

PHẦN ĐẠI SỐ VÀ MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

CHƯƠNG I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1. GÓC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc lượng giác

- Khái niệm góc lượng giác

Cho hai tia Oa, Ob .

- Nếu một tia Om quay quanh gốc O của nó theo một chiều cố định bắt đầu từ vị trí tia Oa và dừng ở vị trí tia Ob thì ta nói Om quét một góc lượng giác có tia đầu Oa , tia cuối Ob , kí hiệu (Oa, Ob) .

- Khi tia Om quay một góc α , ta nói số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) bằng α , kí hiệu $sđ(Oa, Ob) = \alpha$.

Chú ý: Với hai tia Oa và Ob cho trước, có vô số góc lượng giác tia đầu Oa và tia cuối Ob . Ta dùng chung kí hiệu (Oa, Ob) cho tất cả các góc lượng giác này.

Nhận xét: Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu Oa và tia cuối Ob sai khác nhau một bội nguyên của 360° nên có công thức tổng quát là:

$sđ(Oa, Ob) = \alpha^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$, thường viết là $(Oa, Ob) = \alpha^\circ + k360^\circ$ với α° là số đo của một góc lượng giác bất kì có tia đầu Oa và tia cuối Ob .

- Hệ thức Chasles (Sa-lơ)

Với ba tia Oa, Ob và Oc bất kì, ta có $(Oa, Ob) + (Ob, Oc) = (Oa, Oc) + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

2. Đơn vị radian

Trên đường tròn bán kính R tùy ý, góc ở tâm chắn một cung có độ dài đúng bằng R được gọi là một góc có số đo 1 radian (đọc là 1 ra-di-an, viết tắt là 1 rad).

$$\alpha^\circ = \frac{\pi \alpha}{180} \text{ rad} \quad \alpha \text{ rad} = \left(\frac{180 \alpha}{\pi} \right)^\circ.$$

Chú ý:

- Khi ghi số đo của một góc ở đơn vị radian, người ta thường bỏ đi chữ rad sau số đo.

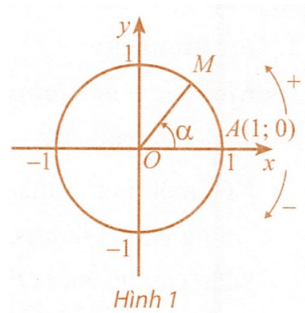
- Với đơn vị radian, công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Oa, Ob) là $(Oa, Ob) = \alpha + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$,

trong đó α là số đo theo radian của một góc lượng giác bất kì có tia đầu Oa và tia cuối Ob .

Lưu ý không được viết $\alpha + k360^\circ$ hay $\alpha^\circ + k2\pi$ (vì không cùng đơn vị đo).

3. Đường tròn lượng giác

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn tâm O bán kính bằng 1. Trên đường tròn này, chọn điểm $A(1;0)$ làm gốc, chiều dương là chiều ngược chiều kim đồng hồ và chiều âm là chiều cùng chiều kim đồng hồ.



Đường tròn cùng với gốc và chiều như trên được gọi là **đường tròn lượng giác**.

Trên đường tròn lượng giác, điểm biểu diễn của góc α là điểm M mà số đo của góc lượng giác (OA, OM) bằng α .

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1.

a) Đổi số đo của góc 80° và góc 150° sang đơn vị radian.

b) Đổi số đo của góc $\frac{3\pi}{5} \text{ rad}$ và góc $-\frac{7\pi}{20} \text{ rad}$ sang đơn vị độ.

Giải

$$\text{a) } 80^\circ = \frac{80\pi}{180} = \frac{4\pi}{9} \quad 150^\circ = \frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{b) } \frac{3\pi}{5} \text{ rad} = \left(\frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi} \right)^\circ = 108^\circ; \quad -\frac{7\pi}{20} \text{ rad} = \left(-\frac{7\pi}{20} \cdot \frac{180}{\pi} \right)^\circ = -63^\circ.$$

Bài 2. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong mỗi hình dưới đây.

a) $\angle xAy = 102^\circ$;	b) $\angle zBt = \frac{\pi}{5}$.

Giải

Số đo của góc lượng giác (Ax, Ay) trong Hình bằng $102^\circ + 360^\circ = 462^\circ$.

Số đo của góc lượng giác (Bt, Bz) trong Hình bằng $-\frac{\pi}{5} - 2.2\pi = -\frac{21\pi}{5}$.

Bài 3.

a) Hãy tìm số đo α của góc lượng giác (Oa, Ob) , với $0 \leq \alpha < 2\pi$, biết một góc lượng giác cùng tia đầu Oa và tia cuối Ob có số đo là $\frac{25\pi}{6}$.

b) Hãy tìm số đo a° của góc lượng giác (Om, On) , với $0 \leq a < 360$, biết một góc lượng giác cùng tia đầu Om và tia cuối On có số đo là -875° .

Giải

a) Số đo α của các góc lượng giác bất kì có cùng tia đầu Oa và tia cuối Ob sai khác nhau một bội nguyên của 2π nên có dạng là $\alpha = \frac{25\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có $0 \leq \alpha < 2\pi$, suy ra $-\frac{25\pi}{6} \leq k2\pi < 2\pi - \frac{25\pi}{6}$, suy ra $-\frac{25}{12} \leq k < -\frac{13}{12}$.

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = -2$. Vậy $\alpha = \frac{25\pi}{6} + (-2) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$.

b) Số đo a° của các góc lượng giác có cùng tia đầu Om và tia cuối On sai khác nhau một bội nguyên của 360° nên có dạng là $a^\circ = -875^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có $0 \leq a < 360$, suy ra $875 \leq k360 < 360 + 875$, suy ra $\frac{175}{72} \leq k < \frac{247}{72}$. Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 3$.

Vậy $a^\circ = -875^\circ + 3 \cdot 360^\circ = 205^\circ$.

Bài 4. Biểu diễn các góc lượng giác sau trên đường tròn lượng giác:

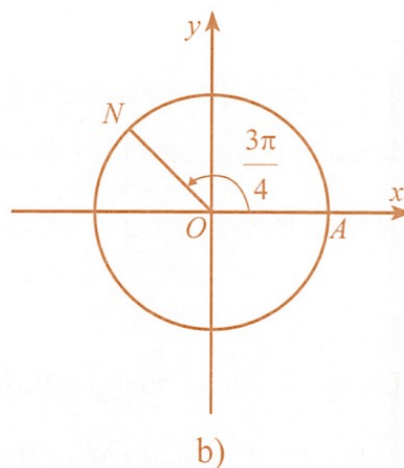
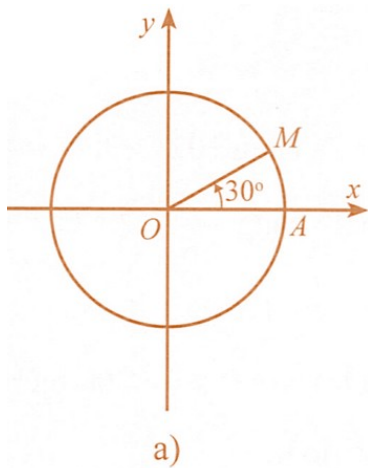
a) 750° ;

b) $-\frac{29\pi}{4}$.

Giải

a) Ta có $750^\circ = 30^\circ + 2 \cdot 360^\circ$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo 750° là điểm M trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ I sao cho $\widehat{AOM} = 30^\circ$ (Hình a).

b) Ta có $-\frac{29\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + (-4) \cdot 2\pi$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $-\frac{29\pi}{4}$ là điểm N trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ II sao cho $\widehat{AON} = \frac{3\pi}{4}$ (Hình b).



C. BÀI TẬP

Câu 1. Đổi số đo của các góc sau đây sang radian:

- a) 15° ;
- b) 65° ;
- c) -105° ;
- d) $\left(\frac{-5}{\pi}\right)^0$.

Lời giải

- a) $\frac{\pi}{12}$; b) $\frac{13\pi}{36}$; c) $-\frac{7\pi}{12}$ d) $-\frac{1}{36}$.

Câu 2. Đổi số đo của các góc sau đây sang độ:

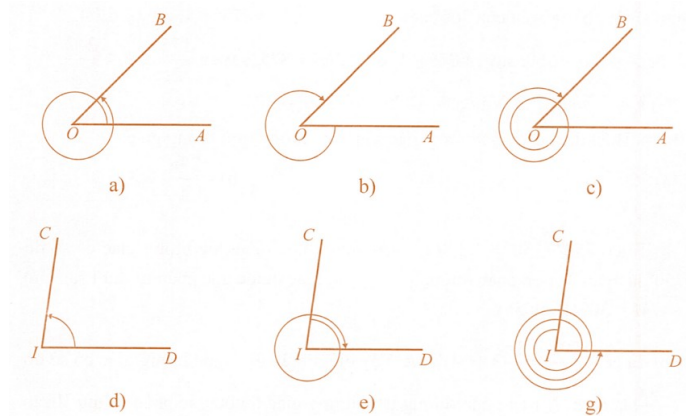
- a) 6 ;
- b) $\frac{4\pi}{15}$
- c) $-\frac{19\pi}{8}$
- d) $\frac{5}{3}$.

Lời giải

- a) $343,77^\circ$; b) 48° ; c) $-427,5^\circ$; d) $95,49^\circ$.

Câu 3. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong mỗi hình dưới đây. Biết trong

các Hình a, b, c có $\angle AOB = \frac{\pi}{4}$; trong các Hình d, e, g có $\angle ID = 82^\circ$.



Lời giải

a) $\frac{9\pi}{4}$; b) $-\frac{7\pi}{4}$; c) $-\frac{15\pi}{4}$; d) 82° ; e) -442° ; g) 998° .

Câu 4. Hãy tìm số đo α của góc lượng giác (Om, On) , với $-\pi \leq \alpha < \pi$, biết một góc lượng giác cùng tia đầu Om và tia cuối On có số đo là:

- a) $\frac{36\pi}{5}$;
b) $-\frac{75\pi}{14}$
c) $\frac{39\pi}{8}$
d) 2023π .

Lời giải

a) $-\frac{4\pi}{5}$; b) $\frac{9\pi}{14}$; c) $\frac{7\pi}{8}$; d) $-\pi$

Câu 5. Cho một góc lượng giác có số đo là 375° .

- a) Tìm số lớn nhất trong các số đo của góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với góc đó mà có số đo âm;
b) Tìm số nhỏ nhất trong các số đo của góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với góc đó mà có số đo dương.

Lời giải

a) -345° ; b) 15° .

Câu 6. Viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (Om, On) dưới dạng $a^\circ + k360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), với $0 \leq a < 360$, biết một góc lượng giác với tia đầu Om , tia cuối On có số đo:

- a) 1935° ;
b) -450° ;

c) -1440° ;

d) $754,5^\circ$.

Lời giải

a) Ta có $1935^\circ = 135^\circ + 5 \cdot 360^\circ$ nên công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (Om, On) là $(Om, On) = 135^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

b) Ta có $-450^\circ = 270^\circ - 2 \cdot 360^\circ$ nên công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (Om, On) là $(Om, On) = 270^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

c) Ta có $-1440^\circ = -4 \cdot 360^\circ$ nên công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (Om, On) là $(Om, On) = k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

d) Ta có $754,5^\circ = 34,5^\circ + 2 \cdot 360^\circ$ nên công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (Om, On) là $(Om, On) = 34,5^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

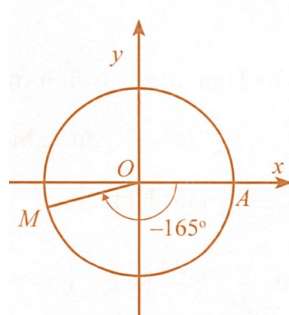
Câu 7. Biểu diễn các góc lượng giác sau trên đường tròn lượng giác:

a) -1965° ;

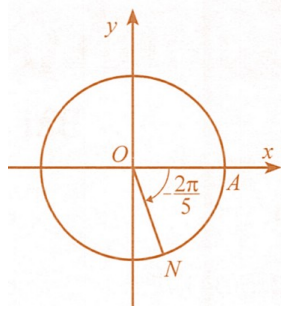
b) $\frac{48\pi}{5}$.

Lời giải

a) Ta có $-1965^\circ = -165^\circ + (-5) \cdot 360^\circ$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo -1965° là điểm M trên đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ III sao cho $\angle AOM = 165^\circ$ như Hình .



b) Ta có $\frac{48\pi}{5} = -\frac{2\pi}{5} + 10\pi$. Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $\frac{48\pi}{5}$ là điểm N trên đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ III sao cho $\angle AON = \frac{2\pi}{5}$ như Hình.



Câu 8. a) Góc lượng giác -245° có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc lượng giác nào sau đây?

- 605° ; - 65° ; 115° ; 205° ; 475° .

b) Góc lượng giác $\frac{24\pi}{5}$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc lượng giác nào sau đây?

- $\frac{16\pi}{5}$; - $\frac{\pi}{5}$; $\frac{14\pi}{5}$; $\frac{29\pi}{5}$; $\frac{53\pi}{10}$.

Lời giải

Hướng dẫn: Tính hiệu số đo của góc lượng giác cần xét với góc được cho. Nếu hiệu số đo là một bội nguyên của 360° hoặc 2π thì chúng có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

a) - 605° ; 115° ; 475° ;

b) - $\frac{16\pi}{5}$; $\frac{14\pi}{5}$.

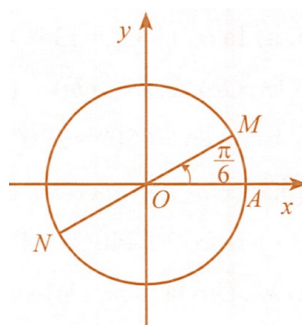
Câu 9. Trên đường tròn lượng giác, hãy biểu diễn các góc lượng giác có số đo có dạng là:

a) $\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

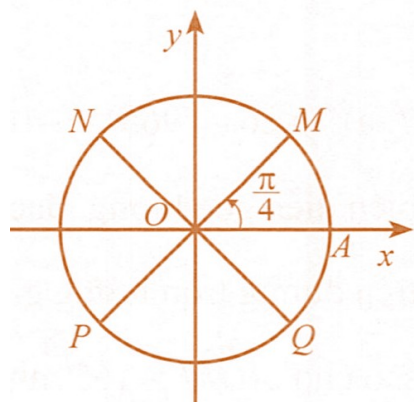
b) $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

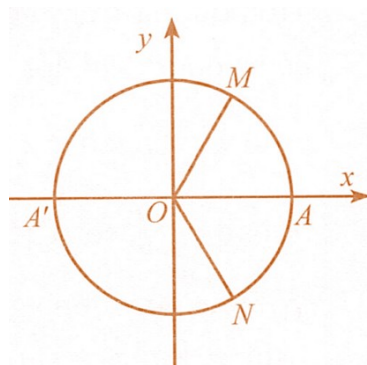
a) Trên đường tròn lượng giác, các góc có số đo $\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ được biểu diễn bởi hai điểm M và N như Hình.



b) Trên đường tròn lượng giác, các góc có số đo $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ được biểu diễn bởi bốn điểm M, N, P, Q như Hình.



Câu 10. Trong hình bên, các điểm M, A', N tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều. Vị trí các điểm M, A', N trên đường tròn lượng giác có thể được biểu diễn cho góc lượng giác nào sau đây?



$$\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}); -\pi + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}); -\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

Lời giải

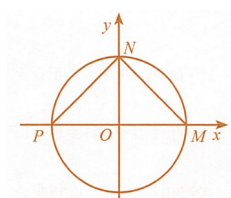
$$\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}); -\pi + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 11. Cho ba điểm M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác của các góc lượng giác có số đo $k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi; \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. Tam giác MNP là tam giác gì?

Lời giải

Dễ thấy $M(1;0), N(0;1)$ và $P(-1;0)$.

Suy ra $MN = NP = \sqrt{2}, MP = 2$.



Do đó MNP là tam giác vuông cân tại N .

Câu 12. Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 175 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều dương.

a) Sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

b) Sau thời gian bao lâu cánh quạt quay được một góc có số đo 42π ?

Lời giải

a) Sau 1 giây, cánh quạt quay được $\frac{175}{60} = \frac{35}{12}$ (vòng) theo chiều dương.

Suy ra sau 1 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo là $\frac{35}{12} \cdot 2\pi = \frac{35\pi}{6}$.

Vậy sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo là $\frac{35\pi}{6} \cdot 5 = \frac{175\pi}{6}$.

b) Thời gian để cánh quạt quay được một góc có số đo 42π là

$$42\pi : \frac{35\pi}{6} = 7,2 \text{ giây.}$$

Câu 13. Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây. Chọn chiều quay của bánh xe là chiều dương. Xét van V của bánh xe.



a) Sau 1 phút, van V đã quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

b) Biết rằng bán kính của bánh xe là 35cm . Độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là bao nhiêu mét?

Lời giải

a) Sau 1 giây, van V của bánh xe quay được $\frac{30}{8} = 3,75$ (vòng).

Sau 1 phút, van V của bánh xe quay được $3,75 \cdot 60 = 225$ (vòng).

Suy ra sau 1 phút, van V của bánh xe quay được một góc có số đo là $225 \cdot 2\pi = 450\pi$.

b) Mỗi góc ở tâm với số đo 1 rad chắn một cung có độ dài bằng bán kính bánh xe $r = 0,35\text{m}$.

Do đó độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là $450\pi \cdot 0,35 \approx 494,8(m)$.

Bài 2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

Trên đường tròn lượng giác, gọi $M(x_M; y_M)$ là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α . Khi đó:

$$\sin \alpha = y_M, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\text{nếu } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos \alpha = x_M, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\text{nếu } \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

Với mọi góc lượng giác α và số nguyên k , ta có:

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha; \quad \cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha;$$

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha; \quad \cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha.$$

2. Hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác của một góc lượng giác

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{với } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad \text{với } \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \quad \text{với } \alpha \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

3. Giá trị lượng giác của các góc lượng giác có liên quan đặc biệt

- Hai góc đối nhau: α và $-\alpha$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha; \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha;$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha; \quad \cot(-\alpha) = -\cot \alpha.$$

- Hai góc hơn kém nhau π : α và $\alpha + \pi$

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha; \quad \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha;$$

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha; \quad \cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha.$$

- Hai góc bù nhau: α và $\pi - \alpha$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha; \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha; \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

- Hai góc phụ nhau: α và $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha;$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha; \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha.$$

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính các giá trị lượng giác của góc α , nếu:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$;

b) $\cos \alpha = -0,7$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

c) $\tan \alpha = 2$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

d) $\cot \alpha = \frac{7}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Giải

a) Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$.

Vì $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên $\cos \alpha > 0$. Do đó $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Suy ra $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ và $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = 2\sqrt{2}$.

b) Ta có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - (-0,7)^2 = \frac{51}{100}$.

Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin \alpha < 0$. Do đó $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{51}}{10}$.

Suy ra $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{51}}{10}}{-0,7} = \frac{\sqrt{51}}{7}$ và $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{7\sqrt{51}}{51}$.

c) Ta có $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + 2^2 = 5$.

Suy ra $\cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$. Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha > 0$. Do đó $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Suy ra $\sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

d) Ta có $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = \frac{3}{7}; \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha = 1 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{58}{9}$.

Suy ra $\sin^2 \alpha = \frac{9}{58}$. Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin \alpha < 0$. Do đó $\sin \alpha = -\frac{3\sqrt{58}}{58}$.

Suy ra $\cos \alpha = \cot \alpha \sin \alpha = \frac{7}{3} \cdot \left(-\frac{3\sqrt{58}}{58}\right) = -\frac{7\sqrt{58}}{58}$.

Bài 2.

a) Biểu diễn $\sin\left(-\frac{29\pi}{3}\right)$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\frac{\pi}{4}$;

b) Biểu diễn $\tan 973^\circ$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0° đến 45° .

Giải

a) $\sin\left(-\frac{29\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{29\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{3} + 8\pi\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \pi\right) = \sin\frac{2\pi}{3}$
 $= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$.

b) $\tan 973^\circ = \tan(73^\circ + 5 \cdot 180^\circ) = \tan 73^\circ = \tan(90^\circ - 17^\circ) = \cot 17^\circ$.

Bài 3. Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 1 - \sin \alpha \cos \alpha$;

b) $\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} + \frac{1 + \cot \alpha}{1 - \cot \alpha} = 0$.

Giải

a) $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha}$
 $= \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \sin \alpha \cos \alpha$.

b)

$$\begin{aligned} \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} + \frac{1 + \cot \alpha}{1 - \cot \alpha} &= \frac{\tan \alpha \cot \alpha + \tan \alpha}{\tan \alpha \cot \alpha - \tan \alpha} + \frac{1 + \cot \alpha}{1 - \cot \alpha} \\ &= \frac{\tan \alpha (\cot \alpha + 1)}{\tan \alpha (\cot \alpha - 1)} + \frac{1 + \cot \alpha}{1 - \cot \alpha} = \frac{\cot \alpha + 1}{\cot \alpha - 1} - \frac{1 + \cot \alpha}{\cot \alpha - 1} = 0. \end{aligned}$$

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sin^2(3\pi - \alpha) + \sin^2\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right)$

b) $\left[1 + \tan^2(-\alpha + 11\pi)\right] \cdot \sin^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$.

Giải

a) Ta có: $\sin(3\pi - \alpha) = \sin(\pi - \alpha + 2\pi) = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$;

$$\sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

Suy ra $\sin^2(3\pi - \alpha) + \sin^2\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

b) Ta có: $\tan(-\alpha + 11\pi) = \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$;

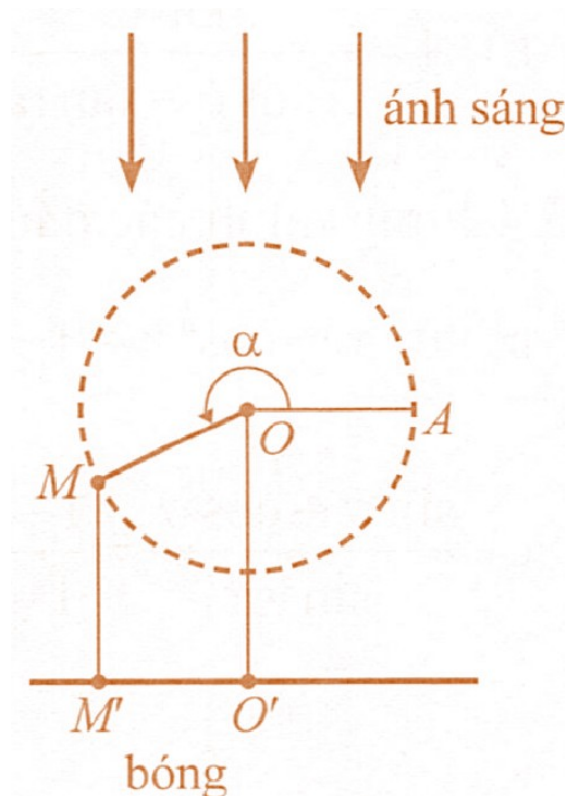
$$\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - 2\pi\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

Suy ra $\left[1 + \tan^2(-\alpha + 11\pi)\right] \cdot \sin^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = (1 + \tan^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha$

$$= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = 1.$$

Bài 5. Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như hình bên. Vị trí ban đầu của thanh là OA . Hỏi độ

dài bóng $O'M'$ của OM khi thanh quay được $\frac{60}{13}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 10 cm ?



Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Giải

Ta có $\alpha = \frac{60}{13} \cdot 2\pi = \frac{120\pi}{13}$.

Suy ra $O'M' = |OM \cos \alpha| = \left| 10 \cos \frac{120\pi}{13} \right| \approx 7,5 \text{ cm}$.

C. BÀI TẬP

Câu 1. Tính các giá trị lượng giác của góc α , nếu:

a) $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

b) $\cos \alpha = \frac{11}{61}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

c) $\tan \alpha = -\frac{15}{8}$ và $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$;

d) $\cot \alpha = -2,4$ và $-180^\circ < \alpha < 0^\circ$.

Lời giải

a) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}, \cot \alpha = \frac{3}{4}$;

b) $\sin \alpha = \frac{60}{61}, \tan \alpha = \frac{60}{11}, \cot \alpha = \frac{11}{60}$;

$$c) \cot \alpha = -\frac{8}{15}, \cos \alpha = \frac{8}{17}, \sin \alpha = -\frac{15}{17};$$

$$d) \tan \alpha = -\frac{5}{12}, \sin \alpha = -\frac{5}{13}, \cos \alpha = \frac{12}{13}.$$

Câu 2. Biểu diễn các giá trị lượng giác sau qua các giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\frac{\pi}{4}$ (hoặc từ 0° đến 45°):

$$a) \sin(-1693^\circ);$$

$$b) \cos \frac{1003\pi}{3};$$

$$c) \tan 885^\circ;$$

$$d) \cot \left(-\frac{53\pi}{10} \right).$$

Lời giải

$$a) \sin(-1693^\circ) = \cos 17^\circ;$$

$$b) \cos \frac{1003\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6};$$

$$c) \tan 885^\circ = -\tan 15^\circ;$$

$$d) \cot \left(-\frac{53\pi}{10} \right) = -\tan \frac{\pi}{5}.$$

Câu 3. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xác định dấu của các giá trị lượng giác sau:

$$a) \cos(\alpha + \pi);$$

$$b) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right);$$

$$c) \tan \left(\alpha + \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$d) \cot \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$e) \cos \left(2\alpha + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$g) \sin(\pi - 2\alpha).$$

Lời giải

$$\text{a) } \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha > 0 \quad \text{vì } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{b) } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha < 0 \quad \text{vì } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{c) } \tan\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cot \alpha < 0 \quad \text{vì } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{d) } \cot\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\tan \alpha < 0 \quad \text{vì } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{e) } \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 2\alpha < 0 \quad \text{vì } 2\pi < 2\alpha < 3\pi.$$

$$\text{g) } \sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\alpha > 0 \quad \text{vì } 2\pi < 2\alpha < 3\pi.$$

Câu 4. Biết $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{3\sin \alpha}{2\cos \alpha - \tan \alpha};$$

$$\text{b) } B = \frac{\cot^2 \alpha - \sin \alpha}{\tan \alpha + 2\cos \alpha}.$$

Lời giải

$$\text{Vì } \sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ và } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ nên } \cos \alpha = -\frac{4}{5}, \tan \alpha = -\frac{3}{4} \text{ và } \cot \alpha = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{a) } A = \frac{3 \cdot \frac{3}{5}}{2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right)} = -\frac{36}{17}$$

$$\text{b) } B = \frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{3}{5}}{-\frac{3}{4} + 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)} = -\frac{212}{423}.$$

Câu 5. Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

$$\text{a) } \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x;$$

$$\text{b) } \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1};$$

$$c) \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin^3 \alpha} = \frac{1 - \cot^4 \alpha}{1 - \cot \alpha};$$

$$d) \frac{\tan^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1}{\cot^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 1} = \tan^6 \alpha.$$

Lời giải

$$a) \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x;$$

$$b) \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 - \frac{1}{\tan x}} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1};$$

$$c) \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin^3 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} = (1 + \cot^2 \alpha) + \cot \alpha (1 + \cot^2 \alpha) = (1 + \cot \alpha)(1 + \cot^2 \alpha)$$

$$= \frac{(1 - \cot^2 \alpha)(1 + \cot^2 \alpha)}{1 - \cot \alpha} = \frac{1 - \cot^4 \alpha}{1 - \cot \alpha};$$

d)

$$\frac{\tan^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1}{\cot^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 1} = \frac{\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha}{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right)}{\cos^2 \alpha \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \right)} = \tan^2 \alpha \cdot \frac{\tan^2 \alpha}{\cot^2 \alpha} = \tan^6 \alpha.$$

Câu 6. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \sin^2 60^\circ + \sin^2 164^\circ + \cot^2 25^\circ = \frac{1}{\cos^2 65^\circ};$$

$$b) \frac{\sin 53^\circ}{1 + \sin 64^\circ} = \frac{1}{\sin 10^\circ} + \cot 10^\circ.$$

Lời giải

Hướng dẫn: Các góc được cho đều có liên quan đặc biệt. Sử dụng công thức để biểu diễn giá trị lượng giác của các góc về giá trị lượng giác của cùng một góc và sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản để chứng minh đẳng thức.

a)

$$\begin{aligned}\sin 605^\circ &= -\sin 65^\circ, \sin 1645^\circ = -\cos 65^\circ, \cot 25^\circ = \tan 65^\circ \\ \sin^2 605^\circ + \sin^2 1645^\circ + \cot^2 25^\circ &= \sin^2 65^\circ + \cos^2 65^\circ + \tan^2 65^\circ = 1 + \tan^2 65^\circ \\ &= \frac{1}{\cos^2 65^\circ}.\end{aligned}$$

b)

b)

$$\begin{aligned}\sin 530^\circ &= \sin 10^\circ; \sin 640^\circ = -\cos 10^\circ \\ \frac{\sin 530^\circ}{1 + \sin 640^\circ} &= \frac{\sin 10^\circ}{1 - \cos 10^\circ} = \frac{\sin^2 10^\circ}{\sin 10^\circ (1 - \cos 10^\circ)} \\ &= \frac{1 - \cos^2 10^\circ}{\sin 10^\circ (1 - \cos 10^\circ)} = \frac{(1 + \cos 10^\circ)(1 - \cos 10^\circ)}{\sin 10^\circ (1 - \cos 10^\circ)} \\ &= \frac{1 + \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{1}{\sin 10^\circ} + \cot 10^\circ.\end{aligned}$$

Câu 7. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\cos\left(\alpha + \pi\right) + \sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) - \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \tan(\pi - \alpha)$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin(\beta + \pi) - \sin(2\pi - \alpha) \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)$

Lời giải

a) -1; b) 0.

Câu 8. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin 17^\circ \sin 197^\circ + \sin 73^\circ \cos 163^\circ$;

b) $\frac{1}{1 - \tan 145^\circ} + \frac{1}{1 + \tan 55^\circ}$.

Lời giải

Hướng dẫn: Sử dụng công thức để biểu diễn giá trị lượng giác của các góc về giá trị lượng giác của cùng một góc và sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản để rút gọn.

a) -1; b) 1.

Câu 9. a) Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$. Tính giá trị của biểu thức $\tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha$.

b) Cho $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{4} = \frac{1}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $\sin \alpha \cos \alpha$.

c) Cho $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{2} = \frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$.

Lời giải

$$a) \tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^3 - 3 \tan \alpha \cot \alpha (\tan \alpha + \cot \alpha)$$

$$= (\tan \alpha + \cot \alpha)^3 - 3(\tan \alpha + \cot \alpha) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 2.$$

$$b) (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} [(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{4} \right)^2 - 1 \right] = -\frac{15}{32}.$$

Do đó

c)

$$\begin{aligned} \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha &= (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= (\sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha \cos \alpha) \end{aligned}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} [(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 - 1 \right] = -\frac{3}{8},$$

Mà

$$\text{nên } \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \left(-\frac{3}{8} \right) \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{8} = \frac{11}{16}.$$

Câu 10. Cho $\tan x = 2$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) \frac{3 \sin x - 4 \cos x}{5 \sin x + 2 \cos x}$$

$$b) \frac{\sin^3 x + 2 \cos^3 x}{2 \sin x + 3 \cos x}.$$

Lời giải

Hướng dẫn: Vì $\tan x$ xác định nên $\cos x \neq 0$. Chia tử và mẫu của phân thức cho lũy thừa thích hợp của $\cos x$ để biểu diễn biểu thức theo $\tan x$.

$$a) \frac{3 \sin x - 4 \cos x}{5 \sin x + 2 \cos x} = \frac{3 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - 4}{5 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + 2} = \frac{3 \tan x - 4}{5 \tan x + 2} = \frac{3 \cdot 2 - 4}{5 \cdot 2 + 2} = \frac{1}{6}.$$

$$\begin{aligned} b) \frac{\sin^3 x + 2 \cos^3 x}{2 \sin x + 3 \cos x} &= \frac{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + 2}{\left(2 \frac{\sin x}{\cos x} + 3 \right) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\tan^3 x + 2}{(2 \tan x + 3)(\tan^2 x + 1)} \\ &= \frac{2^3 + 2}{(2 \cdot 2 + 3)(2^2 + 1)} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Câu 11. Độ dài của ngày từ lúc Mặt Trời mọc đến lúc Mặt Trời lặn ở một thành phố X trong ngày thứ t của năm được tính xấp xỉ bởi công thức

$$d(t) = 4 \sin \left[\frac{2\pi}{365}(t - 80) \right] + 12, \quad t \in \mathbb{Z} \text{ và } 1 \leq t \leq 365.$$

Thành phố X vào ngày 31 tháng 1 có bao nhiêu giờ có Mặt Trời chiếu sáng? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

$$d(31) = 9,01 \text{ giờ.}$$

Bài 3. CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Công thức cộng

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta ;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta ;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta ;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta ;$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} ;$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} .$$

2. Công thức góc nhân đôi

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha ;$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha ;$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} .$$

3. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] ;$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] ;$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] .$$

4. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} ; \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} ;$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} ; \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} .$$

B. BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin \frac{7\pi}{12}$

b) $\cos \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}$

c) $\sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24}$

Giải

a) $\sin \frac{7\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$;

b) $\cos \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} = 2 \cos \frac{\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}}{2} \cos \frac{\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}}{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

c)

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{24} - \frac{5\pi}{24} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{24} + \frac{5\pi}{24} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) - \cos \frac{\pi}{4} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Bài 2. Cho $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\cos 2\alpha$;

b) $\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right)$

c) $\tan \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$

Giải

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13} \right)^2} = -\frac{5}{13}$.

a) $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{5}{13} \right)^2 - 1 = -\frac{119}{169}$.

b) $\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{3} = \frac{12}{13} \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{5}{13} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12 - 5\sqrt{3}}{26}$.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$$

c) Ta có

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{12}{5} + 1}{1 - \left(-\frac{12}{5}\right) \cdot 1} = -\frac{7}{17}$$

Suy ra

Bài 3. Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Giải

Ta có $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$ nên $2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha = -\frac{7}{25}$.

Suy ra $\cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$ và $\sin^2 \alpha = \frac{16}{25}$.

Mà $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha > 0$ và $\sin \alpha > 0$.

Do đó $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Suy ra $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

và $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{3}{4}$.

Bài 4. Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha) = \sin \alpha$;

b) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha$;

c) $\sin \alpha (2 \cos 4\alpha + 2 \cos 2\alpha + 1) = \sin 5\alpha$;

d) $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{1 + \tan \alpha \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$.

Giải

a)

$$\begin{aligned}
& \sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha) \\
&= (\sin 60^\circ \cos \alpha + \cos 60^\circ \sin \alpha) - (\sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha) \\
&= 2 \cos 60^\circ \sin \alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha = \sin \alpha
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\
&= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4\alpha) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha \\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
& \sin \alpha (2 \cos 4\alpha + 2 \cos 2\alpha + 1) \\
&= 2 \sin \alpha \cos 4\alpha + 2 \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin \alpha \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} [\sin(-3\alpha) + \sin 5\alpha] + 2 \cdot \frac{1}{2} [\sin(-\alpha) + \sin 3\alpha] + \sin \alpha \\
&= (-\sin 3\alpha + \sin 5\alpha) + (-\sin \alpha + \sin 3\alpha) + \sin \alpha = \sin 5\alpha
\end{aligned}$$

$$d) \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cos \beta (1 + \tan \alpha \tan \beta)}{\cos \alpha \cos \beta (1 - \tan \alpha \tan \beta)} = \frac{1 + \tan \alpha \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Bài 5. Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}$$

$$b) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)};$$

$$c) \frac{\sin^2 \alpha}{4 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Giải

$$a) \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \frac{\sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{\sin \alpha (1 + 2 \cos \alpha)}{\cos \alpha (1 + 2 \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha;$$

$$b) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{-2 \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{2\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{2\alpha}{2}} = -\frac{\sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha}{\cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha} = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{4 - 4\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(2\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}{4\left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{4\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{4\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

c)

C. BÀI TẬP

Câu 1. Không dùng máy tính cầm tay. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin \frac{19\pi}{24} \cos \frac{37\pi}{24}$

b) $\cos \frac{41\pi}{12} - \cos \frac{13\pi}{12}$

c) $\frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 + \tan \frac{6\pi}{7} \tan \frac{3\pi}{28}}.$

Lời giải

a) $\sin \frac{19\pi}{24} \cos \frac{37\pi}{24} = \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{19\pi}{24} - \frac{37\pi}{24} \right) + \sin \left(\frac{19\pi}{24} + \frac{37\pi}{24} \right) \right]$

$$= \frac{1}{2} \left[\sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + \sin \frac{7\pi}{3} \right] = \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$$

b) $\cos \frac{41\pi}{12} - \cos \frac{13\pi}{12} = -2\sin \frac{\frac{41\pi}{12} + \frac{13\pi}{12}}{2} \sin \frac{\frac{41\pi}{12} - \frac{13\pi}{12}}{2} = -2\sin \frac{9\pi}{4} \sin \frac{7\pi}{6}$

$$= 2\sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c)
$$\frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 + \tan \frac{6\pi}{7} \tan \frac{3\pi}{28}} = \frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 + \tan \left(\pi - \frac{\pi}{7} \right) \tan \frac{3\pi}{28}} = \frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 - \tan \frac{\pi}{7} \tan \frac{3\pi}{28}}$$

$$= \tan \left(\frac{\pi}{7} + \frac{3\pi}{28} \right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1.$$

Câu 2. Cho $\cos \alpha = \frac{11}{61}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right)$

$$\text{b) } \cot\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{c) } \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{d) } \tan\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right)$$

Lời giải

$$\text{a) Vì } -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \text{ nên } \sin \alpha < 0.$$

$$\text{Do đó, } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{11}{61}\right)^2} = -\frac{60}{61}.$$

Suy ra

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{6} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{6} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{61} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{60}{61}\right) = \frac{11 + 60\sqrt{3}}{122}.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{60}{61}}{\frac{11}{61}} = -\frac{60}{11}.$$

b) Ta có

$$\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}}{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \left(-\frac{60}{11}\right) \cdot 1}{\left(-\frac{60}{11}\right) + 1} = -\frac{71}{49}.$$

Do đó

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(\frac{11}{61}\right)^2 - 1 = -\frac{3479}{3721};$$

c) Ta có

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{60}{61}\right) \cdot \frac{11}{61} = -\frac{1320}{3721}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos 2\alpha \cos \frac{\pi}{3} - \sin 2\alpha \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{3479}{3721} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1320}{3721}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{-3479 + 1320\sqrt{3}}{7442}. \end{aligned}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-\frac{1320}{3721}}{-\frac{3479}{3721}} = \frac{1320}{3479}.$$

d) Ta có

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right) = \frac{\tan \frac{3\pi}{4} - \tan 2\alpha}{1 + \tan \frac{3\pi}{4} \tan 2\alpha} = \frac{-1 - \frac{1320}{3479}}{1 + (-1) \cdot \frac{1320}{3479}} = -\frac{4799}{2159}$$

Suy ra

Câu 3. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sin x \cos^5 x - \cos x \sin^5 x$

b) $\frac{\sin 3x \cos 2x + \sin x \cos 6x}{\sin 4x}$;

c) $\frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}$

d) $\frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} - \tan y$.

Lời giải

a) $\sin x \cos^5 x - \cos x \sin^5 x = \sin x \cos x (\cos^4 x - \sin^4 x)$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x (\cos^2 x - \sin^2 x) (\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

b) $\frac{\sin 3x \cos 2x + \sin x \cos 6x}{\sin 4x} = \frac{\frac{1}{2}(\sin x + \sin 5x) + \frac{1}{2}[\sin(-5x) + \sin 7x]}{\sin 4x}$

$$= \frac{\sin x + \sin 5x - \sin 5x + \sin 7x}{2 \sin 4x} = \frac{\sin x + \sin 7x}{2 \sin 4x}$$

$$= \frac{2 \sin 4x \cos 3x}{2 \sin 4x} = \cos 3x;$$

c) $\frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x} = \frac{(\cos x + \cos 3x) - \cos 2x}{(\sin x + \sin 3x) - \sin 2x} = \frac{2 \cos 2x \cos x - \cos 2x}{2 \sin 2x \cos x - \sin 2x}$

$$= \frac{\cos 2x(2 \cos x - 1)}{\sin 2x(2 \cos x - 1)} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cot 2x;$$

d) $\frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} - \tan y = \frac{2(\sin x \cos y + \cos x \sin y)}{2 \cos x \cos y} - \tan y$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} - \tan y = \tan x + \tan y - \tan y$$

$$= \tan x.$$

Câu 4. Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

$$a) 4 \cos x \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = \cos 3x$$

$$b) \frac{\sin 2x \cos x}{(1 + \cos x)(1 + \cos 2x)} = \tan \frac{x}{2};$$

$$c) \sin x(1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x) = \sin 7x;$$

$$d) \frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = 8 \cos 2x.$$

Lời giải

$$a) 4 \cos x \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = 2 \cos x \left(\cos 2x + \cos \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$= 2 \cos x \cos 2x + 2 \cos x \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$= \cos x + \cos 3x + 2 \cos x \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$= \cos x + \cos 3x - \cos x = \cos 3x$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2x \cos x}{(1 + \cos x)(1 + \cos 2x)} &= \frac{(2 \sin x \cos x) \cos x}{\left(1 + 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \right) (1 + 2 \cos^2 x - 1)} = \frac{2 \sin x \cos^2 x}{4 \cos^2 \frac{x}{2} \cos^2 x} \\ &= \frac{\sin x}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2} \end{aligned}$$

c)

$$\sin x(1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x)$$

$$= \sin x + 2 \sin x \cos 2x + 2 \sin x \cos 4x + 2 \sin x \cos 6x$$

$$= \sin x + [\sin(-x) + \sin 3x] + [\sin(-3x) + \sin 5x] + [\sin(-5x) + \sin 7x]$$

$$= \sin x + (-\sin x + \sin 3x) + (-\sin 3x + \sin 5x) + (-\sin 5x + \sin 7x) = \sin 7x$$

d)

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} &= \frac{\sin^2 3x \cos^2 x - \cos^2 3x \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{(\sin 3x \cos x)^2 - (\cos 3x \sin x)^2}{\sin^2 x \cos^2 x} \\ &= \frac{(\sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x)(\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x)}{\frac{1}{4} \sin^2 2x} \\ &= \frac{4 \sin 4x \sin 2x}{\sin^2 2x} = \frac{4(2 \sin 2x \cos 2x) \sin 2x}{\sin^2 2x} \\ &= \frac{8 \sin^2 2x \cos 2x}{\sin^2 2x} = 8 \cos 2x. \end{aligned}$$

Câu 5. Chứng minh rằng giá trị của các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của x .

a) $\sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$.

Lời giải

a) Ta có $\sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin^2 x + \frac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos \frac{2\pi}{3}\right) = \sin^2 x + \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2 x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Vậy giá trị của biểu thức $\sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

Không phụ thuộc vào giá trị của x

b) Ta có $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos \frac{7\pi}{12} + \cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\cos \frac{7\pi}{12} + \cos\left(2x + \frac{11\pi}{12}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{12} + \pi\right)\right] + \cos \frac{7\pi}{12}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{12}\right)\right] + \cos \frac{7\pi}{12} = \cos \frac{7\pi}{12}$$

Vậy giá trị của biểu thức $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ không phụ thuộc vào giá trị của x .

Câu 6. Cho tam giác ABC , chứng minh rằng:

a) $\cos A \cos B - \sin A \sin B + \cos C = 0$;

b) $\cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \cos \frac{A}{2}$.

Lời giải

Vì tổng số đo ba góc của một tam giác bằng 180° nên $A + B + C = 180^\circ$.

Suy ra $\frac{A+B+C}{2} = 90^\circ$, hay $\frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$.

a) $\cos A \cos B - \sin A \sin B + \cos C = \cos(A+B) + \cos C = \cos(180^\circ - C) + \cos C = -\cos C + \cos C = 0$.

b) $\cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = \sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = \cos \frac{A}{2}$.

Câu 7. Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Tìm m để $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$.

Lời giải

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \right) = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$$

Ta có

$$\text{Vì } -1 \leq \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \text{ nên } -\sqrt{2} \leq \sin \alpha + \cos \alpha \leq \sqrt{2}. \text{ Suy ra } -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Ta lại có } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + \sin 2\alpha.$$

$$\text{Suy ra } \sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1 = m^2 - 1.$$

$$\text{Khi đó, } \sin 2\alpha = -\frac{3}{4} \text{ hay } m^2 - 1 = -\frac{3}{4}, \text{ suy ra } m = \frac{1}{2} \text{ hoặc } m = -\frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{1}{2} \text{ hoặc } m = -\frac{1}{2}.$$

Câu 8. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{12}{13}$ và $0^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $\sin(\alpha + \beta)$ và $\cos(\alpha - \beta)$.

Lời giải

$$\text{Vì } 0^\circ < \alpha < 90^\circ \text{ nên } \cos \alpha > 0. \text{ Do đó, } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Vì } 0^\circ < \beta < 90^\circ \text{ nên } \sin \beta > 0. \text{ Do đó, } \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}.$$

$$\text{Khi đó, } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{56}{65};$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{63}{65}.$$

Câu 9. Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ$;

b) $\cos 68^\circ \cos 78^\circ + \cos 22^\circ \cos 12^\circ + \cos 190^\circ$.

Lời giải

a) Đặt $A = \sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ$. Ta có:

$$\begin{aligned}\cos 6^\circ \cdot A &= \cos 6^\circ \sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{2} \sin 12^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ \\ &= \frac{1}{4} \sin 24^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{8} \sin 48^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{16} \sin 96^\circ = \frac{1}{16} \cos 6^\circ\end{aligned}$$

Suy ra $A = \frac{1}{16}$.

b)

$$\begin{aligned}\cos 68^\circ \cos 78^\circ + \cos 22^\circ \cos 12^\circ + \cos 190^\circ &= \sin 22^\circ \sin 12^\circ + \cos 22^\circ \cos 12^\circ + \cos 10^\circ \\ &= \cos(22^\circ - 12^\circ) + \cos 10^\circ = 0\end{aligned}$$

Câu 10. Phương trình dao động điều hoà của một vật tại thời điểm t giây được cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó $x(t)(cm)$ là li độ của vật tại thời điểm t giây, A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình lần lượt là:

$$x_1(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) (cm) \text{ và } x_2(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right) (cm).$$

a) Xác định phương trình của dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

b) Tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp trên.

Lời giải

a) Ta có
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) + 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 3 \cdot 2 \cos \frac{\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)}{2} \cos \frac{\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)}{2}$$

$$= 6 \cos \frac{\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = 3\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{12}\right).$$

$$x(t) = 3\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{12}\right).$$

Vậy phương trình của dao động tổng hợp là

b) Dao động tổng hợp trên có biên độ là $A = 3\sqrt{2} cm$ và pha ban đầu là $\varphi = \frac{\pi}{12}$.