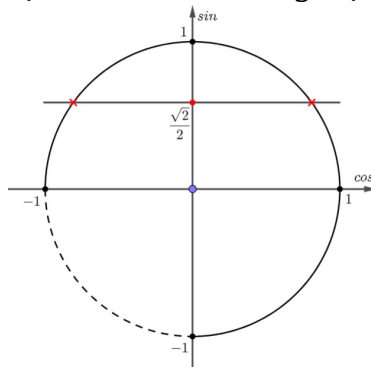
PP2: Sử dụng vòng tròn lượng giác.



$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Trên trục $\sin$, ta xác định $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Từ vị trí đó, kẻ đường thẳng vuông góc với trục $\sin$.

Khi đó, hai giao điểm được tạo thành là hai nghiệm cơ bản của phương trình.



Quan sát thấy rằng, trong đoạn từ $\left[-\frac{p}{2}; p\right]$ chỉ có hai giao điểm tương ứng với hai nghiệm.

» Câu 29. Phương trình $3\cos^2 x + 7\cos x - 10 = 0$ có nghiệm là?

- A. $x = \frac{kp}{2}, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = p + 2kp, k \in \mathbb{Z}$. C. $x = kp, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = 2kp, k \in \mathbb{Z}$.

👉 **Lời giải**

Chọn D

$$3\cos^2 x + 7\cos x - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{10}{3} \end{cases}$$

Ta có:

Với $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2kp$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Với $\cos x = -\frac{10}{3} \rightarrow$ Loại vì tập giá trị của $\cos x$ là $[-1; 1]$.

» Câu 30. Phương trình $\cos(2x + 30^\circ) + \sin x = 0$ có nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = 60^\circ + k180^\circ \\ x = 40^\circ + k120^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. B. $\begin{cases} x = 60^\circ + k360^\circ \\ x = -40^\circ + k120^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.
- C. $\begin{cases} x = 30^\circ + k360^\circ \\ x = 15^\circ + k180^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. D. $\begin{cases} x = \frac{p}{3} + \frac{k2p}{3} \\ x = k2p \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

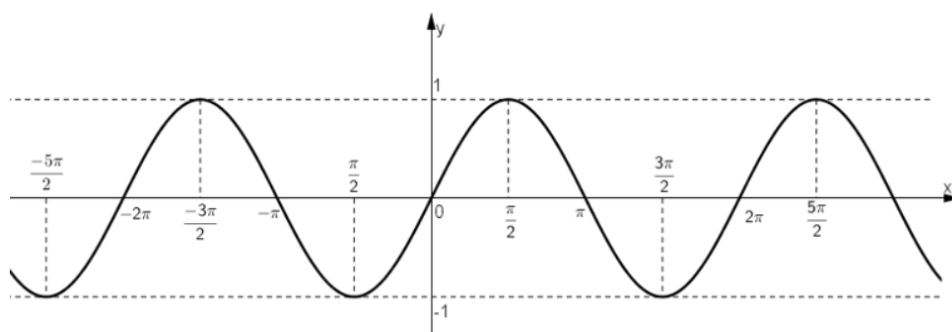
👉 **Lời giải**

Chọn B

$$\cos(2x + 30^\circ) + \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos(2x + 30^\circ) = -\sin x \Leftrightarrow \cos(2x + 30^\circ) = \sin(-x)$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x + 30^\circ) = \cos(x + 90^\circ) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60^\circ + k360^\circ \\ x = -40^\circ + k120^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

» Câu 31. Cho hàm số $y = \sin x$ có đồ thị như hình vẽ.



Hãy tìm tập tất cả các giá trị của m để phương trình $|\sin x| = m$ có nghiệm?
A. $-1 \leq m \leq 1$. **B.** $-1 \leq m \leq 0$. **C.** $-1 < m < 0$. **D.** $0 \leq m \leq 1$.

Lời giải

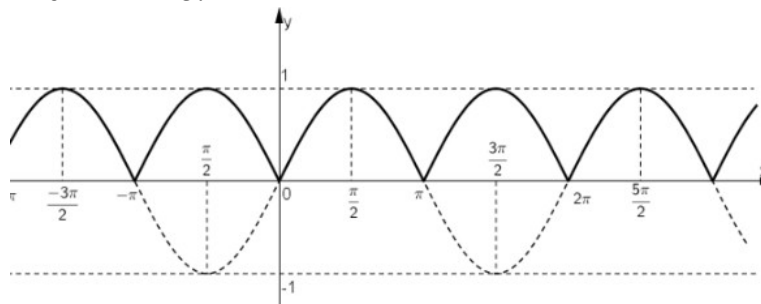
Chọn D

Đồ thị hàm số $y = |\sin x|$ được suy ra từ đồ thị $y = \sin x$ bằng:

+ Giữ nguyên phần đồ thị bên trên trục Ox .

+ Lấy đối xứng phần bên dưới qua trục Ox .

Ta được đồ thị như hình vẽ.



Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $|\sin x| = m$ có nghiệm khi $0 \leq m \leq 1$.

» Câu 32. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình

$$\sin x \cdot \sin \frac{p}{3} + \cos 2x \cdot \sin \frac{p}{4} = \cos x \cdot \cos \frac{p}{3} + \sin 2x \cdot \cos \frac{p}{4}$$

A.
$$\begin{cases} x = \frac{p}{12} + k2p \\ x = -\frac{7p}{36} + k\frac{2p}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

B.
$$\begin{cases} x = -\frac{7p}{12} + k2p \\ x = \frac{p}{36} + k\frac{2p}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

C.
$$\begin{cases} x = \frac{5p}{12} + k2p \\ x = -\frac{p}{6} + k\frac{2p}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

D.
$$\begin{cases} x = \frac{7p}{12} + kp \\ x = -\frac{p}{36} + k2p \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Lời giải

Chọn A

♦ Phương trình:
$$\sin x \cdot \sin \frac{p}{3} + \cos 2x \cdot \sin \frac{p}{4} = \cos x \cdot \cos \frac{p}{3} + \sin 2x \cdot \cos \frac{p}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x \cdot \sin \frac{p}{4} - \sin 2x \cdot \cos \frac{p}{4} = \cos x \cdot \cos \frac{p}{3} - \sin x \cdot \sin \frac{p}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(\frac{p}{4} - 2x \right) = \cos \left(x + \frac{p}{3} \right)$$



$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{p}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{p}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{p}{4} = x + \frac{p}{3} + k2p \\ 2x + \frac{p}{4} = -x - \frac{p}{3} + k2p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{12} + k2p \\ 3x = -\frac{7p}{12} + k2p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{12} + k2p \\ x = -\frac{7p}{36} + k\frac{2p}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{p}{12} + k2p$, $x = -\frac{7p}{36} + k\frac{2p}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

- » Câu 33. Phương trình $\sin 5x - \sin x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018p; 2018p]$?
A. 20179. **B.** 20181. **C.** 16144. **D.** 16145.

👉 **Lời giải**

Chọn B

$$\text{Ta có } \sin 5x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $x \in [-2018\pi; 2018\pi]$ nên

+ Với $x = \frac{k\pi}{2}$ ta có $-2018\pi \leq \frac{k\pi}{2} \leq 2018\pi \Leftrightarrow -4036 \leq k \leq 4036$. Suy ra có 8073 nghiệm.
 + Với $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ ta có $-2018\pi \leq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \leq 2018\pi \Leftrightarrow -\frac{12109}{2} \leq k \leq \frac{12107}{2}$. Suy ra có 12108 nghiệm.

Vậy có $8073 + 12108 = 20181$ nghiệm thuộc đoạn $[-2018p; 2018p]$.

- » Câu 34. Nghiệm của phương trình $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$ là

A. $\begin{cases} x = \frac{p}{4} + kp \\ x = \frac{p}{12} + k\frac{p}{7} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

B. $\begin{cases} x = \frac{p}{3} + kp \\ x = \frac{p}{6} + k\frac{p}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

C. $\begin{cases} x = \frac{p}{5} + kp \\ x = \frac{p}{7} + k\frac{p}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

D. $\begin{cases} x = \frac{p}{8} + kp \\ x = \frac{p}{9} + k\frac{p}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

👉 **Lời giải**

Chọn A

Ta có $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x) \Leftrightarrow \sin 8x - \sqrt{3} \cos 8x = \sqrt{3} \sin 6x + \cos 6x$



$$\Leftrightarrow \sin\left(8x - \frac{p}{3}\right) = \sin\left(6x + \frac{p}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - \frac{p}{3} = 6x + \frac{p}{6} + k2p \\ 8x - \frac{p}{3} = \frac{5p}{6} - 6x + k2p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{4} + kp \\ x = \frac{p}{12} + \frac{kp}{7} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

- » **Câu 35.** Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \sin\left[\frac{p}{180}(t - 80)\right] + 12$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

A. 170.

B. 171.

C. 172.

D. 173.

👉 **Lời giải**

Chọn A

$$d(t) = 3 \sin\left[\frac{p}{180}(t - 80)\right] + 12 \leq 3 \cdot 1 + 12 = 15$$

Ta có

Vậy thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất khi

$$\sin\left[\frac{p}{180}(t - 80)\right] = 1 \Leftrightarrow \frac{p}{180}(t - 80) = \frac{p}{2} + k2p \Leftrightarrow t = 170 + 360k (k \in \mathbb{Z})$$

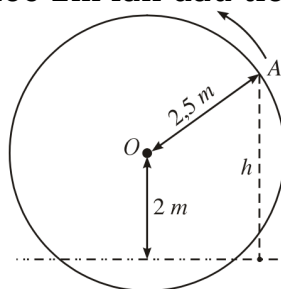
$$\text{Vì } 0 < t \leq 365 \text{ nên } 0 < 170 + 360k \leq 365 \Leftrightarrow -\frac{17}{36} < k \leq \frac{39}{72} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow t = 170$$

Vậy vào ngày thứ 170 trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất.

- » **Câu 36.** Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5m; trục của nó đặt cách mặt nước 2m (hình vẽ). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) từ một chiếc gầu gắn tại điểm A của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h = |y|$

$$y = 2 + 2,5 \sin\left[2p\left(x - \frac{1}{4}\right)\right]$$

trong đó x là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$), tính bằng phút (quy ước $y > 0$ khi gầu ở bên trên mặt nước và $y < 0$ khi gầu ở dưới nước). Chiếc gầu cách mặt nước 2m lần đầu tiên khi nào?



A. 4 phút.

B. $\frac{1}{4}$ phút.

C. 2 phút.

D. $\frac{1}{2}$ phút.

👉 **Lời giải**

Chọn B

Ta có $h = 2 \Leftrightarrow |y| = 2 \Leftrightarrow y = \pm 2$. Thấy khi gầu dưới mặt nước thì khoảng cách từ gầu đến mặt nước lớn nhất là 0,5m.



$$\Rightarrow y=2 \Leftrightarrow 2+2,5 \sin \left[2p \left(x - \frac{1}{4} \right) \right] = 2 \Leftrightarrow \sin \left[2p \left(x - \frac{1}{4} \right) \right] = 0 \Leftrightarrow 2p \left(x - \frac{1}{4} \right) = kp \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}$$

Mà $x \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{k}{2} \geq 0 \Leftrightarrow k \geq -\frac{1}{2}$. Do $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Vậy thời điểm gấu cách

mặt nước 2m lần đầu tiên đạt được khi $k=0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ phút.

» **Câu 37.** Guồng nước (hay còn gọi là con nước) không chỉ là công cụ phục vụ sản xuất nông nghiệp, mà đã trở thành hình ảnh quen thuộc của bản làng và là một nét văn hóa đặc trưng của đồng bào dân tộc miền núi phía Bắc.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính $3,5m$; trục của nó đặt cách mặt nước $3m$. Khi guồng quay đều, khoảng cách $h(m)$ từ một ống đựng nước gắn tại một điểm của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h=|y|$,

trong đó $y = 3,5 \sin \left(2px - \frac{p}{2} \right) + 3$, với x (phút) là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$). Hãy chỉ ra giá trị của x nhỏ nhất để ống đựng nước cách mặt nước $3m$.

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. $\frac{1}{8}$.

D. $\frac{7}{8}$.

👉 **Lời giải**

Chọn A

Để ống đựng nước cách mặt nước $3m$, ta có phương trình:

$$\left| 3,5 \sin \left(2px - \frac{p}{2} \right) + 3 \right| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3,5 \sin \left(2px - \frac{p}{2} \right) + 3 = 3 \\ 3,5 \sin \left(2px - \frac{p}{2} \right) + 3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left(2px - \frac{p}{2} \right) = 0 \\ 3,5 \sin \left(2px - \frac{p}{2} \right) = -\frac{6}{3,5} < -1 \text{ (VN)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2px - \frac{p}{2} = kp \Leftrightarrow x = \frac{2k+1}{4}; k \in \mathbb{Z}$$

Vì $x \geq 0$ nên một số giá trị của x là: $\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}; \frac{7}{4}; \dots$

Vậy giá trị nhỏ nhất của x theo yêu cầu bài toán là $\frac{1}{4}$

B. Câu hỏi - Trả lời Đúng/sai

» **Câu 38.** Cho phương trình $\sin x = a$ (1).

	Mệnh đề	Đúng g	Sai
--	---------	-----------	-----



(a)	Nếu $a > 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.		
(b)	Nếu $a = 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $a = \frac{p}{2} + kp, (k \in \mathbb{Z})$.		
(c)	Nếu $-1 \leq a \leq 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $\begin{cases} x = a + k2p \\ x = p - a + k2p \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ với $a = \sin a$.		
(d)	Phương trình (1) có hai điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.		

Lời giải

(a) Nếu $a > 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Nếu $a = 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $a = \frac{p}{2} + kp, (k \in \mathbb{Z})$.

Nếu $a = 1 \Rightarrow \sin a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{p}{2} + k2p, (k \in \mathbb{Z})$.

» **Chọn SAI.**

(c) Nếu $-1 \leq a \leq 1$ thì phương trình (1) có nghiệm $\begin{cases} x = a + k2p \\ x = p - a + k2p \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ với $a = \sin a$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Phương trình (1) có hai điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 39.** Cho phương trình lượng giác $2 \sin x - \sqrt{2} = 0$. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình tương đương với phương trình $\sin x = \sin \frac{p}{4}$.		
(b)	Phương trình có nghiệm là $x = \frac{p}{4} + k2p; x = \frac{3p}{4} + k2p (k \in \mathbb{Z})$.		
(c)	Phương trình có nghiệm âm lớn nhất là $\frac{p}{4}$.		
(d)	Số nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(-\frac{p}{2}; \frac{p}{2}\right)$ là hai nghiệm.		

Lời giải

(a) Phương trình tương đương với phương trình $\sin x = \sin \frac{p}{4}$.

$2 \sin x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{p}{4}$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Phương trình có nghiệm là $x = \frac{p}{4} + k2p; x = \frac{3p}{4} + k2p (k \in \mathbb{Z})$.



$$2 \sin x - \sqrt{2} = 0$$

» **Chọn ĐÚNG.**

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{p}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{4} + k2p \\ x = \frac{3p}{4} + k2p \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(c) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất là $\frac{p}{4}$.
Do x là nghiệm âm lớn nhất nên

Trường hợp 1: $x = \frac{p}{4} + k2p < 0 \Leftrightarrow k < \frac{-1}{8} \Rightarrow k = -1 \Rightarrow x = \frac{-7p}{4}$

Trường hợp 2: $x = \frac{3p}{4} + k2p < 0 \Leftrightarrow k < \frac{-3}{8} \Rightarrow k = -1 \Rightarrow x = \frac{-5p}{4}$

Trong hai nghiệm $\frac{-7p}{4}$ và $\frac{-5p}{4}$ thì nghiệm âm lớn nhất là $\frac{-5p}{4}$.

Phương trình có nghiệm âm lớn nhất là $\frac{-5p}{4}$.

» **Chọn SAI.**

(d) Số nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(-\frac{p}{2}; \frac{p}{2}\right)$ là hai nghiệm.

$$x \in \left(-\frac{p}{2}; \frac{p}{2}\right)$$

+) $x = \frac{p}{4} + k2p$: Ta có $-\frac{p}{2} < \frac{p}{4} + k2p < \frac{p}{2} \Leftrightarrow \frac{-3}{8} < k < \frac{1}{8}$.

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 0$: $x = \frac{p}{4}$

+) $x = \frac{3p}{4} + k2p$: Ta có $-\frac{p}{2} < \frac{3p}{4} + k2p < \frac{p}{2} \Leftrightarrow \frac{-5}{8} < k < \frac{-1}{8}$.

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên không có giá trị nào của k thỏa mãn.

Vậy số nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(-\frac{p}{2}; \frac{p}{2}\right)$ là một nghiệm.

» **Chọn SAI.**

» **Câu 40.** Cho phương trình lượng giác $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ (*). Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình (*) tương đương $\sin 2x = \sin \frac{p}{6}$		
(b)	Trong khoảng $(0; p)$ phương trình có 3 nghiệm		
(c)	Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; p)$ bằng $\frac{3p}{2}$		



(d) Trong khoảng $(0; p)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{11p}{12}$

Lời giải

(a) Phương trình (*) tương đương $\sin 2x = \sin \frac{p}{6}$

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin \frac{-p}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{-p}{6} + k2p \\ 2x = \frac{7p}{6} + k2p \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-p}{12} + kp \\ x = \frac{7p}{12} + kp \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

» Chọn SAI.

(b) Trong khoảng $(0; p)$ phương trình có 3 nghiệm

$$0 < x < p \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{-p}{12} + kp < p \\ 0 < \frac{7p}{12} + kp < p \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11p}{12} \\ x = \frac{7p}{12} \end{cases}$$

» Chọn SAI.

(c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; p)$ bằng $\frac{3p}{2}$

Với $x = \frac{11p}{12}; x = \frac{7p}{12} \Rightarrow \frac{11p}{12} + \frac{7p}{12} = \frac{18p}{12} = \frac{3p}{2}$

» Chọn ĐÚNG.

(d) Trong khoảng $(0; p)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{11p}{12}$

Với $x = \frac{11p}{12}; x = \frac{7p}{12} \Rightarrow$ nghiệm $x = \frac{11p}{12}$ là nghiệm lớn nhất trong khoảng $(0; p)$

» Chọn ĐÚNG.

» Câu 41. Cho phương trình lượng giác $2 \cos x = \sqrt{3}$, khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình có nghiệm $x = \pm \frac{p}{3} + k2p (k \in \mathbb{Z})$		
(b)	Trong đoạn $\left[0; \frac{5p}{2}\right]$ phương trình có 4 nghiệm		
(c)	Tổng các nghiệm của phương trình trong đoạn $\left[0; \frac{5p}{2}\right]$ bằng $\frac{25p}{6}$		
(d)	Trong đoạn $\left[0; \frac{5p}{2}\right]$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng		



$$\frac{13p}{6}$$

🔍 **Lời giải**

(a) Phương trình có nghiệm $x = \pm \frac{p}{3} + k2p (k \in \mathbb{Z})$

Ta có: $2 \cos x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{p}{6} + k2p (k \in \mathbb{Z})$

» **Chọn SAI.**

(b) Trong đoạn $\left[0; \frac{5p}{2}\right]$ phương trình có 4 nghiệm

Vì $x \in \left[0; \frac{5p}{2}\right]$ nên $x \in \left\{\frac{p}{6}; \frac{11p}{6}; \frac{13p}{6}\right\}$.

» **Chọn SAI.**

(c) Tổng các nghiệm của phương trình trong đoạn $\left[0; \frac{5p}{2}\right]$ bằng $\frac{25p}{6}$

Với $x \in \left\{\frac{p}{6}; \frac{11p}{6}; \frac{13p}{6}\right\} \Rightarrow \frac{p}{6} + \frac{11p}{6} + \frac{13p}{6} = \frac{25p}{6}$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Trong đoạn $\left[0; \frac{5p}{2}\right]$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{13p}{6}$

Với $x \in \left\{\frac{p}{6}; \frac{11p}{6}; \frac{13p}{6}\right\} \Rightarrow$ nghiệm lớn nhất là $x = \frac{13p}{6}$

» **Chọn ĐÚNG.**

» Câu 42. Cho phương trình $\sin\left(2x - \frac{p}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3p}{4}\right)$ (*), vậy:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = p + k2p \\ x = \frac{p}{6} + k\frac{2p}{3} (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$		
(b)	Trong khoảng $(0; p)$ phương trình có 2 nghiệm		
(c)	Trong khoảng $(0; p)$ phương trình có 2 nghiệm âm		
(d)	Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; p)$ bằng $\frac{7p}{6}$		

🔍 **Lời giải**

(a) Phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = p + k2p \\ x = \frac{p}{6} + k\frac{2p}{3} (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$

» **Chọn ĐÚNG.**



$$\sin\left(2x - \frac{p}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3p}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{p}{4} = x + \frac{3p}{4} + k2p \\ 2x - \frac{p}{4} = \frac{p}{4} - x + k2p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = p + k2p \\ x = \frac{p}{6} + k\frac{2p}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Ta có:

(b) Trong khoảng $(0; p)$ phương trình có 2 nghiệm
» **Chọn ĐÚNG.**

$$\text{Vì } 0 < x < p \Leftrightarrow 0 < p + k2p < p \Leftrightarrow -p < k2p < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < 0$$

$$\text{Vì } 0 < x < p \Leftrightarrow 0 < \frac{p}{6} + k\frac{2p}{3} < p \Leftrightarrow -\frac{p}{6} < k\frac{2p}{3} < \frac{5p}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{5}{4}$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ nên } k \in \{0; 1\} \Rightarrow x \in \left\{\frac{p}{6}; \frac{5p}{6}\right\}$$

Do

(c) Trong khoảng $(0; p)$ phương trình có 2 nghiệm âm.
 $(0; p)$ phương trình không tồn tại nghiệm âm.

Trong khoảng
» **Chọn SAI.**

(d) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; p)$ bằng $\frac{7p}{6}$

$$\text{Với } x \in \left\{\frac{p}{6}; \frac{5p}{6}\right\} \Rightarrow \frac{p}{6} + \frac{5p}{6} = p$$

» **Chọn SAI.**

» Câu 43. Cho phương trình lượng giác $3 - \sqrt{3} \tan\left(2x - \frac{p}{3}\right) = 0$, khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình có nghiệm $x = \frac{p}{6} + \frac{kp}{2}, k \in \mathbb{Z}$.		
(b)	Khi $-\frac{p}{4} < x < \frac{2p}{3}$ thì phương trình có ba nghiệm		
(c)	Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{p}{3}$		
(d)	Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(\frac{-p}{4}; \frac{2p}{3}\right)$ bằng $\frac{p}{6}$		

» **Lời giải**

(a) Phương trình có nghiệm $x = \frac{p}{6} + \frac{kp}{2}, k \in \mathbb{Z}$.



$$\tan\left(2x - \frac{p}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{p}{3} + \frac{kp}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Phương trình tương đương với:

» **Chọn SAI.**

(b) Khi $\frac{-p}{4} < x < \frac{2p}{3}$ thì phương trình có ba nghiệm

$$\text{Vì } \frac{-p}{4} < x < \frac{2p}{3} \Leftrightarrow \frac{-p}{4} < \frac{p}{3} + \frac{kp}{2} < \frac{2p}{3} \Leftrightarrow \frac{-7p}{12} < \frac{kp}{2} < \frac{p}{3} \Leftrightarrow \frac{-7}{6} < k < \frac{2}{3}$$

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{-1; 0\}$.

» **Chọn SAI.**

(c) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{p}{3}$

Với $k = -1$ thì $x = -\frac{p}{6}$, với $k = 0$ thì $x = \frac{p}{3}$.

» **Chọn SAI.**

(d) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(\frac{-p}{4}; \frac{2p}{3}\right)$ bằng $\frac{p}{6}$

$$\text{Vậy } \frac{-p}{6} + \frac{p}{3} = \frac{p}{6}.$$

» **Chọn ĐÚNG.**

» Câu 44. Cho hai đồ thị hàm số $y = \sin\left(x + \frac{p}{4}\right)$ và $y = \sin x$, khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số: $\sin\left(x + \frac{p}{4}\right) = \sin x$		
(b)	Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x = \frac{3p}{8} + kp (k \in \mathbb{Z})$		
(c)	Khi $x \in [0; 2p]$ thì hai đồ thị hàm số cắt nhau tại ba điểm		
(d)	Khi $x \in [0; 2p]$ thì tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là: $\left(\frac{5p}{8}; \sin \frac{5p}{8}\right), \left(\frac{7p}{8}; \sin \frac{7p}{8}\right)$.		

» **Lời giải**

(a) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:
Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x = \frac{3p}{8} + kp (k \in \mathbb{Z})$



$$\sin\left(x + \frac{p}{4}\right) = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{p}{4} = x + k2p \\ x + \frac{p}{4} = p - x + k2p \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{3p}{8} + kp (k \in \mathbb{Z}).$$

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Khi $x \in [0; 2p]$ thì hai đồ thị hàm số cắt nhau tại ba điểm

$$x \in [0; 2p] \Rightarrow x \in \left\{ \frac{3p}{8}; \frac{11p}{8} \right\}.$$

Vì

» **Chọn SAI.**

(d) Khi $x \in [0; 2p]$ thì tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:

$$\left(\frac{5p}{8}; \sin \frac{5p}{8} \right), \left(\frac{7p}{8}; \sin \frac{7p}{8} \right).$$

$$\text{Với } x = \frac{3p}{8} \Rightarrow y = \sin \frac{3p}{8} \approx 0,92 \quad \text{với } x = \frac{11p}{8} \Rightarrow y = \sin \frac{11p}{8} \approx -0,92.$$

$$\text{Vậy tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là: } \left(\frac{3p}{8}; \sin \frac{3p}{8} \right), \left(\frac{11p}{8}; \sin \frac{11p}{8} \right).$$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 45.** Cho phương trình lượng giác $2 \sin\left(x - \frac{p}{12}\right) + \sqrt{3} = 0$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Phương trình tương đương $\sin\left(x - \frac{p}{12}\right) = \sin\left(\frac{p}{3}\right)$.		
(b)	Phương trình có nghiệm là: $x = \frac{p}{4} + k2p; x = \frac{7p}{12} + k2p (k \in \mathbb{Z})$.		
(c)	Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{p}{4}$.		
(d)	Số nghiệm của phương trình trong khoảng $(-p; p)$ là hai nghiệm.		

» **Lời giải**

(a) Phương trình tương đương $\sin\left(x - \frac{p}{12}\right) = \sin\left(\frac{p}{3}\right)$.

$$\text{Ta có } 2 \sin\left(x - \frac{p}{12}\right) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{p}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{p}{12}\right) = \sin\left(-\frac{p}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{p}{12} = -\frac{p}{3} + k2p \\ x - \frac{p}{12} = p - (-\frac{p}{3}) + k2p \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{p}{4} + k2p \\ x = \frac{17p}{12} + k2p \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

» **Chọn SAI.**



(b) Phương trình có nghiệm là: $x = \frac{p}{4} + k2p; x = \frac{7p}{12} + k2p (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy phương trình có nghiệm là:

» **Chọn SAI.**

(c) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{p}{4}$.

+ Với $x = -\frac{p}{4} + k2p$ có nghiệm âm lớn nhất là $x = -\frac{p}{4}$

+ Với $x = \frac{17p}{12} + k2p$ có nghiệm âm lớn nhất là $x = -\frac{7p}{12}$

Vậy phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{p}{4}$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Số nghiệm của phương trình trong khoảng $(-p; p)$ là hai nghiệm.

+ Với $x = -\frac{p}{4} + k2p$ có $-p < -\frac{p}{4} + k2p < p \Leftrightarrow -\frac{3}{8} < k < \frac{5}{8} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = -\frac{p}{4}$.

+ Với $x = \frac{17p}{12} + k2p$ có $-p < \frac{17p}{12} + k2p < p \Leftrightarrow -\frac{29}{24} < k < -\frac{5}{24} \Rightarrow k = -1 \Rightarrow x = -\frac{7p}{12}$.

Số nghiệm của phương trình trong khoảng $(-p; p)$ là hai nghiệm.

» **Chọn ĐÚNG.**

» Câu 46. Cho phương trình $(2 \cos x - 1)(\sin 2x - m) = 0$ (1).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$x = \frac{7p}{3}$ là một nghiệm của phương trình (1).		
(b)	$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{3} + k2p \\ x = -\frac{p}{3} + k2p \\ x = \frac{p}{2} + l2p \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z})$ Khi $m = 2$ thì phương trình		
(c)	Khi $m = 1$ thì tập nghiệm của phương trình (1) có tất cả 4 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.		
(d)	Chỉ tìm được một giá trị của m để phương trình (1) có đúng hai nghiệm thuộc $\left(-\frac{p}{4}; \frac{3p}{4}\right]$.		

» **Lời giải**



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} & (2) \\ \sin 2x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{3} + k2p \\ x = -\frac{p}{3} + k2p \\ \sin 2x = m \end{cases}$$

Ta có $(2\cos x - 1)(\sin 2x - m) = 0$

(a) $x = \frac{7p}{3}$ là một nghiệm của phương trình (1).

Thay $x = \frac{7p}{3}$ phương trình (1) ta thấy thỏa mãn nên $x = \frac{7p}{3}$ là một nghiệm của phương trình (1).

» **Chọn ĐÚNG.**

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{3} + k2p \\ x = -\frac{p}{3} + k2p \\ x = \frac{p}{2} + l2p \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

(b) Khi $m=2$ thì phương trình

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{3} + k2p \\ x = -\frac{p}{3} + k2p \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Khi $m=2$ thì phương trình

» **Chọn SAI.**

(c) Khi $m=1$ thì tập nghiệm của phương trình (1) có tất cả 4 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{3} + k2p \\ x = -\frac{p}{3} + k2p \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{3} + k2p \\ x = -\frac{p}{3} + k2p \\ x = \frac{p}{4} + lp \end{cases}$$

Khi $m=1$ phương trình

Do đó tập nghiệm của phương trình (1) có tất cả 4 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

» **Chọn ĐÚNG.**

(d) Chỉ tìm được một giá trị của m để phương trình (1) có đúng hai nghiệm thuộc $\left(-\frac{p}{4}; \frac{3p}{4}\right]$.

Do phương trình (2) có một nghiệm $x = \frac{p}{3}$ thuộc $\left(-\frac{p}{4}; \frac{3p}{4}\right]$.



Do đó để phương trình ⁽¹⁾ có đúng hai nghiệm thuộc $\left[-\frac{p}{4}; \frac{3p}{4}\right]$ thì phương trình

$\sin 2x = m$ có 1 nghiệm thuộc $\left[-\frac{p}{4}; \frac{3p}{4}\right]$ khác $\frac{p}{3}$ (*)

Ta có $x \in \left[-\frac{p}{4}; \frac{3p}{4}\right] \Rightarrow 2x \in \left[-\frac{p}{2}; \frac{3p}{2}\right]$ hay $2x \in [0; 2p]$

Từ (*) suy ra $m=1$ hoặc $m=-1$

» **Chọn SAI.**

» **Câu 47.** Hằng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tại thời điểm $t(h)$ ($0 \leq t \leq 24$) được cho bởi công thức

$$h = 3 \cos\left(\frac{pt}{6} + \frac{p}{3}\right) + 12$$

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Độ sâu của mực nước trong kênh nhỏ nhất bằng $9m$.		
(b)	Độ sâu của mực nước trong kênh lớn nhất bằng $15m$.		
(c)	Trong 1 ngày có đúng 3 thời điểm mà độ sâu của mực nước trong kênh đạt giá trị lớn nhất.		
(d)	Độ sâu của mực nước trong kênh tại thời điểm $12(h)$ bằng $13m$.		

» **Lời giải**

(a) Độ sâu của mực nước trong kênh nhỏ nhất bằng $9m$.

Độ sâu của mực nước trong kênh nhỏ nhất khi

$$\cos\left(\frac{pt}{6} + \frac{p}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{pt}{6} + \frac{p}{3} = (2k+1)p$$

Thử ta thấy tồn tại $t=4, \dots$ thỏa mãn. Khi đó độ sâu là $9m$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(b) Độ sâu của mực nước trong kênh lớn nhất bằng $15m$.

Độ sâu của mực nước trong kênh nhỏ nhất khi

$$\cos\left(\frac{pt}{6} + \frac{p}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{pt}{6} + \frac{p}{3} = k2p \Leftrightarrow \begin{cases} t=10 \\ t=22 \end{cases}$$

Khi đó độ sâu là $15m$.

» **Chọn ĐÚNG.**

(c) Trong 1 ngày có đúng 3 thời điểm mà độ sâu của mực nước trong kênh đạt giá trị lớn nhất.

Độ sâu của mực nước trong kênh nhỏ nhất khi

$$\cos\left(\frac{pt}{6} + \frac{p}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{pt}{6} + \frac{p}{3} = k2p \Leftrightarrow \begin{cases} t=10 \\ t=22 \end{cases}$$

Vậy có hai thời điểm thỏa mãn độ sâu lớn nhất.

» **Chọn SAI.**



(d) Độ sâu của mực nước trong kênh tại thời điểm $^{12(h)}$ bằng 13m.

Thay $t=12(h) \Rightarrow h=13,5m$.

» **Chọn SAI.**

C. Câu hỏi - Trả lời ngắn

» **Câu 48.** Họ nghiệm phương trình lượng giác: $\cos(x+30^\circ)+1=0$ có dạng $x=a+k \cdot b$ ($k \in \mathbb{Z}$), với $a; b$ là các số nguyên. Tính giá trị $S=b-a$

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 210**

Ta có: $\cos(x+30^\circ)+1=0 \Leftrightarrow \cos(x+30^\circ)=-1$

$$\Leftrightarrow x+30^\circ=180^\circ+k360^\circ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x=150^\circ+k360^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$x=150^\circ+k360^\circ (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} a=150 \\ b=360 \end{cases} \Rightarrow S=210$$

Vậy phương trình có nghiệm là:

» **Câu 49.** Phương trình lượng giác: $\tan\left(2x-\frac{p}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ có họ nghiệm dạng $x=\frac{p}{a}+k\frac{p}{b}$ ($k \in \mathbb{Z}$), với $a; b$ là các số nguyên. Tính giá trị $T=a(a+b)$

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 48**

Ta có: $\tan\left(2x-\frac{p}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan\left(2x-\frac{p}{6}\right)=\tan\frac{p}{6}$

$$\Leftrightarrow 2x-\frac{p}{6}=\frac{p}{6}+kp \Leftrightarrow x=\frac{p}{6}+k\frac{p}{2} (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow T=6(6+2)=48$$

» **Câu 50.** Họ nghiệm phương trình lượng giác: $\sqrt{3}\tan\frac{px}{2}=3$ có dạng $x=a+k \cdot b$ ($k \in \mathbb{Z}$), với $m; n$ là các số nguyên và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính giá trị $P=m^n$

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 8**

Ta có: $\sqrt{3}\tan\frac{px}{2}=3 \Leftrightarrow \tan\frac{px}{2}=\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\frac{px}{2}=\tan\frac{p}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{px}{2}=\frac{p}{3}+kp \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}+2k (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=3 \end{cases} \Rightarrow P=2^3=8$$

» **Câu 51.** Phương trình $2\sin\left(x-\frac{p}{6}\right)+2=0$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(0; 2p)$

» **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1**

Ta có: $2\sin\left(x-\frac{p}{6}\right)+2=0 \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{p}{6}\right)=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{p}{6}+k2p, k \in \mathbb{Z}$

Do $x \in (0; 2p)$ nên $0 < -\frac{p}{6}+k2p < 2p \Leftrightarrow \frac{1}{6} < k < \frac{7}{6} \Leftrightarrow k=1$.



Vậy phương trình có một nghiệm $x = \frac{5p}{3}$.

» Câu 52. Cho phương trình $\cos\left(2x + \frac{p}{3}\right) = \cos\left(\frac{p}{2} - \frac{x}{2}\right)$. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{p}{3}; \frac{8p}{3}\right)$ của phương trình.

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 5**

$$\cos\left(2x + \frac{p}{3}\right) = \cos\left(\frac{p}{2} - \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{p}{3} = \frac{p}{2} - \frac{x}{2} + k2p \\ 2x + \frac{p}{3} = -\left(\frac{p}{2} - \frac{x}{2}\right) + k2p \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{15} + k\frac{4p}{5} \\ x = -\frac{5p}{9} + k\frac{4p}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

+ Với $x = \frac{p}{15} + k\frac{4p}{5}$, ta có: $\frac{p}{3} < \frac{p}{15} + k\frac{4p}{5} < \frac{8p}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < k < \frac{13}{4}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k \in \{1; 2; 3\}$.

Trường hợp này có 3 nghiệm thỏa mãn là: $x = \frac{13p}{15}, x = \frac{5p}{3}, x = \frac{37p}{15}$.

+ Với $x = -\frac{5p}{9} + k\frac{4p}{3}$, tương tự ta có 2 nghiệm thỏa mãn là: $x = \frac{7p}{9}, x = \frac{19p}{9}$.
Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm phân biệt thỏa mãn đề bài.

» Câu 53. Cho phương trình $\cos x = \sin 3x$. Tính tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2p)$ của phương trình (làm tròn đến hàng phần chục).

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 15,7**

$$\cos x = \sin 3x \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{p}{2} - 3x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{2} - 3x + k2p \\ x = -\frac{p}{2} + 3x + k2p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{8} + k\frac{p}{2} \\ x = \frac{p}{4} + kp \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

+ Với $x = \frac{p}{8} + k\frac{p}{2}$, ta có: $0 < \frac{p}{8} + k\frac{p}{2} < 2p \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{15}{4}$, vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Khi đó, các nghiệm thỏa mãn là: $x = \frac{p}{8}, x = \frac{5p}{8}, x = \frac{9p}{8}, x = \frac{13p}{8}$.

+ Với $x = \frac{p}{4} + kp$, tương tự ta có các nghiệm thỏa mãn là: $x = \frac{p}{4}, x = \frac{5p}{4}$.

Vậy tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2p)$ của phương trình đã cho là:

$$\frac{p}{8} + \frac{5p}{8} + \frac{9p}{8} + \frac{13p}{8} + \frac{p}{4} + \frac{5p}{4} = 5p \approx 15,7$$

» Câu 54. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos x = m$ có nghiệm?

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 3**

$\cos x = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$. Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1\}$



- » **Câu 55.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin x - m = 1$ có nghiệm.

🔖 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 3**

Ta có: $\sin x - m = 1 \Leftrightarrow \sin x = m + 1$.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $-1 \leq m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0$.

Vậy $-2 \leq m \leq 0$ thỏa mãn đề bài. Có 3 giá trị nguyên của tham số m

- » **Câu 56.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3\sin^2 x + \sin 2x - m\cos^2 x = 0$ có nghiệm.

🔖 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 1**

$3\sin^2 x + \sin 2x - m\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow (m - 1)\cos x = 3m + 2$.

Trường hợp 1: $m = 1, \cos x = 2$ (loại).

Trường hợp 2: $m \neq 1, \cos x = \frac{3m + 2}{m - 1}$.

$\left| \frac{3m + 2}{m - 1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow (3m - 2)^2 - (m - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{2} \leq m \leq \frac{-1}{4}$.

Có 1 giá trị nguyên.

- » **Câu 57.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-10; 10]$ $m \tan x + 2 = m$ có nghiệm.

🔖 **Lời giải**

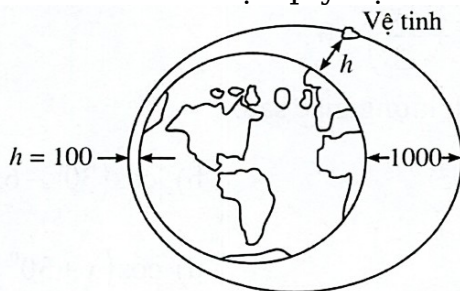
✓ **Trả lời: 20**

$m \tan x + 2 = m \Leftrightarrow \tan x = \frac{m - 2}{m}$

Điều kiện có nghiệm: $m \neq 0$.

Khi đó trong đoạn $[-10; 10]$ có 20 giá trị nguyên của tham số m

- » **Câu 58.** Một vệ tinh bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo hình Elip (như hình vẽ):



Độ cao h (tính bằng kilômét) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác

$$h = 550 + 450 \cdot \cos \frac{p}{50} t$$

định bởi công thức. Trong đó t là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Người ta cần thực hiện một thí nghiệm khoa học khi vệ tinh cách mặt đất 250 km . Trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, hãy tìm thời điểm t để có thể thực hiện thí nghiệm đó? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 1)

🔖 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 36,6**

Ta có phương trình: $550 + 450 \cdot \cos \frac{p}{50} t = 250 \Leftrightarrow \cos \frac{p}{50} t = -\frac{2}{3}$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{p}{50}t \approx 2,3 + k2p \\ \frac{p}{50}t \approx -2,3 + k2p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 36,61 + k100 \\ t \approx -36,61 + k100 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, tại thời điểm $t \approx 36,6$ (phút) thì ta có thể thực hiện thí nghiệm đó.

- » **Câu 59.** Mùa xuân ở Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) thường có trò chơi đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động qua lại vị trí cân bằng. Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (mét) được tính từ vị trí chân người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3 \cos \left[\frac{p}{3}(2t - 1) \right]$ ($t \geq 0$ và được tính bằng giây), trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở về phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại.



Hỏi trong 3 giây đầu tiên, có tất cả bao nhiêu lần người chơi đu ở cách vị trí cân bằng 1 mét?

👉 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 4**

$$\begin{aligned} & \text{Người chơi cách vị trí cân bằng 1 mét khi} \\ & \Leftrightarrow \sin^2 \left[\frac{p}{3}(2t - 1) \right] = \frac{8}{9} \Leftrightarrow 1 - \cos \left[\frac{2p}{3}(2t - 1) \right] = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \cos \left[\frac{2p}{3}(2t - 1) \right] = -\frac{7}{9} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2p}{3}(2t - 1) = a + k2p \\ \frac{2p}{3}(2t - 1) = -a + k2p \end{cases} \left(\text{với } k \in \mathbb{Z} \text{ và } \cos a = -\frac{7}{9} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3a}{4p} + \frac{1}{2} + \frac{3k}{2} \\ t = -\frac{3a}{4p} + \frac{1}{2} + \frac{3k}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Trong 3 giây đầu tiên ứng với $0 \leq t \leq 3$:

$$\text{+) Với } t = \frac{3a}{4p} + \frac{1}{2} + \frac{3k}{2} \text{ thì } 0 \leq \frac{3a}{4p} + \frac{1}{2} + \frac{3k}{2} \leq 3 \Rightarrow -0,73 \leq k \leq 1,27 \Rightarrow k \in \{0; 1\}$$

$$\text{+) Với } t = -\frac{3a}{4p} + \frac{1}{2} + \frac{3k}{2} \text{ thì } 0 \leq -\frac{3a}{4p} + \frac{1}{2} + \frac{3k}{2} \leq 3 \Rightarrow 0,06 \leq k \leq 2,06 \Rightarrow k \in \{1; 2\}$$

Vậy trong 3 giây đầu tiên, có 4 lần người chơi ở cách vị trí cân bằng 1 mét.

- » **Câu 60.** Trong môn cầu lông, khi phát cầu, người chơi cần đánh cầu qua khỏi lưới sang phía sân đối phương và không được để cho cầu rơi ngoài biên.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , chọn điểm có tọa độ $(O; y_0)$ là điểm xuất phát thì phương trình quỹ đạo của cầu lông khi rời khỏi mặt vợt là:



$$y = \frac{-g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 a} + x \cdot \tan(a) + y_0$$

Trong đó:

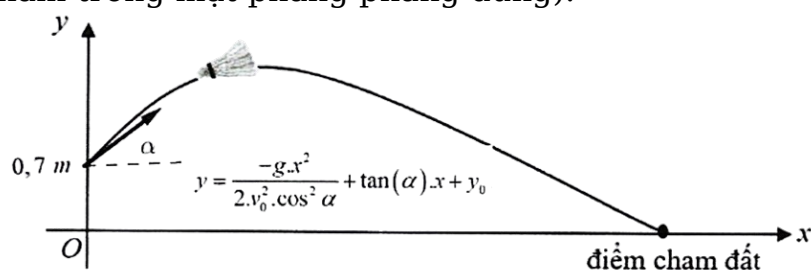
» g là gia tốc trọng trường (thường được chọn là $9,8m/s^2$);

» a là góc phát cầu (so với phương ngang của mặt đất);

» v_0 là vận tốc ban đầu của cầu;

» y_0 là khoảng cách từ vị trí phát cầu đến mặt đất.

Đây là một hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động của cầu lông là một parabol. Một người chơi cầu lông đang đứng khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa) là $6,68m$. Quan sát hình bên dưới, hỏi người chơi đã phát cầu góc khoảng bao nhiêu độ so với mặt đất? Biết cầu rời mặt vợt ở độ cao $0,7m$ so với mặt đất; vận tốc xuất phát của cầu là $8m/s$; người chơi không phát cầu quá 50° và bỏ qua sức cản của gió và xem quỹ đạo của cầu luôn nằm trong mặt phẳng phẳng đứng).



🔗 **Lời giải**

✓ **Trả lời: 30**

Với $g=9,8m/s^2$, vận tốc ban đầu $v_0=8m/s$, phương trình quỹ đạo của cầu:

$$y = \frac{-g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 a} + \tan(a) \cdot x + y_0$$

Khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa) là $6,68m$; nghĩa là $x=6,68m$.

Ta có
$$\frac{-9,8 \cdot (6,68)^2}{128 \cdot \cos^2 a} + \tan(a) \cdot (6,68) + 0,7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-9,8 \cdot (6,68)^2}{128} (1 + \tan^2 a) + \tan(a) \cdot (6,68) + 0,7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan a \approx 1,378 \\ \tan a \approx 0,576 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a; 54,04^\circ \\ a; 29,97^\circ \end{cases}$$

Vậy người chơi đã phát cầu một góc gần 54° hoặc gần 30° so với mặt đất.

----- Hết -----

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>