CHỦ ĐỀ 02: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

LÝ THUYẾT

❖ **Định nghĩa**

- Giả sử hàm số f xác định trên tập K và $x_0 \in K$. Ta nói:
- x_0 là **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.
- x_0 là **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị**.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là **cực trị**.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị của hàm số** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập hợp K.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị (hay cực trị)** của hàm số.
- Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị** hàm số f.

❖ **Quy tắc tìm cực trị**

➢ **Quy tắc 1:**

- **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm các điểm x_i $(i = 1;2;...)$ mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
- **Bước 3:** Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

➢ **Định lý**

- Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$. Khi đó:
- Nếu $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại x_0.
- Nếu $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_0.

Từ định lí trên, ta có một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số

➢ **Quy tắc 2:**

- **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm các nghiệm x_i $(i = 1;2;...)$ của phương trình $f'(x) = 0$.
- **Bước 3:** Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.

  Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i.

  Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=3$.

Chọn B

Ta có hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=x^2+2x-3$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

$y''=2x+2$; $y''(-3)=-4<0$; $y''(1)=4>0$.

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+3(7m-3)x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+3(7m-3)x$ (1) $\Rightarrow$ $y'=3x^2-6(m+1)x+3(7m-3)$.

Ta có: $y'=0 \Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+7m-3=0$ (2)

Hàm số đã cho không có cực trị

$\Leftrightarrow$ Phương trình $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta'_{(2)}\le 0 \Leftrightarrow (m+1)^2-1.(7m-3)\le 0 \Leftrightarrow m^2-5m+4\le 0 \Leftrightarrow 1\le m\le 4$.

Do m là số nguyên nên $m\in\{1;2;3;4\}$. Vậy tập S có 4 phần tử.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)(x-4)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Ta có $g(x)=f(3-x)\Rightarrow g'(x)=-f'(3-x)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có

$$g'(x)\geq 0\Leftrightarrow f'(3-x)\leq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3-x\leq -1\\1\leq 3-x\leq 4\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\geq 4\\-1\leq x\leq 2\end{array}\right..$$

Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-1 ‖ -1	↗	3	↘	2

Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Gọi đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là (C).

Đặt $g(x)=\left|f(x)\right|$ và gọi (C') là đồ thị của hàm số $y=g(x)$. Đồ thị (C') được suy ra từ đồ thị (C) như sau:

Giữ nguyên phần đồ thị của (C) phía trên Ox ta được phần I.

Với phần đồ thị của (C) phía dưới Ox ta lấy đối xứng qua Ox, ta được phần II.

Hợp của phần I và phần II ta được (C').

Từ cách suy ra đồ thị của (C') từ (C), kết hợp với bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)=\left|f(x)\right|$ như sau:

x	$-\infty$		a		-1		b		0		c		1		$+\infty$
$y=\left\|f(x)\right\|$	$+\infty$	↘	0	↗	2	↘	0	↗	1 ‖ 1	↘	0	↗	3	↘	2

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 5 điểm cực trị.

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y=\frac{x^5}{5}-(2m-1)x^4-\frac{m}{3}x^3+2019$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=x^4-4(2m-1)x^3-mx^2=x^2\left[x^2-4(2m-1)x-m\right]$.

Dễ thấy $x=0$ là một nghiệm của đạo hàm y'. Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ khi và chỉ khi y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm $x=0$. Ta thấy dấu của y' là dấu của hàm số $g(x)=x^2-4(2m-1)x-m$. Hàm số $g(x)$ đổi dấu khi đi qua giá trị $x=0$ khi $x=0$ là nghiệm của $g(x)$. Khi đó $g(0)=0\Leftrightarrow m=0$.

Thử lại, với $m=0$ thì $g(x)=x^2+4x$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua giá trị $x=0$.

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

VÍ DỤ 6. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất?

A. $m=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. **B.** $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=\frac{2\pm\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

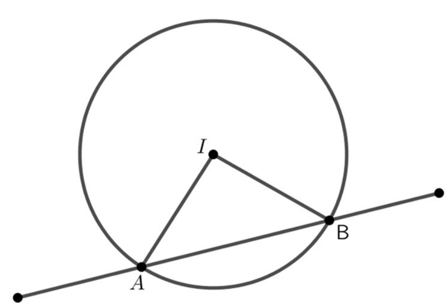
Chọn B

Ta có $y=x^3-3mx+2\Rightarrow y'=3x^2-3m$. Hàm số $y=x^3-3mx+2$ có 2 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ phương trình $y'=3x^2-3m=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$ (1)

Ta có: $y=\frac{1}{3}x.y'-2mx+2$.

Suy ra phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là $y=-2mx+2\Leftrightarrow 2mx+y-2=0$



Đường thẳng Δ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại hai điểm phân biệt A,B

$\Leftrightarrow d\left(I;\Delta\right)<R\Leftrightarrow \dfrac{\left|2m-1\right|}{\sqrt{4m^2+1}}<1 \Leftrightarrow \left|2m-1\right|<\sqrt{4m^2+1}\Leftrightarrow -4m<0$ luôn đúng do $m>0$

Ta có $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}.IA.\text{IB}.\sin\widehat{AIB}=\dfrac{1}{2}.\sin\widehat{AIB}\le\dfrac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $\sin\widehat{AIB}=1\Leftrightarrow\widehat{AIB}=90°$.

Khi đó tam giác IAB vuông cân tại I có $IA=1$ nên

$d\left(I;\Delta\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\dfrac{\left|2m-1\right|}{\sqrt{4m^2+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 4m^2-8m+1=0\Leftrightarrow m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ thỏa mãn đk (1)

Vậy diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$.

VÍ DỤ 7. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4+2\left(m-2\right)x^2+3m-2$ có ba điểm cực trị.

A. $m\in\left(2;+\infty\right)$. **B.** $m\in\left(-2;2\right)$. **C.** $m\in\left(-\infty;2\right)$. **D.** $m\in\left(0;2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=x^4+2\left(m-2\right)x^2+3m-2$; $y'=4x^3+4\left(m-2\right)x=4x\left(x^2+m-2\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=2-m\quad(1)\end{array}\right.$$

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $0\Leftrightarrow 2-m>0\Leftrightarrow m<2$.

VÍ DỤ 8. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2\left(x^2-4x\right)$.Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(2x^2-12x+m\right)$ có đúng 5 điểm cực trị ?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 19.

Lời giải.

Chọn B

Ta có : $f'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)^2\left(x^2-4x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=4\end{array}\right.$, trong đó $x=-1$ là nghiệm kép.

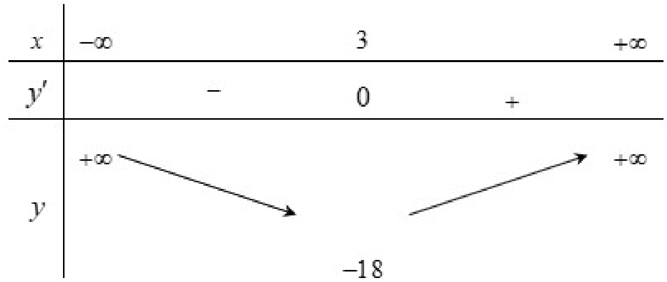
$g(x)=f\left(2x^2-12x+m\right)\Rightarrow g'\left(x\right)=\left(4x-12\right)f'\left(2x^2-12x+m\right)$

Xét $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(4x-12\right)f'\left(2x^2-12x+m\right)=0$ (*)

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\2x^2-12x+m=-1\\2x^2-12x+m=0\\2x^2-12x+m=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\2x^2-12x+m=-1\,(l)\\2x^2-12x=-m\quad(1)\\2x^2-12x=4-m\quad(2)\end{array}\right.$$

(Điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)$ là nghiệm bội lẻ của phương trình (*) nên ta loại phương trình $2x^2-12x+m=-1$ *).* Xét hàm số $y=2x^2-12x$ có đồ thị (C) có $y'=4x-12$

Ta có bảng biến thiên



Để $g\left(x\right)$ có đúng 5 điểm cực trị thì mỗi phương trình $\left(1\right);\left(2\right)$ đều có hai nghiệm phân biệt $\neq 3$

Do đó, mỗi đường thẳng $y = 4 - m$ và $y = -m$ phải cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ khác 3. Nhận xét: đường thẳng $y = 4 - m$ luôn nằm trên đường thẳng $y = -m$.

Ta có: $-18 < -m \Leftrightarrow m < 18$. Vậy có 17 giá trị m nguyên dương .

VÍ DỤ 9. Cho hàm số $y = f\left(x\right) = \dfrac{1}{3}x^3 - \left(2m-1\right)x^2 + \left(8-m\right)x + 2$ với $m \in \mathbb{R}$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = f\left(\left|x\right|\right)$ có 5 cực trị là khoảng $\left(a;b\right)$. Tích $a.b$ bằng

A. 12. **B.** 16. **C.** 10. **D.** 14.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = x^2 - 2\left(2m-1\right)x + 8 - m$.

Vì $f\left(\left|x\right|\right)$ là hàm chẵn $\left(\text{do } f\left(\left|-x\right|\right) = f\left(\left|x\right|\right)\right)$, nên đồ thị hàm $f\left(\left|x\right|\right)$ đối xứng qua trục Oy . Do đó, khi hàm $f\left(x\right)$ có hai cực trị dương thì hàm $f\left(\left|x\right|\right)$ sẽ có thêm hai cực trị đối xứng qua trục Oy và một cực trị còn lại chính là giao điểm của đồ thị hàm $f\left(\left|x\right|\right)$ và trục Oy .

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

Điều kiện tương đương là $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2m-1\right)^2 - \left(8-m\right) > 0 \\ 2m - 1 > 0 \\ 8 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 3m - 7 > 0 \\ m > \dfrac{1}{2} \\ m < 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \vee m > \dfrac{7}{4} \\ m > \dfrac{1}{2} \\ m < 8 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(\dfrac{7}{4};8\right)$. Vậy $a = \dfrac{7}{4}$, $b = 8$ và $a.b = 14$.