В.Д. ЧИСТЯКОВ

NHỮNG BÀI TOÁN CỔ

В.Д. ЧИСТЯКОВ

NHỮNG BÀI TOÁN CỔ

★

NGƯỜI DỊCH : TRẦN LƯU CƯƠNG
TRẦN LƯU THỊNH

- BABILON
- AI CẬP
- HI LẠP
- TRUNG HOA
- ẤN ĐỘ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - 1995

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Giám đốc : TRẦN TRÂM PHƯƠNG
Tổng biên tập : NGUYỄN KHẮC PHI
Trưởng chi nhánh NXB Giáo dục tại thành phố Hồ Chí Minh
NGUYỄN KHƯƠNG ĐẮC

Biên soạn : **В.Д. ЧИСТЯКОВ**
Người dịch : TRẦN LƯU CƯỜNG
TRẦN LƯU THỊNH
Biên tập : ĐẶNG THỊ BÌNH
Trình bày bìa : HOÀNG PHƯƠNG LIÊN
Sửa bản in : NGỌC PHƯƠNG

Dịch từ nguyên bản tiếng Nga

Старинные задачи по элементарной математике Изд. 3-е, испр. Мн., «Вышэйш. школа», 1978.

272 с. с ил.

Những bài toán cổ **Чистяков В. Д.** Người dịch : Trần Lưu Cường, Trần Lưu Thịnh. – H.: Giáo dục, 1995. – 84 tr.; 20,5cm

MS : 8H182m5 51(083)

PHẦN I

CÁC BÀI TOÁN

NHỮNG BÀI TOÁN CỔ BABILON

1. Thời xa xưa, người Babilon coi chu vi đường tròn là chu vi của lục giác đều nội tiếp đường tròn đó. Hãy tính giá trị gần đúng của số π theo cách này của người Babilon.

2. Hãy chia một góc vuông ra 3 phần bằng nhau.

3. Để tính diện tích một tứ giác, người Babilon lấy nửa tổng các cặp cạnh đối diện nhân với nhau. Bạn hãy cho biết công thức này xác định đúng diện tích của những tứ giác nào ?

Còn để tính diện tích của một tam giác cân, người Babilon đôi lúc lấy tích của cạnh bên với nửa cạnh đáy. Hãy chỉ rõ với giả thiết nào thì công thức tính diện tích tam giác cân là trường hợp đặc biệt của công thức tính diện tích tứ giác nêu trên ?

NHỮNG BÀI TOÁN CỔ AI CẬP

NHỮNG BÀI TOÁN TỪ PAPIRUT [1] RAINDA

4. Hãy tìm một số biết rằng nếu thêm vào số đó $\frac{2}{3}$ của nó rồi trừ đi $\frac{1}{3}$ tổng vừa nhận được thì ta được 10.

---

(1) Papirut (di thảo, di bản) : văn bản ghi trên gỗ ngày xưa còn để lại.

5. Bảy gia đình nuôi 7 con mèo, mỗi con mèo ăn thịt 7 con chuột, còn mỗi con chuột ăn 7 cây lúa, mỗi cây lúa có thể cho được 7 hạt. Những số hạng của dãy số này lớn đến đâu và tổng của chúng bằng bao nhiêu ?

6. Người Ai Cập xa xưa tính diện tích hình tròn bằng cách lấy diện tích hình vuông có cạnh bằng $\frac{8}{9}$ đường kính của hình tròn. Hãy xác định giá trị gần đúng của số π theo cách này.

7. Để tính diện tích tam giác cân, người Ai Cập lấy nửa đáy nhân với chiều dài cạnh bên. Hãy tính sai số theo tỉ lệ phần trăm nếu đáy của tam giác cân bằng 4, còn cạnh bên bằng 10.

8. Để tính diện tích hình thang cân, người Ai Cập lấy nửa tổng đáy trên và đáy dưới rồi nhân với cạnh bên. Hãy tính sai số theo tỉ lệ phần trăm nếu đáy trên bằng 4, đáy dưới bằng 6, còn cạnh bên bằng 20.

NHỮNG BÀI TOÁN TỪ PAPIRUT MOSKVA.

9. Tính thể tích của hình chóp cụt tứ giác đều nếu chiều cao bằng 6, cạnh đáy dưới bằng 4, còn cạnh đáy trên bằng 2.

10. Hãy xác định độ dài các cạnh của một hình chữ nhật cho biết tỉ số giữa các cạnh và diện tích của hình chữ nhật đó.

NHỮNG BÀI TOÁN TỪ PAPIRUT AKHMINSKI

11. Một người lấy đi $\frac{1}{13}$ báu vật trong kho, một người khác lấy đi $\frac{1}{17}$ báu vật còn lại và như vậy kho báu còn lại 150 báu vật. Hỏi lúc đầu kho báu có bao nhiêu báu vật ?

NHỮNG BÀI TOÁN CỔ HI LẠP

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA PITAGO (PYTHAGORE)

12. Chứng minh rằng diện tích hình vuông dựng trên cạnh huyền của một tam giác vuông bằng tổng diện tích các hình vuông dựng trên các cạnh góc vuông của tam giác này.

13. Hãy tìm các số Pitago, tức là tìm tất cả các bộ ba các số nguyên x, y, z sao cho thỏa mãn phương trình $x^2 + y^2 = z^2$.

14. Chứng tỏ rằng tổng của n số lẻ liên tiếp, bắt đầu từ số 1 bằng n bình phương.

15. Chứng tỏ rằng, mọi số lẻ bất kì, trừ số 1, là hiệu của hai bình phương.

Trong trường phái Pitago, khẳng định này được chứng minh bằng hình học đối với một số trường hợp riêng. Hãy thử xem bằng cách nào ?

Hãy khẳng định tính đúng đắn của mệnh đề trên mà không cần tới sự minh họa bằng hình học.

BÀI TOÁN CỦA HIPPOCRATE

16. Chứng minh rằng tổng diện tích các hình lưỡi liềm (hình bán nguyệt Hippocrate) nằm giữa nửa đường tròn với đường kính là cạnh huyền của tam giác vuông và các nửa đường tròn dựng trên các cạnh góc vuông của tam giác vuông ấy đúng bằng diện tích của tam giác vuông ấy.

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA ƠCLIT *(Trích từ cuốn "Nguyên lí")*

17. Hãy dựng một tam giác đều trên đoạn thẳng AB cho trước.

18. Hãy chia góc cho trước ra hai phần bằng nhau.

19. Hãy dựng một hình bình hành có cạnh bên nghiêng với đáy một góc cho trước sao cho diện tích của nó bằng diện tích của một tam giác cho trước.

20. Trong một hình tròn cho trước, hãy dựng một tam giác nội tiếp đồng dạng với một tam giác cho trước.

21. Chia một đoạn thẳng cho trước thành hai phần sao cho diện tích hình chữ nhật có hai cạnh là đoạn thẳng ấy và đoạn nhỏ vừa chia đúng bằng diện tích hình vuông có cạnh bằng đoạn thẳng lớn. (Bài toán điểm chia vàng).

22. Chứng minh rằng tập hợp các số nguyên tố là vô hạn.

BÀI TOÁN APOLLONIUS

23. Dựng đường tròn tiếp xúc với ba đường tròn cho trước.

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA ACSIMET (Archimède)

24. Chứng minh rằng hình tròn ngoại tiếp hình vuông có diện tích gấp đôi hình tròn nội tiếp hình vuông ấy.

25. Acsimet đã chứng minh rằng :

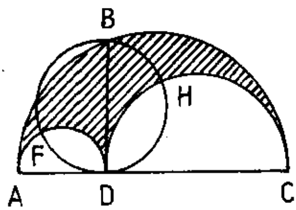
1) Diện tích mỗi hình tròn sẽ bằng diện tích của một tam giác vuông có một cạnh góc vuông bằng bán kính hình tròn, còn cạnh góc vuông kia bằng độ dài đường tròn.

2) Diện tích hình tròn tỉ lệ với bình phương đường kính theo tỉ số $\frac{11}{14}$.

Hãy chứng tỏ rằng cả hai mệnh đề của ACSIMET tương đương với quy tắc tính diện tích hình tròn hiện nay là $\frac{22}{7} r^2$

26. Từ điểm B trên nửa đường tròn $\overset{\frown}{ABC}$, hạ đường vuông góc BD xuống đường AC, trên các đoạn AD và DC dựng các nửa đường tròn $\overset{\frown}{AFD}$ và $\overset{\frown}{DHC}$ với đường kính là các đoạn thẳng tương ứng đó (hình 1).

Chứng minh rằng diện tích hình AFDHCBA (hình gạch chéo) bằng diện tích hình tròn đường kính BD.



Hình 1

27. Diện tích của chỏm cầu bằng diện tích hình tròn có bán kính là đoạn thẳng nối từ đỉnh chỏm cầu tới đường tròn đáy của chỏm cầu.

28. Hãy tìm một hình cầu có thể tích bằng thể tích một hình nón hay một hình trụ cho trước.

29. Chứng tỏ rằng hình trụ có đáy là đường tròn lớn của một hình cầu và chiều cao bằng đường kính hình cầu đó có thể tích bằng $\frac{3}{2}$ thể tích hình cầu và diện tích xung quanh bằng $\frac{3}{2}$ diện tích mặt cầu.

30. Tìm tổng của cấp số nhân lùi vô hạn sau :

Số bò cái màu trắng
bằng phần ba của xám
(cả xám đực và cái)
cộng với một phần tư
tất cả lũ bò xám.
Nhưng riêng bò cái xám
bao gồm một phần tư
của lũ bò lông đốm
cộng thêm một phần năm
đốm đực cái cộng lại.
Tổng số bò cái đốm
bằng phần năm bò nâu
(cả nâu đực, nâu cái)
cộng thêm một phần sáu
của cả đực cái nâu.
Cuối cùng, số cái nâu
bằng phần sáu bò trắng
cộng với một phần bảy
của tất cả bò trắng.

*

* *

Ấy vậy mà chưa đủ
Bò đực trắng, đực xám
Khi xếp hàng đều nhau
Thì có hình vuông đấy !
Còn đực nâu, đực đốm
Xếp dần theo bậc thang
Bắt đầu từ một chú
Thì có hình tam giác.
Bạn ơi, nào... nghĩ xem ?

NHỮNG BÀI TOÁN HÌNH HỌC CỔ NỔI TIẾNG

Bài toán gấp đôi hình lập phương

35. Hãy dựng một hình lập phương sao cho thể tích của nó gấp đôi thể tích của một hình lập phương cho trước. Hãy thực hiện phép dựng nhờ thước đặc biệt "lồng ghép" (xem chỉ dẫn).

Bài toán chia ba một góc

36. Hãy chia một góc bất kì thành ba phần bằng nhau. Hãy thực hiện việc dựng hình bằng phương pháp của Acsimet - dùng compa và thước chuyển dịch có hai điểm đánh dấu (xem chỉ dẫn).

Bài toán cầu phương hình tròn

37. Hãy dựng một hình vuông có diện tích bằng diện tích hình tròn cho trước. Hãy giải bài toán một cách gần đúng nhờ tam giác Bing (xem chỉ dẫn).

BÀI TOÁN GIPXIKL *(ở xứ Alexandrie)*

38. Chứng minh rằng trong một cấp số cộng có số số hạng chẵn thì hiệu của tổng nửa cuối của các số hạng và tổng nửa đầu của các số hạng là một số tỉ lệ thuận với bình phương của nửa số số hạng của dãy số.

Bài toán Hêrông (HÉRON)

39. Xác định diện tích tam giác biết ba cạnh của nó lần lượt là $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

40. Hãy tìm những tam giác có diện tích nguyên dương (được gọi là tam giác Hêrông) mà độ dài các cạnh của nó là những số nguyên liên tiếp.

Bài toán NIKOMAKH

41. Chứng tỏ rằng nếu chia dãy số lẻ thành các nhóm với số số hạng của mỗi nhóm tăng dần theo dãy số tự nhiên thì tổng của mỗi nhóm đúng bằng lập phương của số số hạng của nhóm.

Bài toán PTOLÉMÉE

42. Chứng tỏ rằng trong một tứ giác nội tiếp đường tròn, tổng các tích của các cạnh đối bằng tích hai đường chéo.

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA DIOPHANTE

(Từ luận đề "Số học")

43. Tìm ba số sao cho số lớn nhất hơn số lớn thứ hai đúng bằng $\frac{1}{3}$ số bé nhất, số lớn thứ hai hơn số bé nhất đúng bằng $\frac{1}{3}$ số lớn nhất và số bé nhất hơn $\frac{1}{3}$ số lớn thứ hai đúng bằng 10.

44. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 68 \end{cases}$$

45. Cạnh góc vuông của tam giác vuông có số đo là lập phương của một số x nào đó, cạnh góc vuông kia là hiệu của số lập phương này với số x đó, còn cạnh huyền bằng tổng của số lập phương này với số x đó. Hãy tìm các cạnh của tam giác vuông.

46. Hãy chia số 100 ra 2 phần bằng 2 lần chia sao cho phần lớn ở lần chia thứ nhất gấp đôi phần nhỏ ở lần chia thứ hai và phần lớn ở lần chia thứ 2 gấp 3 lần phần nhỏ ở lần chia thứ nhất.

47. Tìm hai số sao cho tổng của nó bằng 20 còn tích của nó là 96.

48. Tìm hai số biết rằng tỉ số của chúng bằng 3 và tỉ số giữa tổng bình phương và tổng của chúng bằng 5.

49. Tìm ba số biết rằng tích của tổng của hai số đầu tiên với số thứ ba bằng 35, còn tích của tổng của số thứ nhất và số thứ ba với số thứ hai là 27 và tích của tổng của số thứ hai và số thứ ba với số đầu tiên là 32.

50. Tìm hai số biết rằng tích của chúng đem cộng với mỗi số là lập phương của một số nào đó.

51. Tìm ba số sao cho tổng của cả ba số lẫn tổng của từng cặp đều là những số chính phương.

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA PAPPUS Ở XỨ ALEXANDRIE

(Từ tác phẩm "Tuyển tập toán học")

52. Hãy dựng một đường thẳng đi qua một điểm D cho trước nằm trên phân giác của một góc sao cho đoạn thẳng bị chắn bởi hai cạnh của góc bằng một đoạn cho trước.

53. Chứng minh rằng trong các hình tròn thì diện tích của các viên phân đồng dạng tỉ lệ với bình phương của dây cung đáy.

54. Chứng minh rằng trong mỗi tam giác thì diện tích của hình bình hành có cạnh là cạnh của tam giác với hai đỉnh nằm ngoài tam giác thì bằng tổng diện tích của hai hình bình hành lấy hai cạnh kia làm cạnh sao cho các cạnh song song với cạnh của tam giác đi qua hai đỉnh của hình bình hành ban đầu.

NHỮNG BÀI TOÁN TỪ "TUYỂN TẬP HI LẠP".

55. Có một người hỏi Pitago có bao nhiêu học trò, Pitago trả lời : "Một nửa số học trò của tôi học toán, một phần tư học nhạc, một phần bảy đăm chiêu, ngoài ra có ba cô gái". Hỏi số học trò của Pitago là bao nhiêu ?

56. Khi thấy Erôt (Éros) khóc, Kiprit (Cypris) hỏi tại sao, Erôt trả lời : Em có lấy một số trái táo ở vườn Hêlicôn (Hélicon), ngay sau đó bị Eptêpa lấy mất 1 phần 12, Kliô lấy mất 1 phần 5, Talia lấy mất 1 phần 8, Menpomena lấy mất 1 phần 20, lại còn bị Terpcikhopa lấy mất 1 phần 4, Eratô lấy mất 1 phần 7, Pôlimnhia lấy 30 trái, Uranhi lấy 120 trái, Kanniopa lấy của em 300 trái, vì vậy hiện giờ em chỉ còn có 5 chục trái thôi.

Hỏi Erôt đã hái bao nhiêu trái táo ?

57. Ba cô gái có cùng một số trái cây, gặp 9 chàng trai. Họ tặng cho mỗi chàng trai cùng một số trái cây. Sau đó thì mỗi chàng trai và mỗi cô gái có cùng một số trái cây. Hỏi mỗi cô gái lúc đầu có bao nhiêu trái cây ?

58. Chuyện kể rằng Polyphème được đúc thành một tượng đồng khổng lồ một mắt. Sau đó cho nước chảy ra qua ống tay, qua mắt và qua miệng của tượng khổng lồ một mắt đó. Biết rằng vòi nước chảy ra từ ống tay sau 3 ngày thì đầy bể nước, vòi nước chảy ra từ mắt sau 2 ngày thì đầy bể nước, còn vòi nước chảy ra từ miệng thì chỉ sau $\frac{2}{5}$ ngày là đầy bể nước. Hỏi cả 3 vòi nước cùng chảy một lúc thì bao lâu đầy bể nước ?

59. Hai con vật La và Lừa chở nặng đi bên nhau. Lừa kêu ca vì phải mang nặng. La thấy vậy bèn nói : "Cậu kêu ca nỗi gì, nếu tớ mang hộ cậu một bao thì hàng của tớ nặng gấp đôi của cậu đấy. Còn nếu cậu mang hộ tớ một bao thì hai đứa mình mới mang nặng bằng nhau".

Hỏi mỗi con lừa và la chở nặng bao nhiêu ?

60. Một người hỏi thần thời gian Khronos rằng : Bao nhiêu giờ của một ngày đã trôi qua rồi ? Thần trả lời rằng : Bây giờ chỉ còn lại 2 lần $\frac{2}{3}$ của số giờ đã trôi qua. Vậy bao nhiêu giờ đã trôi qua, biết rằng người Hi Lạp cổ tính một ngày chỉ có 12 giờ ?

BÀI TOÁN CỦA MÊTRÔ ĐO (ĐOÁN TUỔI)

61. Diophante là nhà toán học cổ Hi Lạp. Ông sinh năm 325, chết năm 410 trước công nguyên. Trên mộ ông, người ta khắc một tấm bia đá ghi tóm tắt cuộc đời ông như sau :

"Hỡi người qua đường nơi đây nhà toán học Diophante yên nghỉ. Những con số sau cho biết cuộc đời ông :

- một phần sáu cuộc đời là thời niên thiếu
- một phần 12 nữa trôi qua, râu trên cằm đã mọc
- Diophante lấy vợ, một phần bảy cuộc đời trong cảnh hiếm hoi
- năm năm trôi qua : ông sung sướng sinh con trai đầu lòng
- nhưng cậu con trai chỉ sống được một nửa cuộc đời của cha
- cuối cùng với nỗi buồn thương sâu sắc, ông cam chịu số phận sống thêm 4 năm nữa sau khi con ông lìa đời".

Bạn thử tính xem, Diophante thọ bao nhiêu tuổi ?

NHỮNG BÀI TOÁN CỔ TRUNG HOA

NHỮNG BÀI TOÁN TỪ CUỐN "CỬU CHƯƠNG THUẬT TOÁN".

62. 5 con bò và 2 con cừu giá 11 lượng, còn hai con bò và 8 con cừu giá 8 lượng. Hỏi mỗi con giá bao nhiêu ?

63. Ba thùng thóc đầy như nhau trong kho bị 3 tên trộm lấy. Sau đó, người ta thấy rằng thùng thứ nhất còn lại 1 lượng thóc, thùng thứ 2 còn 1 cân 4 lượng thóc, thùng thứ 3 còn 1 lượng thóc. Bọn trộm bị bắt khai rằng, tên thứ nhất dùng xẻng xúc thóc từ thùng thứ nhất, tên thứ hai dùng đấu gỗ xúc thóc từ thùng thứ hai, còn tên thứ ba dùng bát xúc thóc từ thùng thứ ba. Mỗi xẻng xúc được 1 cân 9 lượng, đấu gỗ xúc được 1 cân 7 lượng, còn bát xúc được 1 cân 2 lượng.

Hãy tính xem mỗi tên trộm lấy bao nhiêu thóc, biết rằng 10 lượng bằng 1 cân, 10 cân bằng 1 yến, 10 yến bằng 1 tạ.

NHỮNG BÀI TOÁN TỪ "NHẬP MÔN THUẬT TOÁN".

64. Hãy xác định các cạnh của tam giác vuông biết diện tích và chu vi của nó.

BÀI TOÁN ĐỒNG DƯ

65. Tìm một số biết rằng nếu chia số đó cho 3 thì dư 2, chia cho 5 dư 3, chia cho 7 dư 2.

NHỮNG BÀI TOÁN TỪ TÁC PHẨM "TOÁN HỌC TRONG CHÍN CUỐN"

66. Một vựa thóc có chiều rộng 3 trượng, chiều dài 4 trượng. Khi vựa chứa đầy thì được 10.000 bách. Hỏi chiều cao vựa là bao nhiêu ? (Biết rằng 1 bách = 51,775 lít ; 1 trượng = 3,2 mét).

67. Một cây tre có 9 đốt. Thể tích của 3 đốt dưới là 4 bát, của 4 đốt trên cùng là 3 bát. Hỏi thể tích của mỗi đốt ở giữa là bao nhiêu, biết rằng thể tích mỗi đốt khác đốt bên cạnh một lượng bằng nhau.

68. Khối lượng của một đống vàng có 9 *thỏi* và một đống bạc có 11 thỏi là bằng nhau, nếu chuyển 1 thỏi vàng sang đống bạc và 1 thỏi bạc sang đống vàng thì đống vàng nhẹ đi 13 lượng. Hỏi khối lượng mỗi thỏi vàng, mỗi thỏi bạc là bao nhiêu ?

69. Hai con ngựa cùng chạy từ A đến B, cách nhau 3000 dặm. Ngày đầu ngựa thứ nhất chạy được 193 dặm và mỗi ngày tiếp sau chạy thêm được 13 dặm nữa. Ngựa thứ hai, ngày đầu chạy được 97 dặm, nhưng ngày sau chạy chậm lại nửa dặm. Ngựa thứ nhất đến B rồi quay trở lại A, gặp ngựa thứ hai ở giữa đường. Hỏi sau bao ngày thì chúng gặp nhau và khi đó mỗi con đã chạy được bao nhiêu dặm ?

70. 5 con trâu và 2 con cừu giá 10 lượng vàng ; 2 con trâu và 5 con cừu giá 8 lượng vàng. Hỏi mỗi con giá bao nhiêu ?

71. Từ 3 bó lúa năng suất cao, 2 bó lúa năng suất trung bình và 1 bó lúa năng suất thấp thu được 39 hộc thóc. Từ 2 bó lúa năng suất cao, 3 bó lúa năng suất trung bình và 1 bó lúa năng suất thấp thu được 34 hộc thóc, còn 1 bó lúa năng suất cao, 2 bó năng suất trung bình và 3 bó lúa năng suất thấp thu được 26 hộc thóc. Hỏi mỗi bó lúa của mỗi loại thu được bao nhiêu hộc thóc ?

72. Hai bó lúa năng suất cao, 3 bó năng suất trung bình và 4 bó năng suất thấp đều thu được chưa đầy 1 hộc thóc. Để được đủ 1 hộc thóc thì cần thêm vào ở hai bó lúa năng suất cao 1 bó lúa năng suất trung bình ; thêm vào ở 3 bó lúa năng suất trung bình 1 bó lúa năng suất thấp và thêm vào ở 4 bó lúa năng suất thấp 1 bó lúa năng suất cao. Hỏi mỗi bó của mỗi loại thu được bao nhiêu ?

73. Hai bó lúa loại A, 3 bó loại B và 4 bó loại C đều thu được hơn 1 yến thóc. Số thóc thu được từ 2 bó loại A hơn 1 yến đúng bằng số thóc thu được từ 1 bó loại B ; số thóc thu được từ 3 bó loại B nhiều hơn 1 tạ đúng bằng số thóc thu được từ 1 bó loại C và số thóc thu được từ 4 bó loại C nhiều hơn 1 tạ đúng bằng số thóc thu được từ 1 bó loại A. Hỏi mỗi bó của mỗi loại A, B, C thu được bao nhiêu ?

74. Người ta bán 2 con trâu, 5 con cừu để mua 13 con lợn thì còn thừa 1000 "đồng". Đem bán 3 con trâu, 3 con lợn rồi mua 9 con cừu thì vừa đủ ; còn nếu bán 8 con cừu, 8 con lợn để mua 5 con trâu thì thiếu 600 "đồng".

Hỏi mỗi con trâu, cừu, lợn giá bao nhiêu ?

75. 5 nhà dùng chung 1 giếng nước. Để gàu múc chạm đến được mặt nước thì với 2 dây thừng của nhà A thiếu đúng bằng 1 dây thừng của nhà B, với 3 dây thừng của nhà B thiếu đúng 1 dây của nhà C, 4 dây thừng của nhà C thiếu đúng 1 dây của nhà D, với 5 dây của nhà D thì cần thêm 1 dây của nhà E, còn với 6 dây của nhà E thì thiếu 1 dây của nhà A nữa.

Hỏi giếng sâu bao nhiêu và độ dài của mỗi loại dây thừng ?

76. Một bể nước có cạnh 1 trượng. Giữa bể có mọc 1 cây sậy nhô cao $\frac{1}{10}$ trượng. Nếu kéo cây sậy vào bờ thì ngọn cây vừa chạm bờ. Hỏi bể nước sâu bao nhiêu và cây sậy cao bao nhiêu ?

77. Hai người đi bộ A và B cùng xuất phát từ một điểm, biết vận tốc của A là 7 còn của B là 3. B đi về hướng đông ; còn A đi về phía nam, sau khi được 10 dặm thì đổi hướng chéo (đông - bắc) và gặp B. Hỏi mỗi người A và B đi được bao nhiêu dặm đường ?

78. Một cánh cửa có chiều cao hơn chiều rộng 6 tấc 8 phân, đường chéo của cửa sổ dài đúng 1 trượng. Hỏi kích thước của cửa sổ ?

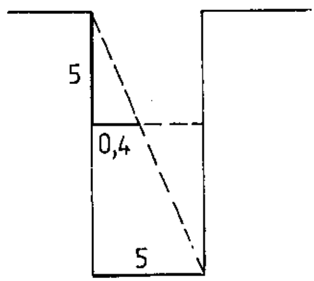
(*Lưu ý :* 10 phân = 1 tấc ; 1 phân = 32mm ; 1 trượng = 3,2 met)

79. Một tòa thánh hình vuông, chưa biết độ dài cạnh. Tại trung điểm mỗi cạnh là cửa thành. Cách cửa Bắc 20 bộ có 1 cột cờ. Nếu đi dọc từ cửa phía Nam 14 bộ rồi chuyển sang hướng tây, đi thêm 1775 bộ nữa thì có thể nhìn thấy cột cờ. Hỏi cạnh của tòa thánh dài bao nhiêu bộ ?

80. Đường kính của một cái giếng là 5 tấc, chiều sâu chưa rõ. Từ miệng giếng đặt một cây sào 5 tấc áp sát thành giếng thì đầu kia chạm mặt nước. Từ đỉnh sào nhìn chiếu thẳng xuống đáy giếng theo mặt kính (theo đường chấm chấm trên hình 2) thì điểm "chạm" mặt nước cách thành giếng 4 phân. Hỏi giếng sâu bao nhiêu ? (1 tấc = 10 phân).

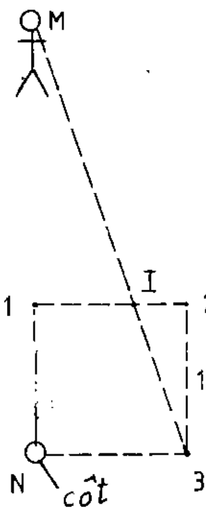
81. Hãy tính thể tích một hình nón biết rằng chu vi đáy là 3 trượng 5 tấc, chiều cao là 5 trượng 1 tấc.

82. Tính thể tích hình nón cụt có chu vi đáy dưới là 3 trượng, chu vi đáy trên là 2 trượng và chiều cao bằng 1 trượng.



Hình 2

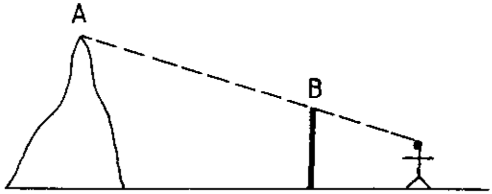
83. Hãy tính cạnh của một hình vuông nội tiếp trong một tam giác vuông với hai cạnh góc vuông có số đo là 12 bộ và 5 bộ (1 bộ = 1,6 met).



Hình 3

84. Để tính khoảng cách đến một cái cột ở xa người ta làm như sau : trồng thêm 3 cột nữa, mỗi cột cách nhau 1 trượng sao cho cùng với cột có sẵn tạo thành một hình vuông nằm về phía bên trái người quan sát (hình 3). Biết rằng khoảng cách từ cột thứ hai đến điểm I là 3 tấc. Từ đó sẽ tìm ra được khoảng cách từ M đến N. Giải thích tại sao ?

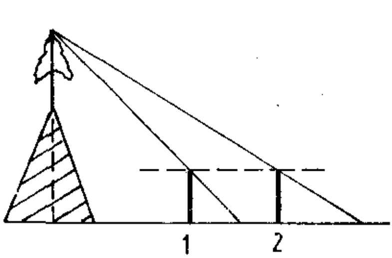
85. Đỉnh núi (A) ở phía tây của cây cột (B) (hình 4). Cột cao 9 trượng 5 tấc và cách núi về phía tây 53 dặm. Một người đứng cách cột 3 dặm về phía đông nhìn thấy đỉnh cột và đỉnh núi trùng nhau. Biết mức nhìn của người đó ở chiều cao 7 tấc, hỏi núi cao bao nhiêu ?



Hình 4

BÀI TOÁN CỦA LƯU HOA (LIUHUE)

86. Để xác định chiều cao của một cây thông mọc trên đỉnh đồi, người ta làm như sau : Đặt hai cây sào mỗi cây dài 20 trượng trên cánh đồng cách nhau 50 trượng, sao cho hai cây sào ấy và cây thông thẳng hàng. Đứng cách sào thứ nhất 7 trượng 4 thước thì thấy ngọn sào thứ nhất và đỉnh cây thông trùng nhau. Đứng cách sào thứ hai 8 trượng 5 thước cũng thấy ngọn sào thứ hai và đỉnh cây thông trùng nhau (hình 5).



Hình 5

Từ đó tính ra được chiều cao của cây thông và khoảng cách từ cây sào thứ nhất đến ngọn đồi ? Tại sao ?

NHỮNG BÀI TOÁN CỔ ẤN ĐỘ

NHỮNG BÀI TOÁN TỪ BẢN THẢO BAKHOSALI

87. Có 4 người đi chùa cúng lễ. Người thứ hai cúng lễ gấp đôi người đầu tiên, người thứ ba cúng lễ gấp 3 lần người thứ hai, còn người thứ tư lại cúng lễ gấp 4 lần người thứ ba. Biết rằng cả bốn người cúng 123 nén vàng. Hỏi người thứ nhất cúng lễ bao nhiêu ?

88. Hãy tìm một số sao cho nếu thêm vào 5 hay bớt đi 11 thì đều được số chính phương.

BÀI TOÁN CỦA SRITĐƠKHARA

89. Một phần năm đàn ong đậu trên hoa TÁO, một phần ba đậu trên hoa CÚC, số ong đậu trên hoa HỒNG bằng hiệu của số ong đậu trên hoa TÁO và hoa CÚC ; còn lại 1 con ong đậu trên hoa MAI. Hỏi đàn ong có bao nhiêu con ?

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA ARIAPKHATA

90. Hai thiên thạch cách nhau một khoảng d cùng bay lại phía nhau với vận tốc V_1 và V_2. Hãy tính điểm chúng gặp nhau.

91. Hãy tính tổng các số hạng của dãy số tam giác (chú thích : dãy số tam giác là dãy số mà số hạng tổng quát của nó có dạng $\frac{n(n+1)}{2}$).

92. Hai người có một số vốn như nhau bao gồm một số đồ vật có giá trị bằng nhau và một số tiền nào đó, nhưng biết rằng số lượng đồ vật của hai người khác nhau. Hỏi mỗi đồ vật có giá trị bao nhiêu ?

93. Để tính diện tích hình tròn, người Ấn Độ cổ đưa ra một quy tắc : chia đường kính hình tròn thành 15 phần bằng nhau, lấy 13 phần của nó làm cạnh một hình vuông thì diện tích của hình tròn sẽ bằng (xấp xỉ) diện tích của hình vuông. Hãy xác định gần đúng số π trong trường hợp này và đánh giá sai số đến một phần nghìn.

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA BRAMAGUPTA.

94. Xác định chiều cao của ngọn Bạch Lạp biết độ dài của bóng của một cây gậy đặt ở hai vị trí khác nhau (thẳng hàng với cây đèn) và biết khoảng cách giữa hai vị trí của cây gậy đó.

95. Chứng minh rằng đường kính của vòng tròn ngoại tiếp một tam giác bằng tích của hai cạnh chia cho đường cao hạ xuống cạnh thứ ba.

96. Chứng tỏ rằng bình phương của một dây cung vuông góc với đường kính của hình tròn, chia cho bốn lần một trong hai đoạn của đường kính đã được chia rồi cộng với chính đoạn đó thì bằng đường kính hình tròn.

97. Cũng từ bài toán 96, chứng tỏ rằng đoạn nhỏ bị chia ra trên đường kính bởi một dây cung vuông góc với đường kính bằng một nửa hiệu giữa đường kính và căn bậc hai của hiệu bình phương giữa đường kính và độ dài dây cung.

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA BKHASCARA

98. Đem nhân một số với 5 rồi trừ đi $\frac{1}{3}$ số đó, được bao nhiêu chia cho 10 rồi cộng thêm vào $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{4}$ số đó thì ta có kết quả là 68. Hỏi số đó là số nào ?

99. Chứng tỏ rằng :

$$\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

100. Hãy xác định một tam giác vuông nếu biết rằng độ dài cạnh huyền và diện tích tam giác được biểu thị bởi cùng một số.

101. Biết hai cây tre trồng thẳng xuống đất có độ dài là m và n, cách nhau một khoảng bằng d. Hãy tính độ dài đường vuông góc hạ từ giao điểm của hai đường thẳng nối đỉnh cây tre này với gốc cây tre kia xuống mặt đất và tính các khoảng cách từ chân đường vuông góc ấy đến hai chân cây tre.

102. Một người nói với bạn "Nếu anh cho tôi 100 rupi thì tôi sẽ giàu gấp đôi anh !". Người kia trả lời : "Nếu anh đưa cho tôi chỉ 10 rupi thôi thì tôi sẽ giàu gấp 6 lần anh". Hỏi mỗi người có bao nhiêu tiền ?

103. Giải phương trình bậc hai tổng quát :

$$ax^2 + bx = c$$

104. Căn bậc hai nửa đàn ong bay tới bụi hoa nhài, tám phần chín đàn ong vẫn còn trong tổ, một đôi ong đực cái bị mắc trong bông sen. Vậy hỏi rằng đàn ong có bao nhiêu con ?

105. Tìm một số biết nếu nhân số đó với 12 rồi thêm vào lập phương của số đó thì kết quả bằng 6 lần bình phương số đó cộng với 35.

106. Giải phương trình

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999.$$

107. Tìm chiều cao của một hình viên phân nếu biết đường kính của cung tròn và dây cung đáy.

108. Tìm nghiệm hữu tỉ của phương trình :

$$ax + by + c = xy$$

109. Hãy cho biết số nào mà khi đem nhân với 3 rồi cộng thêm vào $\frac{3}{4}$ tích vừa tìm được, được bao nhiêu đem chia cho 7, rồi lại giảm đi $\frac{1}{3}$ số tìm được, được bao nhiêu đem nhân với chính nó rồi giảm đi 52, sau đó lấy căn bậc hai, thêm vào 8 rồi chia cho 10 thì sẽ được 2 ?

110. Một bầy khỉ chia làm hai nhóm.

Nếu nhóm đầu có số khỉ bằng số bình phương của $\frac{1}{8}$ số khỉ thì nhóm sau có 12 chú khỉ.

Hỏi bầy khỉ có bao nhiêu con ?

111. Bầy khỉ có bao nhiêu con nếu lấy $\frac{1}{5}$ bầy khỉ bớt đi 3 con rồi bình phương lên thì còn dư 1 ?

112. Con trai của Prikhi mang một bó tên đi giết giặc. Nửa số tên anh dùng để bảo vệ mình, 4 lần căn bậc hai số tên dùng để bắn ngựa, 6 mũi tên bắn trúng người đánh xe của giặc, 3 mũi tên phá hỏng rào che của giặc và chỉ còn 1 mũi tên cuối cùng xuyên qua đầu giặc. Hỏi con trai của Prikhi có bao nhiêu mũi tên ?

113. Mười lần căn bậc hai số sếu của một đàn sếu bay về phía hồ ; $\frac{1}{8}$ đàn trốn vào bụi cây, còn lại 6 con bay loạn xạ trên hồ. Hỏi đàn sếu có bao nhiêu con ?

114. Trên mặt hồ có một bông sen nhô cao lên nửa "thước", bỗng có một ngọn gió thổi làm bông sen ngả về một phía, chạm mặt nước, cách xa chỗ cũ 2 "thước". Hỏi hồ sâu bao nhiêu ?

115. Có một cây dương mọc đơn độc giữa đồng, bỗng nhiên gió thổi mạnh làm nó gẫy gập xuống, ngọn cây chạm đất cách gốc 4 "thước", từ gốc lên đến chỗ gẫy 3 "thước". Hỏi cây dương cao bao nhiêu ?

NHỮNG BÀI TOÁN CỦA PARAMADISVARA

116. Tìm một số, biết rằng nếu nhân nó với 3 rồi đem chia cho 5 rồi tăng lên 6 đơn vị, được bao nhiêu lấy căn bậc hai rồi bớt đi 1, bình phương kết quả lên thì được 4.

117. Giải phương trình

$$y^2 = ax^2 + 1$$

(sau này ở châu Âu người ta gọi là phương trình Pell).

118. Chứng minh rằng trong tứ giác có hai đường chéo vuông góc thì căn bậc hai của tổng bình phương của hai cạnh đối bằng đường kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

PHẦN II

NHỮNG CUỘC THAM QUAN LỊCH SỬ, LỜI GIẢI VÀ CHỈ DẪN

BABILON

Dưới thời cổ đại ở Babilon, toán học đã nảy sinh từ nhiều thế kỉ trước công nguyên. Những cổ vật Babilon dưới dạng các phiếu đất sét với các chữ tượng hình được cất giữ ở nhiều viện bảo tàng trên thế giới, trong đó có viện bảo tàng Ermitage ở Saint - Pétersbourg (Nga), viện bảo tàng nghệ thuật tạo hình ở Moskva (Nga). Người ta đã tìm thấy 44 phiếu đất sét, là một kiểu bách khoa toàn thư đặc biệt của người Babilon cổ đại. Những phiếu đất sét này đã ghi lại những phương pháp khá thuận tiện để giải hàng loạt các bài toán thực tế về chia đất, xây dựng và thương mại.

Thành tựu khoa học của người Babilon cổ đại gồm :

a. Họ đã sáng tạo ra thiên văn học và đã có những số liệu về độ dài chu kì cơ bản của hệ Mặt Trời với độ chính xác khá cao. Ví dụ một tháng Mặt Trăng của Babilon sai khác với tháng được thiên văn hiện đại thừa nhận chỉ có 0,4 giây.

b. Họ đã hình thành hệ thống đếm với cơ số 60, chứ không phải cơ số 10, đã lập ra các hệ thống thước đo và cân mà số đo sau lớn hơn số đo trước 60 lần. Đó là cơ sở chia thước đo thời gian của chúng ta thành giờ, phút, giây..., vòng tròn thành 360^o.

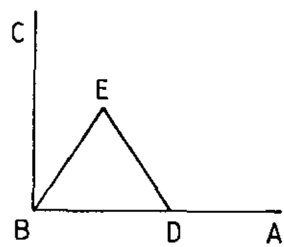
c. Họ đã giải được phương trình bậc hai và giải một số dạng phương trình bậc ba bằng các bảng đặc biệt.

Có căn cứ để khẳng định rằng, toán học cổ Babilon đã ảnh hưởng đến nền toán học của các dân tộc ngoại CAPCADƠ. Đặc biệt ở Acmêni nó giúp thúc đẩy sớm sự phát triển của toán học.

1. Cạnh của lục giác đều nội tiếp trong hình tròn đúng bằng bán kính, do đó $2\pi R = 6R$.

Từ đó suy ra $\pi = \dfrac{6R}{2R} = 3$.

2. Người Babilon cổ biết cách dựng tam giác đều, nhờ đó biết cách chia một góc vuông thành 3 phần bằng nhau, (hình 6).



Hình 6

3. Theo điều kiện của bài toán, diện tích tứ giác là $S = \dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{c+d}{2}$, trong đó a, b và c, d là những cặp cạnh đối diện. Công thức này sẽ chính xác khi tứ giác là hình chữ nhật. Lúc đó : $a = b$; $c = d$; $S = ac$.

AI CẬP

Sau Babilon, Ai Cập là trung tâm văn hóa thứ hai của thời cổ đại. Ở đất nước "Kim tự tháp" này, trước công nguyên hàng ngàn năm đã có các công trình vĩ đại dưới dạng đền đài và kim tự tháp, các công trình xây dựng khác nhau mà trong đó có một số công trình còn tồn tại đến ngày nay, sự phát triển nông nghiệp dựa trên sự tưới tiêu nhân tạo đã sớm tạo ra nhu cầu về tri thức toán học, nhất là hình học.

Các quy tắc toán học cần cho trồng trọt, thiên văn học và xây dựng được ghi trên các bức tường các đền đài hay trong các cuộn giấy bằng thảo mộc.

Ở viện bảo tàng Anh quốc còn lưu trữ các bản viết có tên là phiên bản Rainda, mà giáo sư AÂyzenlor đã giải mã năm 1877.

Bản viết thuộc những năm 2000 - 1700 trước công nguyên, chứa 84 bài toán, phần lớn mang màu sắc số học.

Bản thảo Moskva thuộc năm 1850 trước CN, được nhà sưu tầm Nga Gôlennhisep tìm ra năm 1893, từ năm 1912 nó là sở hữu của viện bảo tàng nghệ thuật tạo hình Moskva. Đây là một di vật hiếm, vô giá đã được các viện sĩ V.A.Turaiep và Stơrup nghiên cứu. Trong bản thảo này có lời giải bài toán tính thể tích kim tự tháp hình chóp cụt với các đáy là hình vuông.

Việc giải mã các bản viết này cho thấy người Ai Cập cách đây hơn 4000 năm đã biết giải hàng loạt bài toán thực tế về số học, đại số và hình học, trong đó phép tính số học đã sử dụng không chỉ số nguyên mà còn cả phân số.

4. Lời giải của bài toán dẫn đến việc giải phương trình sau :

$$x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 10.$$

Từ đó suy ra x = 9.

5. Đây là một cấp số nhân có 5 số hạng với công bội bằng 7 : 7 ; 49 ; 343 ; 4021 ; 16807 ; tổng của chúng là :

$$S_5 = \frac{a_5q - a_1}{q - 1} = \frac{16807.7 - 7}{7 - 1} = 19607.$$

6. Theo điều kiện của đầu bài thì :

$$\left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

do vậy $\pi = \dfrac{8^2 . d^2 . 4}{9^2 . d^2} = \dfrac{64.4}{81} = 3,16.$

7. Theo phương pháp Ai Cập thì :

$S_1 = \dfrac{a.b}{2}$, trong đó a : đáy ; b : cạnh bên. Ta kí hiệu đường cao của tam giác cân là h, thế thì $h = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}} = b\sqrt{1 - \left(\dfrac{a}{2b}\right)^2}$

Diện tích đúng của tam giác biểu thị qua công thức :

$$S_2 = \frac{ab}{2}\sqrt{1-\left(\frac{a}{2b}\right)^2} = S_1\sqrt{1-\left(\frac{a}{2b}\right)^2},$$

do đó $$\frac{S_2}{S_1} = \sqrt{1-\left(\frac{a}{2b}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{2.10}\right)^2} = 0{,}98,$$

tức là sai số không lớn hơn 2%.

8. Theo phương pháp Ai Cập :

$$S_1 = \frac{a+b}{2}.c,$$

trong đó a và b tương ứng là đáy dưới và đáy trên của hình thang, c là cạnh bên. Gọi h là đường cao hình thang, thế thì :

$$h = c\sqrt{1-\left(\frac{a-b}{2c}\right)^2}.$$

Diện tích đúng của hình thang là :

$$S_2 = S_1\sqrt{1-\left(\frac{a-b}{2c}\right)^2},$$

Do vậy $$\frac{S_2}{S_1} = \sqrt{1-\left(\frac{a-b}{2c}\right)^2}.$$

Thay số vào, ta tìm được sai số.

9. Người Ai Cập giải bài toán này theo công thức sau :

$$V_{\text{chóp cụt tứ giác đều}} = \frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$$

trong đó h : chiều cao, a và b là các cạnh đáy dưới và trên của hình chóp cụt tứ giác đều.

10. Kí hiệu x, y là chiều dài các cạnh phải tìm, ta có : $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$ (1) ; $xy = S$ (2). Nhân vế với vế của (1) và (2),

Suy ra : $$x^2 = \frac{m}{n}.S$$

$$x = \sqrt{\frac{m}{n}.S}\ ;\ y = \frac{n}{m}\sqrt{\frac{m}{n}.S}$$

11. Bài toán này có thể giải bằng cách lập phương trình.

Đáp số : 6630 báu vật.

HI LẠP

Người thầy đầu tiên của người Hi Lạp cổ là người Ai Cập. Vào thế kỉ thứ VII, trước CN, du khách nước ngoài được tự do đến Ai Cập. Do vậy những nhà khoa học cổ Hi Lạp có thể du hành đến "đất nước Kim tự tháp". Khoảng từ thế kỉ IV trước CN, người Hi Lạp cổ đã có những tìm tòi độc lập về toán học và đạt được nhiều thành tựu đáng kể, nhất là về hình học. Vào thế kỉ thứ III trước CN, hình học cổ Hi Lạp đạt đến đỉnh cao như các công trình của Ơclit, ông đã viết 12 cuốn sách hình học dưới dạng tiên đề có tên là "Nguyên lí".

Trong các công trình của Ơclit, tính lôgic đạt đến trình độ rất cao, mà mãi đến các thế kỉ XIX và XX toán học mới vượt qua được với các công trình của nhà toán học Đức Hilbert và trường phái của ông.

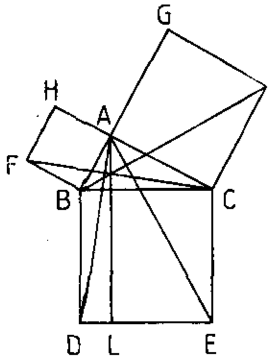
Người Hi Lạp cổ không chỉ quan tâm đến hình học sơ cấp (khi đó thuật ngữ này chưa có) mà còn đặt nền móng vững chắc cho môn hình học cao cấp qua các công trình của Apollonius và Acsimet.

Pitago và các môn đệ đạt được những thành tựu đáng kể trong lí thuyết số.

Trong lĩnh vực đại số, đặc biệt trong việc giải phương trình vô định, thì Diophante, người sống ở xứ Alecxandrie vào thế kỉ II, III, đã làm được nhiều việc và vì thế người ta gọi ông là Diophante ở xứ Alecxandrie. Ông đã hoàn thiện các phương pháp đại số bằng cách đưa vào các kí hiệu đại số và mô tả phương trình đại số bằng chữ. Tác phẩm giá trị nhất của Diophante là cuốn "Số học", phản ánh trình độ đại số của người Hi Lạp cổ đại.

12. Bài toán này được biết dưới tên gọi "định lí Pitago", được đưa vào các giáo trình hình học sơ cấp như một trong những định lí cơ bản. Có nhiều cách chứng minh định lí này, từ cách "chứng minh suy diễn" của Ơclit cực kì đơn giản, đến những cách chứng minh chặt chẽ sau này. Sau đây là cách chứng minh định lí Pitago (giả thuyết 47 của Ơclit : trong cuốn "Nguyên lí" theo xác nhận của Proclus (nhà triết học theo trường phái Platon) (410 - 485) thì cách chứng minh này của chính Ơclit).

"Giả sử tam giác vuông ABC, có góc $\widehat{A}$ vuông, tôi khẳng định diện tích hình vuông dựng trên cạnh BC bằng tổng diện tích hai hình vuông dựng trên các cạnh BA và AC" (hình 7).



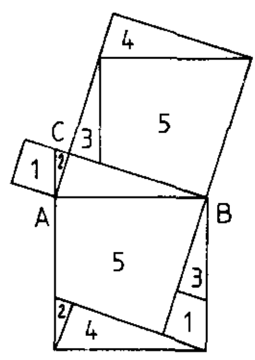
Hình 7

Dựng AL song song với BD và CE. Nối AD và CF ; vì các góc BAC, BAH vuông nên C, A, H thẳng hàng.

Tương tự B, A, G thẳng hàng. Do $\widehat{DBC} = \widehat{FBA} = 1v$ (*), nên nếu cùng thêm (*) vào góc $\widehat{ABC}$ thì $\widehat{DBA} = \widehat{FBC}$, lại có BC = BD và BF = BA nên ΔBAD = ΔBFC (c.g.c). Nếu gấp đôi diện tích tam giác BAD thì ta được diện tích hình chữ nhật BDLO vì có chung đáy BD. Còn nếu gấp đôi diện tích tam giác FBC thì ta được diện tích hình vuông BFHA vì cùng chung đáy FB, nghĩa là diện tích hình bình hành BDLO bằng diện tích hình vuông BFHA. Tương tự như vậy khi nối AE và BK thì diện tích hình bình hành CELO sẽ bằng diện tích hình vuông ACKG. Nghĩa là diện tích hình vuông BDEC bằng tổng diện tích của hai hình vuông BFHA và ACKG. Đó chính là điều phải chứng minh".

Cách chứng minh này đặc biệt ở chỗ nó được Ơclit đưa ra cách đây hơn 2000 năm nhưng không khác cách chứng minh hiện nay bao nhiêu.

Trong các sách giáo khoa, phổ biến là các cách chứng minh dựa trên sự bằng nhau của các hình được chia, khác với cách chứng minh của Ơclit là có tính minh họa cao hơn nhưng lại phức tạp hơn. Ví dụ ở thế kỉ thứ IX Ana-ri-shi chứng minh dựa trên cơ sở hình vẽ sau (hình 8)



Hình 8

Định lí Pitago có một lịch sử phong phú. Thực ra trước Pitago rất lâu nó được người Ai Cập, Babilon, Trung Hoa và Ấn Độ biết đến. Cách 8 thế kỉ trước CN, định lí Pitago được người Ấn Độ biết dưới tên "quy tắc sợi dây thừng" và được sử dụng để dựng các đền thờ theo quy định thánh thần phải có hình thể hình học vuông vức quay bốn phía.

Cách chứng minh của Pitago không tồn tại đến ngày nay. Hiện nay có hơn 100 cách chứng minh khác nhau. Có thể một trong những cách đó thuộc về Pitago hoặc môn đệ của ông (theo thông lệ thời đó, những gì học sinh tìm ra đều dành cho thầy, người đứng đầu trường phái).

Về Pitago (khoảng 580 - 500 trước CN) là nhà toán học, triết học cổ Hi Lạp. Ông sinh ra ở đảo Samos. Thời trẻ, ông đã du lịch ở Ai Cập, sống ở Babilon để nghiên cứu các ngành khoa học. Ông đã ở đó 12 năm để nghiên cứu thần học và thiên văn học. Sau khi ở Babilon ông sang Nam Italia, ở Xi xin (Sicile) ở đây ông thành lập trường phái Pitago, đem lại nhiều cống hiến cho toán học và thiên văn học. Ông đã đem lại tính khoa học cho môn hình học. Ngoài định lí nổi tiếng với tên tuổi của ông, người ta cho rằng ông có cách chứng minh định lí về tổng các góc trong tam giác ; bài toán phủ (tức là chia mặt phẳng thành những đa giác đều) ; các phương pháp hình học để giải phương trình bậc hai ; cách giải bài toán : cho trước một hình, dựng một hình thứ ba bằng một hình cho trước và đồng dạng với hình kia.

Trường phái Pitago đã phổ biến sự thần thánh hóa con số, coi quan hệ số lượng là bản chất của mọi sự vật, tách rời chúng khỏi hiện thực vật chất theo chủ nghĩa duy tâm.

Pitago cho rằng thước đo tất cả vật chất, không vật chất là con số và quan hệ của chúng. Theo ý Pitago, cả những khái niệm xa vời với toán học như "tình bạn", "chính nghĩa", "vui mừng"... cũng tìm được sự lí giải về mặt quan hệ số. Các con số được gán cho những tính chất thần bí : có số mang lại điều tốt lành, số khác - sự bất hạnh, số nữa - sự thành công... Pitago cho rằng linh hồn cũng là một con số, nó bất tử, truyền từ người này sang người khác. Số học thần bí này gây khó khăn cho sự phát triển toán học.

13. Trước tiên, ta thấy nếu bộ ba số x_1, y_1, z_1 tạo thành bộ ba số Pitago thì x_1k, y_1k, z_1k với $k > 0$ bất kì cũng tạo thành bộ ba số Pitago. Thật vậy :

Từ $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$, sau khi nhân hai vế với k^2 ta có :

$$(x_1k)^2 + (y_1k)^2 = (z_1k)^2.$$

Do vậy nếu biết một bộ số Pitago thì ta có thể, bằng cách trên, chỉ ra vô hạn các bộ ba số Pitago. Nhưng điều đó, không có nghĩa là tìm được tất cả các bộ ba số Pitago.

Bộ ba số Pitago x, y, z được gọi là bộ ba nguyên tố nếu x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau. Trường hợp ngược lại, ta sẽ gọi là bộ ba dẫn xuất. Do vậy để biết được tất cả các bộ ba số Pitago, chỉ cần biết các bộ ba nguyên tố, từ đó bằng cách nhân với 2, 3,... ta tìm được các bộ ba dẫn xuất. Hơn nữa ta nhận thấy, nếu bộ ba x, y, z là bộ ba số Pitago, trong đó có một cặp là nguyên tố cùng nhau thì bộ ba đó sẽ là bộ ba nguyên tố. Ta chứng minh điều này.

Giả sử x, y nguyên tố cùng nhau, ta sẽ chứng minh x, y, z sẽ từng đôi một nguyên tố cùng nhau. Bằng phương pháp phản chứng, giả sử x, z không là cặp số nguyên tố cùng nhau (đối với cặp y, z ta lập luận tương tự), khi đó :

$$x = x_1d \; ; \; z = z_1d$$

trong đó $d \neq 1$ và d là ƯSCLN của x và z, nó phải thỏa

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (1)$$

$\Rightarrow (x_1d)^2 + y^2 = (z_1d)^2 \Rightarrow y^2 = (z_1^2 - x_1^2)d^2$

$\Rightarrow$ d là ước số của y $\Rightarrow$ (x, y) không nguyên tố cùng nhau

$\Rightarrow$ trái giả thiết $\Rightarrow$ (x, z) nguyên tố cùng nhau.

Do vậy bộ ba x, y, z là nguyên tố. Vì x, y nguyên tố cùng nhau nên không thể cùng là số chẵn, đồng thời cũng không cùng là số lẻ. Thật vậy, nếu chúng cùng lẻ, tức là $x = 2p + 1$ ($p \in N^+$) và $y = 2q + 1$ ($q \in N^+$), thay vào phương trình (1) ta có :

$$(2p + 1)^2 + (2q + 1)^2 = z^2$$

$$z^2 = 4(p^2 + p + q^2 + q) + 2 \quad (*)$$

$\Rightarrow z^2$ là số chẵn $\Rightarrow$ z chẵn $\Rightarrow z^2$ chia hết cho 4.

Mặt khác theo đẳng thức (*) thì z^2 chia cho 4 lại dư 2, dẫn đến mâu thuẫn.

Như vậy ta có thể giả thiết x lẻ, y chẵn, và như thế z là số lẻ. Phương trình (1) viết lại là :

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y)$$

Giả sử $z + y = m$ và $z - y = n$,

Từ đó $z = \dfrac{m+n}{2}$; $y = \dfrac{m-n}{2}$; $x^2 = m.n$ $(m > n)$

Do x lẻ và $x^2 = m.n$ nên m, n sẽ cùng lẻ, ta chứng minh được (m, n) là một cặp số nguyên tố cùng nhau. Giả sử d là ước chung của m và n, $d \neq 1$, khi đó :

$$m = m_1 d \;;\; n = n_1 d$$

$$\Rightarrow z = \frac{m+n}{2} = \frac{m_1+n_1}{2}d \;;\; y = \frac{m-n}{2} = \frac{m_1-n_1}{2}d$$

Vậy y và z không nguyên tố cùng nhau. Mâu thuẫn ! Do đó (m, n) là cặp số nguyên tố cùng nhau.

Vì $x^2 = mn$ và (m, n) nguyên tố cùng nhau nên $m = u^2$ và $n = v^2$ với (u, v) nguyên tố cùng nhau.

Vậy $x = u.v$, $y = \dfrac{u^2 - v^2}{2}$, $z = \dfrac{u^2 + v^2}{2}$ (* *)

Đây chính là công thức tìm bộ ba số (x, y, z) là bộ ba số Pitago.

Sau đây, vài bộ ba số Pitago tính theo công thức (* *).

u	v	x	y	z
3	1	3	4	5
5	1	5	12	13
5	3	15	8	17
7	1	7	24	25
7	3	21	20	29
7	5	35	12	37
9	1	9	40	41
9	5	45	28	53
9	7	63	16	65

Lưu ý 1 : Bộ ba số Pitago 3, 4, 5 được biết đến ở Ai Cập từ lâu, trước Pitago, là các cạnh của tam giác vuông Ai Cập.

Lưu ý 2 : Nhờ các bộ ba số Pitago có thể thu được vô số các tam giác Hêrông, tức là các tam giác có cạnh và diện tích là những số nguyên dương. Thật vậy cứ ứng với một tam giác Pitago sẽ có các cạnh góc vuông và cạnh huyền là số nguyên dương. Nếu lấy hai tam giác Pitago có một cạnh góc vuông bằng nhau đặt chúng lên nhau sao cho hai cạnh đó trùng nhau còn hai cạnh góc vuông của hai tam giác nối dài nhau thì ta có một tam giác Hêrông. Ví dụ từ hai tam giác Pitago : 5, 12, 13 và 35, 12, 37 ta sẽ có tam giác Hêrông là 40, 12, 37 với chiều cao 12, diện tích

$$S = \frac{40.12}{2} = 240 \text{ (đ.v. diện tích).}$$

Lưu ý 3 : Tập hợp vô hạn các số Pitago cho phép lập hàng loạt bài toán rất thú vị, đặc biệt là ba bài toán sau rất hấp dẫn các nhà toán học.

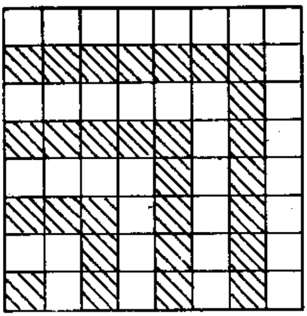
Bài toán 1. Tìm tất cả các bộ ba số Pitago trong đó hai trong ba số là hai số liên tiếp (ví dụ 20, 21, 29).

Bài toán 2. Tìm tất cả các bộ ba số Pitago trong đó có một số là số chính phương (ví dụ 3, 4, 5 ; 7, 24, 25).

Bài toán 3. Bài toán Phéc ma (Fermat). Tìm các bộ ba số Pitago (x, y, z) sao cho x + y và z là số chính phương.

Có một tập hợp vô hạn các bộ ba những số như thế, nhưng tất cả chúng là các số rất lớn.

14. Bài toán này được giải bằng phương pháp hình học. Đơn vị được biểu diễn là một hình vuông, còn những số tiếp sau là những hình vuông xếp theo hình thước thợ (hình 9).



Hình 9

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2 \text{ v.v...}$$

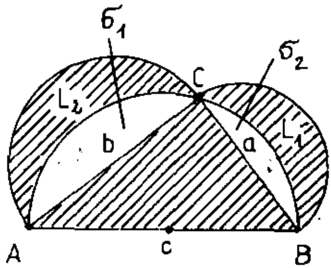
Có thể giải bài toán này một cách đơn giản bằng phương pháp đại số : số lẻ đầu tiên là 1, còn số lẻ thứ n bằng 2n − 1, xét cấp số cộng : 1, 3,..., 2n − 1. Tổng của các số đó là :

$$S = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = n^2.$$

15. Lời giải bằng phương pháp hình học của trường phái Pitago :

Nếu lấy đi từ hình vuông (hình 7) một hình thước thợ ⌉ tức là *trừ đi một số lẻ*, ta được một hình vuông khác, nhỏ hơn, tức là được một số chính phương. Hay là $(n + 1)^2 - (2n + 1) = n^2$ hay $2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$.

16. Cho tam giác vuông ABC ; a, b là cạnh góc vuông, c là cạnh huyền. Dựng các nửa đường tròn đường kính lần lượt là a, b, c trên CB, CA, AB (hình 10).



Hình 10

Các hình bán nguyệt L_1, L_2 và tam giác ABC được gạch chéo. Ta phải chứng minh :

diện tích L_1 + diện tích L_2

= diện tích ΔABC.

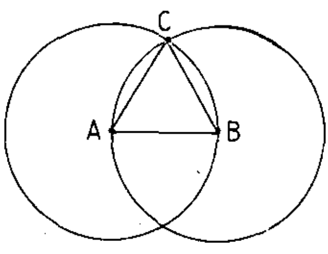
Kí hiệu σ_1, σ_2 là diện tích hai hình viên phân của hình tròn lớn có cạnh đáy là a, b

Theo định lí Pitago thì :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

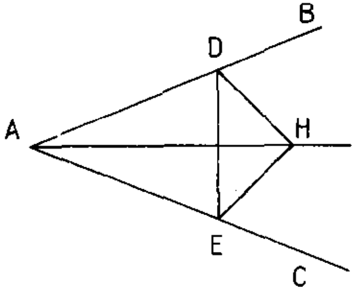
từ đó $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2$ (*)

tức là tổng diện tích hai nửa hình tròn dựng trên hai cạnh góc vuông bằng diện tích nửa đường tròn dựng trên cạnh huyền. Bớt đi hai vế của dẳng thức (*) $\sigma_1 + \sigma_2$ ta suy ra điều phải chứng minh.



Hình 11a

17. Dựng đường tròn tâm A, bán kính bằng đoạn thẳng AB cho trước (hình 11a). Lại lấy B làm tâm dựng đường tròn cùng bán kính. Kí hiệu C là một giao điểm của hai đường tròn. Nối C với A, B. Dễ dàng chứng minh ABC là tam giác đều.

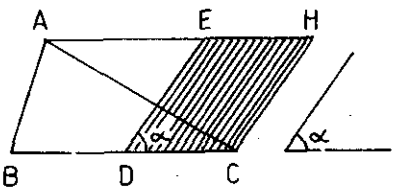


Hình 11b

18. Giả sử BAC là một góc cho trước. Lấy điểm D bất kì trên AB (hình 11b), dựng điểm E trên AC sao cho AE = AD. Nối DE. Lấy DE làm cạnh, dựng tam giác đều DEH (bài 17). Nối AH. Thế thì đường thẳng AH sẽ chia đôi góc BAC vì

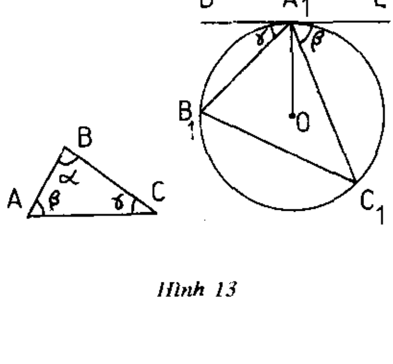
$$\Delta ADH = \Delta AEH$$

19. Giả sử ABC là tam giác cho trước, α là góc cho trước. Chia đôi cạnh BC bằng điểm D và tại D dựng góc $\widehat{CDE} = \alpha$ (hình 12). Sau đó dựng CH//DE (lưu ý AH//BC). Như vậy hình bình hành DEHC chính là hình bình hành phải dựng.



Hình 12

20. Lấy điểm A_1 tùy ý trên đường tròn đã cho, tại đó dựng tiếp tuyến DE với đường tròn (hình 13). Dựng góc $\widehat{EA_1C_1}$ bằng β và góc $\widehat{DA_1B_1}$ bằng γ. Thế thì tam giác $A_1B_1C_1$ chính là tam giác phải dựng.

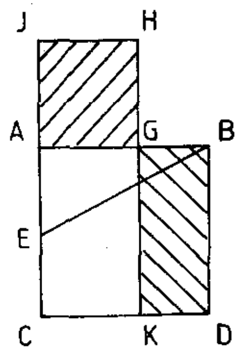


Hình 13

21. Lập luận của Ơclit :

"Cho trước đoạn thẳng AB (hình 14), cần chia AB thành hai phần bởi điểm G, sao cho diện tích hình chữ nhật GBDK bằng diện tích hình vuông AJHG, (BD = AB).

Trước tiên, dựng hình vuông ABDC, lấy trung điểm E của AC , kéo dài EA đến J sao cho EJ = BE, rồi dựng hình vuông AJHG. HG kéo dài cắt CD tại K. Điểm G chính là điểm chia AB phải dựng".



Hình 14

Lập luận trên nằm trong cuốn "Nguyên lí" của Ơclit. Bài toán của Ơclit về "điểm chia vàng" trong các sách giáo khoa ngày nay được phát biểu như sau : "Hãy chia một đoạn thẳng thành hai phần sao cho đoạn lớn là trung bình nhân giữa đoạn nhỏ và đoạn thẳng đã cho".

Ta kí hiệu độ dài đoạn thẳng đã cho là a ; độ dài đoạn lớn là x, đoạn nhỏ sẽ là a - x. Khi đó x sẽ là nghiệm của phương trình :

$$x^2 = a(a - x)$$

$$\text{hay } x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Giải ra ta có $x_1 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} . a$, $x_2 = -\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2} . a < 0$.

Đương nhiên chỉ lấy nghiệm x_1.

Vì $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,61804..$ là số thập phân vô hạn không tuần hoàn, nên $x \approx 0,62a$

Nhiều tượng đài, công trình kiến trúc đã áp dụng có ý thức bài toán "điểm chia vàng", nhất là trong các kiến trúc vĩ đại của người Hi Lạp cổ.

22. Trước tiên ta chứng minh mệnh đề : *"Mỗi số nguyên dương bất kì thì hoặc bằng 1, hoặc là một số nguyên tố, hoặc có thể biểu diễn dưới dạng tích của các số nguyên tố".*

Thật vậy, với số 1, khẳng định là đúng. Giả sử khẳng định đúng với những số nguyên dương đầu tiên nhỏ hơn n, ta chứng minh khẳng định cũng đúng với n + 1 : nếu n + 1 là số nguyên tố thì khẳng định là đúng. Còn nếu n + 1 không phải là số nguyên tố thì nó sẽ là hợp số, tức là $n + 1 = n_1 \cdot n_2$, (hiển nhiên các số n_1, n_2 nhỏ hơn n + 1). Hơn nữa dễ thấy n_1, n_2 đều nhỏ hơn n, nên theo giả thiết quy nạp chúng có thể phân tích thành tích các số nguyên tố và do vậy n + 1 cũng phân tích được thành tích của các số nguyên tố. Mệnh đề đã được chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh sự vô hạn của tập hợp các số nguyên tố. Giả sử tập hợp các số nguyên tố là hữu hạn, chẳng hạn chỉ có n số : $p_1, p_2, \dots p_n$. Xét số $p_1 p_2 \dots p_n + 1$, nó lớn hơn P_i (i = 1,..., n) và phải là hợp số. Theo mệnh đề trên thì số này sẽ được phân tích thành tích các số nguyên tố :

$$p_1 p_2 \cdots p_n + 1 = q_1 \cdot q_2 \cdots q_m \ (*)$$

Với $q_1, q_2, \dots, q_m$ là các số nguyên tố và không có thừa số q_i (i = 1,... m)nào có thể trùng với các số P_i (i = i,...,n), vì giả sử $q_i = p_n$ chẳng hạn thì từ (*) ta suy ra :

$p_1 p_2 \cdots p_n - q_1 q_2 \cdots q_m = 1$ (**) mà vế trái của (**) chia hết cho q_i, do vậy 1 chia hết cho q_i. Vô lí !

Như vậy các số nguyên tố $q_1, q_2, \dots q_n$ không thể trùng với các số nguyên tố $p_1, p_2, \dots p_n$, nghĩa là ngoài các số nguyên tố $p_1, p_2, \dots, p_n$ còn có các số nguyên tố khác là $q_1, q_2, \dots q_m$. Hay nói cách khác, tập hợp các số nguyên tố là vô hạn.

Ơle (Euler) cũng đưa ra một lời giải độc đáo bài toán này của Ơclit. Ông dùng phương pháp phản chứng.

Giả sử tập hợp các số nguyên tố là hữu hạn, chẳng hạn là các số $p_1, p_2, \dots, p_n$. Lập tổng của cấp số nhân :

$$1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots + \frac{1}{p_1^m} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}}$$

$$1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_2^m} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}}$$

....

$$1 + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n^2} + \ldots + \frac{1}{p_n^m} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}$$

Rồi nhân các chuỗi số đó với nhau ta được :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} = \Sigma \frac{1}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}}$$

Từ đó suy ra $\Sigma \dfrac{1}{p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}} = \Sigma \dfrac{1}{m}$

hay $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_n}{p_n - 1}$$

Tích ở vế phải là hữu hạn, do đó chuỗi ở vế trái là hội tụ. Điều này là mâu thuẫn vì chuỗi ở vế trái như đã biết là một chuỗi điều hòa, nó phân kì. Do đó, tập hợp các số nguyên tố là vô hạn.

23. Tác giả của bài toán là nhà toán học cổ Hi Lạp nổi tiếng Apollonius thế kỉ thứ ba, trước công nguyên. Để giải bài toán trong trường hợp tổng quát, ông xét những trường hợp riêng và trường hợp giới hạn sau :

1) Dựng một đường tròn qua ba điểm cho trước.

2) Dựng một đường tròn tiếp xúc với ba đường thẳng cho trước.

3) Dựng một đường tròn qua một điểm và tiếp xúc với hai đường thẳng song song cho trước.

4) Dựng một đường tròn qua một điểm và tiếp xúc với hai đường thẳng cắt nhau cho trước.

5) Dựng một đường tròn qua hai điểm và tiếp xúc với một đường thẳng cho trước.

6) Dựng đường tròn tiếp xúc với một đường tròn đã cho và qua hai điểm cho trước.

7) Dựng một đường tròn tiếp xúc với ba đường tròn cùng đi qua một điểm cho trước.

Điều này cũng chứng tỏ nếu bài toán Apollonius có số nghiệm hữu hạn thì chúng không lớn hơn 8.

24. $S_{\text{ngoại tiếp}} = \pi R^2$, $S_{\text{nội tiếp}} = \pi r^2$,

$r = \dfrac{a}{2}$; $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, trong đó a là cạnh hình vuông.

Khi đó $S_{\text{ngoại tiếp}} = \dfrac{\pi a^2}{2}$; $S_{\text{nội tiếp}} = \dfrac{\pi a^2}{4}$

Do vậy : $S_{\text{ngoại tiếp}} = 2S_{\text{nội tiếp}}$

25. 1) $\dfrac{1}{2} . 2\pi r.r = \pi r^2$

2) $\dfrac{\pi r^2}{4r^2} = \dfrac{11}{14}$.

Do đó $\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{11}{14}$; $\pi = \dfrac{44}{14}$; $\pi = \dfrac{22}{7}$

Như vậy diện tích hình tròn, theo Acsimet, là $\dfrac{22}{7}r^2$.

26. Sử dụng hình vẽ 1, ta tìm được :

$$\text{dt AFDHCB} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AD}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{DC}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi}{8}(AC^2 - AD^2 - DC^2) = \frac{\pi}{8}\left[(AD + CD)^2 - AD^2 - DC^2\right] =$$

$$= \frac{\pi}{8} . 2AD.DC = \frac{\pi}{4}BD^2 = \pi\left(\frac{BD}{2}\right)^2.$$

27. Diện tích bề mặt chỏm cầu được tính theo công thức : $S = 2\pi Rh$, trong đó R là bán kính hình cầu, h là chiều cao của chỏm cầu.

Nếu l là đường thẳng nối từ đỉnh chỏm cầu với đường tròn đáy, thì $l^2 = 2Rh$. Khi đó :

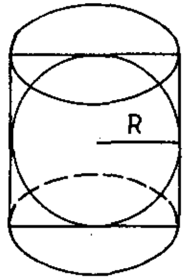
$$S = \pi l^2$$

28. $V_{\text{cầu}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, $V_{\text{nón}} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$;

$\dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$; $R = \sqrt[3]{\dfrac{r^2 h}{4}}$.

Do đó $V_{trụ} = \pi r^2 h$; $\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi r^2 h$; $R = \sqrt[3]{\frac{3}{4}r^2 h}$.

29. Theo điều kiện của bài toán ta nhận được thể tích của hình trụ (hình 15) là :



Hình 15

$$V_{trụ} = \pi R^2 . 2R = 2\pi R^3$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{3}{2} V_{cầu} .$$

Cũng từ chính điều kiện bài toán ta có diện tích toàn phần của hình trụ :

$$S_{trụ} = 2\pi R . 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$$

$$= \frac{3}{2}(4\pi R^2) = \frac{3}{2}S_{cầu}$$

30. Bài toán được thiết lập tổng quát như sau : Tìm tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn a + b + c + d +..., với công bội bằng $\frac{1}{4}$. Theo định nghĩa của cấp số nhân thì khi $q = \frac{1}{4}$ suy ra :

$$b = \frac{a}{4},\ c = \frac{b}{4},\ d = \frac{c}{4},...$$

hay $\qquad a = 4b,\ b = 4c,\ c = 4d,...$

Hơn nữa : $b + c + d + ... + \frac{1}{3}(b + c + d + ...) =$

$$= \left(b + \frac{b}{3}\right) + \left(c + \frac{c}{3}\right) + \left(d + \frac{d}{3}\right) + ... = \frac{4}{3}b + \frac{4}{3}c + \frac{4}{3}d + ...$$

$$= \frac{1}{3}(4b + 4c + 4d + ...) = \frac{1}{3}(a + b + c + ...)$$

Do đó $b + c + d + ... = \frac{1}{3}a$

Suy ra $a + b + c + d + ... = \frac{4}{3}a$

Từ đó tìm được kết quả phải tìm.

31. Lời giải của Acsimet được viết theo công thức toán học ngày nay như sau :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Công thức này nhận được từ đồng nhất thức :

$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$$

Với n = 1, 2, 3,..., n, thay vào công thức ta có :

$$1^3 - 0^3 = 3.1^2 - 3.1 + 1$$

$$2^3 - 1^3 = 3.2^2 - 3.2 + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3.3^2 - 3.3 + 1$$

....

$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$$

Cộng từng vế ta được :

$$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + ... + n^2) - 3\,(1 + 2 + ... + n) + n\ ;$$

$$n^3 = 3(1^2 + 2^2 + ... + n^2) - 3 . \frac{(n+1)n}{2} + n\ ;$$

$$3(1^2 + 2^2 + ... + n^2) = n^3 + \frac{3(n+1)n}{2} - n$$

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

32. *Lời giải của Acsimet* (tóm tắt)

Giả sử rằng những hạt cát nhỏ đến mức 10000 hạt mới lấp đầy một hạt anh túc (hình cầu). (Đường kính một hạt anh túc bằng $\frac{1}{40}$ tấc). Ở Hi Lạp chỉ có số đếm đến vạn (1 vạn = 10^4),và 1 vạn vạn, tức là $10^4 . 10^4 = 10^8$.

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^3.$$

Từ đó suy ra quả cầu có đường kính 1 tấc chứa 64000 hạt anh túc hay 64.000 vạn hạt cát, hay 64.10^7 hạt cát, hay vào khoảng 10.10^8 hạt cát (làm tròn vì : $10 > 6{,}4$). Quả cầu đường kính 100 tấc chứa không nhiều hơn $10^6 . 10 . 10^8$ hạt cát. Quả cầu đường kính 10000 tấc chứa không nhiều hơn $10^{21} = 10.10^4 . 10^{16}$ hạt cát. Vì 1 dặm nhỏ hơn 10000 tấc nên rõ ràng là quả cầu đường kính 1 dặm chứa ít hơn 10^{21} hạt cát.

Lập luận tương tự như vậy ta tính được quả cầu :

đường kính 10^2 dặm chứa ít hơn $1000.10^{8.3}$ hạt cát

đường kính 10^4 dặm chứa ít hơn $10.10^{8.4}$ hạt cát

đường kính 10^6 dặm chứa ít hơn $10^6 . 10.10^{8.4}$ hạt cát

đường kính 10^8 dặm chứa ít hơn $10.10^4.10^{8.5}$ hạt cát

đường kính 10^{10} dặm chứa ít hơn $1000.10^{8.6}$ hạt cát

Lưu ý rằng 10^{10} dặm là 10000 triệu dặm. Đường kính của Thái Dương Hệ nhỏ hơn 10000 triệu dặm, do vậy quả cầu Thái Dương Hệ chứa ít hơn $1000.10^{8.6}$ hạt cát. Còn đường kính của Trái Đất khoảng 1 triệu dặm (10^6 dặm), theo kết quả trên thì quả cầu có đường kính bằng Trái Đất chứa $10^6.10.10^{8.4}$ hạt cát hay 10^{39} hạt cát.

33. Bài toán dựng đa giác đều 7 cạnh này của Acsimet được gọi là bài toán cổ nổi tiếng thứ 4. Ngoài nó ra ba bài toán cổ nổi tiếng khác là gấp đôi hình lập phương (35), chia ba một góc (36) và cầu phương đường tròn (37).

Acsimet đã biết rằng bài toán này không thể giải được bằng thước và compa vì số đo cạnh của đa giác này là nghiệm của một phương trình bậc ba, không thể biểu diễn dưới dạng căn bậc hai.

Bằng tiêu chuẩn Gausơ, ta cũng có thể khẳng định được không thể dựng được đa giác đều 7 cạnh bằng thước và compa. Tiêu chuẩn Gausơ nói rằng : *Nếu n là một số nguyên tố thì điều kiện cần và đủ để dựng được một đa giác đều n cạnh bằng thước và compa là n có dạng* $2^{2k} + 1$.

Tuy vậy có thể dựng được đa giác đều 7 cạnh gần chính xác nhờ phương pháp bậc thang, bằng thước và compa, hoặc dựng được hoàn toàn chính xác nếu ngoài việc dùng thước và compa còn dùng thêm những dụng cụ khác (chẳng hạn hai ÊKE).

Cách dựng gần đúng, dựa vào nhận xét sau : Nếu gọi a_n là số đo của cạnh đa giác đều n cạnh nội tiếp đường tròn bán kính đơn vị thì :

$$a_7 = 2\sin\frac{360^o}{14} \approx 0{,}868$$

còn
$$\frac{a_3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}867$$

Nên nếu lấy $a_7 = \dfrac{a_3}{2}$ thì sai số không vượt quá 0,3%.

Trong cách dựng đúng, bài toán đưa về việc giải phương trình $x^7 - 1 = 0$, nghiệm của nó không thể biểu diễn được dưới dạng căn bậc hai.

Nghiệm khác 1 của căn bậc 7 của đơn vị thỏa phương trình :

$$\varepsilon^6 + \varepsilon^5 + \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon^1 + 1 = 0 \qquad (1)$$

trong đó $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$, lưu ý $\varepsilon^{7-k} = \varepsilon^{-k}$, nên phương trình (1) được viết lại là :

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = -1 \qquad (2)$$

Đặt $\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y$ (3)

Dẫn tới $\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = y^2 - 2$ (4)

và $\varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = y^3 - 3y$ (5)

Do vậy $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$ (6)

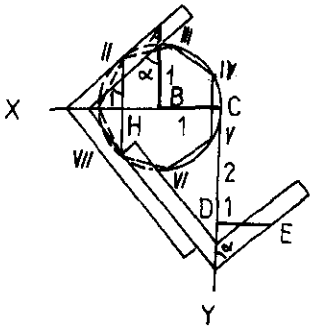
Bài toán dẫn tới giải một phương trình bậc ba, như đã biết, không thể có nghiệm biểu diễn qua các căn bậc hai. Do vậy mà không thể dựng được đa giác đều 7 cạnh bằng thước và compa. Tuy nhiên, nhờ hai êke thì phương trình (6) giải được, có nghĩa là dựng được đa giác đều 7 cạnh. Ta nhận thấy rằng :

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1} = \left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right) +$$

$$+\left(\cos\frac{2\pi}{7} - i\sin\frac{2\pi}{7}\right) = 2\cos\frac{2\pi}{7}$$

Do vậy nếu nối hai đỉnh cách nhau một đỉnh bằng một dây cung thì khoảng cách từ dây cung đến tâm là $\cos\dfrac{2\pi}{7} = \dfrac{y}{2}$.

Trước hết dựng đường gấp khúc ABCDE (hình 16) trong đó $AB \perp BC$, $BC \perp CD$ và $CD \perp DE$ và $AB = 1$, $BC = 1$, $CD = 2$, $DE = 1$, trong đó 1 ; 1 ; 2 ; 1 là giá trị tuyệt đối của các hệ số của phương trình (6). Đặt hai êke như hình vẽ, dựng đường gấp khúc AXYE. Qua tính toán ta khẳng định được $XB = y$ (là nghiệm phải tìm). Ta kiểm tra điều này : kí hiệu góc XAB là α, suy ra $XB = tg\alpha$.



Hình 16

$$CY = XC tg\alpha = (XB + 1)tg\alpha$$
$$= (tg\alpha + 1)tg\alpha = tg^2\alpha + tg\alpha.$$

$$CY = 2 + DY = 2 + \cot g\alpha = 2 + \frac{1}{tg\alpha} = \frac{2tg\alpha + 1}{tg\alpha} ;$$

do vậy $\dfrac{2tg\alpha + 1}{tg\alpha} = tg^2\alpha + tg\alpha$

$$tg^3\alpha + tg^2\alpha - 2tg\alpha - 1 = 0$$

Từ đó thấy rằng $tg\alpha = XB$ thỏa phương trình (6) và do vậy có thể lấy $y = XB$. Lưu ý rằng $\dfrac{y}{2} = \dfrac{XB}{2}$ là khoảng cách từ tâm B đến dây cung như đã nói ở trên, qua H là trung điểm của XB, dựng đường vuông góc với đoạn thẳng này cắt đường tròn tại các điểm II và VII, chúng chính là các đỉnh của đa giác đều 7 cạnh, từ đó ta suy ra các đỉnh khác một cách dễ dàng.

34. Kí hiệu X, Y, Z, T lần lượt là số bò đực màu trắng, xám, nâu, đốm, còn x, y, z, t là số bò cái tương ứng. Theo bài ra ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} X = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) Y + Z \\ Y = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) T + Z \\ T = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) X + Z \\ x = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) (Y + y) \\ y = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) (T + t) \\ t = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) (Z + z) \\ z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) (X + x) \end{cases}$$

và $X + Y$ là số chính phương (tức là $X + Y = p^2$)

$T + Z$ là số tam giác (tức là $T + Z = \frac{q(q+1)}{2}$)

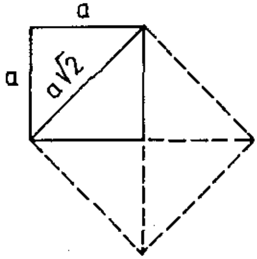
Acsimet đã đưa ra lời giải cụ thể bài toán này với kết quả số bò đực trắng X là :

$$X = 1598.10^{206541}$$

và tổng số bò là 7766.10^{206541} con.

Cũng nên biết rằng để viết trọn vẹn lời giải bài toán này cần 660 trang giấy, ngay cả khi mỗi trang giấy giảm đi 2500 chữ số.

35. Trước tiên, xét bài toán gấp đôi hình vuông, có nghĩa là dựng một hình vuông có diện tích gấp đôi hình vuông đã cho. Người Hi Lạp cổ đại đã giải được bài toán này một cách dễ dàng. Chỉ cần dùng thước và compa dựng đoạn $\sqrt{2}$ (hình 17).



Hình 17

Cạnh của hình vuông cho trước là a, còn cạnh của hình vuông phải dựng là $a\sqrt{2}$ (hình 17).

Bây giờ ta xét bài toán tổng quát hơn là bài toán gấp đôi khối lập phương. Người Hi Lạp cổ cũng đã xem xét tới bài toán này và cố gắng giải nó bằng thước và compa. Nếu số đo của cạnh của khối lập phương đã cho là a, ta gọi x là số đo cạnh khối lập phương phải dựng thì x sẽ là nghiệm của phương trình :

$$x^3 = 2a^3$$

dẫn tới $x = a\sqrt[3]{2}$

hay dẫn tới dựng đoạn $\sqrt[3]{2}$ bằng thước và compa. Mọi cố gắng của người Hi Lạp cổ để dựng đoạn $\sqrt[3]{2}$ bằng thước và compa là vô ích và khó có thể nói các cố gắng này kéo dài bao lâu nữa nếu như vào nửa đầu thế kỉ XIX người ta chưa chứng minh được rằng không thể dựng được đoạn $\sqrt[3]{2}$ bằng thước và compa.

Để có khái niệm về khả năng giải được hoặc không giải được của bài toán dựng hình, ta lưu ý những điểm dưới đây. Với thước và compa có thể dễ dàng dựng được các biểu thức :

$$a + b \; ; \; a - b \; ; \; \frac{ab}{c} \; ; \; \sqrt{ab} \; ; \; \sqrt{a^2 + b^2} \; ; \; \sqrt{a^2 - b^2},$$

trong đó a, b, c là những số cho trước hay những đoạn thẳng cho trước. Nếu như lời giải của một bài toán dẫn đến việc áp dụng liên tiếp một số lần hữu hạn các phép dựng hình trên thì nó giải được bằng thước và compa. Còn nếu không thì coi là không giải được bằng thước và compa. Bài toán gấp đôi khối lập phương là một ví dụ về sự không giải được của một bài toán bằng thước và compa.

Toán học hiện đại đã chứng minh được rằng : Một phương trình bậc ba với hệ số hữu tỉ nếu không có nghiệm hữu tỉ thì không thể giải được bằng căn bậc hai, tức là không nghiệm nào của phương trình có thể dựng được bằng thước và compa.

Như trên đã nói, bài toán gấp đôi khối lập phương dẫn tới giải phương trình bậc ba :

$$x^3 - 2a^3 = 0$$

với a là cạnh của khối lập phương cho trước.

Còn x là cạnh của khối lập phương gấp đôi phải tìm. Để đơn giản, ta cho a = 1, khi đó $x^3 - 2 = 0$. Đây là phương trình với hệ số hữu tỉ và dễ thấy nó không có nghiệm hữu tỉ, do vậy mà theo định lí trên, bài toán gấp đôi khối lập phương này không thể giải được bằng thước và compa.

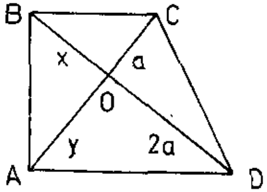
Đêcac (René Descartes) là nhà toán học đầu tiên công khai nêu ý kiến về việc không thể dựng được bằng thước và compa đoạn thẳng $\sqrt[3]{2}$. Năm 1637 ông đã đưa ra mệnh đề : căn bậc ba của một số hữu tỉ không phải số lập phương, nói chung là một số vô tỉ không thể đưa được về một số hữu hạn phép tính lấy căn bậc hai. Năm 1837, nhà toán học Pháp Bessel đã chứng minh chặt chẽ về tính không giải được bằng thước và compa bài toán gấp đôi khối lập phương.

Một trong những nhà hình học cổ đại Hi Lạp đầu tiên tiến tới việc giải bài toán gấp đôi khối lập phương bằng thước và compa với sự hỗ trợ của công cụ khác đó là Hippocrate (thế kỉ thứ V trước CN). Hippocrate đã chuyển việc giải bài toán không gian gấp đôi khối lập phương về bài toán phẳng bao gồm việc tìm hai số x, y nằm giữa a và 2a, sao cho a, x, y, 2a hợp thành một cấp số nhân, tức là :

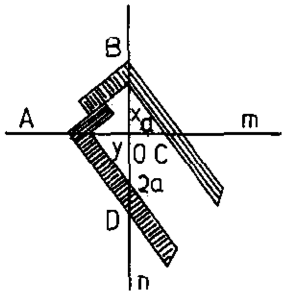
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

Từ đó $x^2 = ay$ và $y^2 = 2ax$, do vậy $x^4 = a^2y^2 = 2a^3x$, hay là $x^3 = 2a^3$. Tức là x sẽ là cạnh của khối lập phương gấp đôi khối lập phương cạnh a phải tìm.

Rõ ràng với thước và compa thì các "đoạn đặt" x, y không thể dựng được vì nếu được sẽ đưa tới mâu thuẫn với việc không dựng được của đoạn $x = \sqrt[3]{2}$ bằng thước và compa. Tuy vậy các "đoạn đặt" này lại có thể dựng được nhờ các công cụ phụ trợ khác. Platon và Ơratôsten (Eratosthène) đã đưa ra hai công cụ đặc biệt để tìm hai "đoạn đặt" x, y nằm giữa hai đoạn a và 2a cho trước. Công cụ của Platon gồm hai thước thợ vuông góc thông thường, còn phép dựng dựa vào bổ đề : *Trong mỗi hình thang vuông (hình 18) có hai đường chéo vuông góc thì các đoạn thẳng do các đường chéo cắt nhau tạo thành lập nên một cấp số nhân* (Các bạn thử chứng minh).



Hình 18

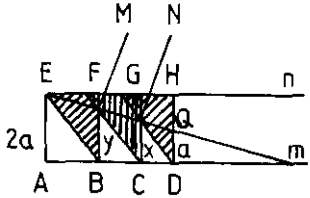


Hình 19

Hình vẽ 19 nói lên cách dùng hai thước thợ vuông góc để dựng hai "đoạn đặt" x, y : Lấy hai đường thẳng m và n vuông góc với nhau tại O. Lấy OC = a, lấy OD = 2a, bây giờ lấy hai thước vuông góc (trên hình vẽ gạch chéo) đặt chúng sao cho một cạnh của thước thợ thứ nhất đi qua C, còn đỉnh thước nằm trên đường thẳng n, cạnh của thước thợ thứ hai đi qua D và đỉnh thước nằm trên đường thẳng m, các cạnh còn lại của hai thước trùng nhau.

Với cách đặt như vậy thì OB = x và OA = y. Theo bổ đề trên thì x = OB là cạnh của khối lập phương phải dựng.

Công cụ của Ơratôsten mang tên "Mêzôliabi", có nghĩa là "thước bắt", nghĩa là "bắt" ra hai "đoạn đặt", trong đó một đoạn là cạnh của khối lập phương phải tìm. Công cụ này gồm hai thanh gỗ đặt song song cách nhau một khoảng bằng 2a. Trên hai thanh gỗ đó đặt ba tam giác vuông bằng nhau trong đó tam giác đầu tiên cố định ở bên trái, còn hai tam giác kia chuyển dịch được dọc theo các thanh gỗ sao cho các cạnh góc vuông bằng nhau nằm ở thanh phía trên còn các đỉnh của chúng nằm ở thanh dưới (hình 20).



Hình 20

Trên cạnh HD của tam giác bên phải cuối cùng ta lấy DQ = a. Sau đó chuyển dịch các tam giác sao cho điểm cắt của cạnh góc vuông của tam giác trước với cạnh huyền của tam giác sau (trên hình vẽ 20 là hai điểm M và N) nằm trên cùng một đường thẳng với E, Q. Khi đó từ các tam giác đồng dạng, ta có :

$$\frac{a}{NC} = \frac{NC}{MB} = \frac{MB}{2a}, \ NC = x, \ MB = y$$

$\Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$. Như vậy NC = x chính là độ dài cạnh hình vuông phải tìm.

36. Những nhà bác học cổ Hi Lạp đã không khó khăn gì lắm để chia ba một góc bất kì thành ba phần bằng nhau nhờ những dụng cụ có tính cơ khí. Nhưng với họ vẫn luôn tồn tại một câu hỏi là liệu chỉ dùng thước và compa thôi thì có thể chia ba một góc bất kì thành ba phần bằng nhau được không ?

Để trả lời câu hỏi này, ta lập luận như sau : Giả sử góc phải chia thành ba phần bằng nhau là 3α. Dễ thấy rằng $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

do vậy $\quad 2\cos 3\alpha = 8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha$

Bây giờ giả sử $2\cos 3\alpha = a$ và $2\cos\alpha = x$, khi đó

$$a = x^3 - 3x$$

hay là

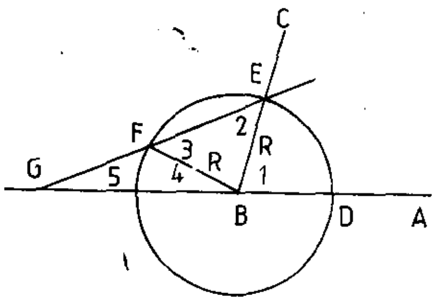
$$x^3 - 3x - a = 0 \qquad (1)$$

Để chứng minh rằng bài toán "chia ba một góc" không thể giải được bằng thước và compa chỉ cần chỉ ra một góc không thể "chia ba" được bằng thước và compa. Chẳng hạn góc $3\alpha = 60^0$, ta có $\cos 3\alpha = \frac{1}{2}$, phương trình (1) sẽ trở thành $x^3 - 3x - 1 = 0$ (2)

Ta biết rằng nghiệm hữu tỉ của phương trình (2) chỉ có thể là ± 1, nhưng không số nào trong hai số ± 1 thỏa mãn phương trình (2). Do vậy mà phương trình (2) không có nghiệm hữu tỉ, vì thế không nghiệm nào của nó có thể dựng được bằng thước và compa. Lưu ý rằng do góc 60^0 không thể chia ba được bằng thước và compa nên góc 20^0 và 40^0 cũng không thể dựng được bằng thước và compa. Từ đó rút ra là các đa giác đều 9 cạnh, 18 cạnh... không thể dựng được bằng thước và compa.

Hơn nữa, ta có thể chỉ ra một tập hợp vô hạn các giá trị của góc α mà nghiệm của (1) không thể đưa về căn bậc hai, tức là có một tập hợp vô hạn các góc không thể "chia ba" được bằng thước và compa. Do vậy mà bài toán chia một góc thành ba phần bằng nhau bằng thước và compa nói chung là không giải được. Nhưng nếu $3\alpha = 90^o$, thay vào phương trình (1) ta sẽ có $x^3 - 3x = 0$ (3).

Phương trình (3) này sẽ có nghiệm 0 ; $\pm\sqrt{3}$ biểu diễn được dưới dạng căn bậc hai, do đó góc 90^o có thể được chia thành ba phần bằng nhau chỉ bằng thước và compa. Suy luận tương tự thì góc 45^o có thể "chia ba" được bằng thước và compa... và như vậy có một tập hợp vô hạn các góc có thể "chia ba" được bằng thước và compa, chẳng hạn những góc có dạng $\frac{\pi}{2^n}$, n nguyên dương (bạn nên tự chứng minh điều này)



Hình 21

Acsimet đã có một cách giải đặc biệt và rất đơn giản bài toán chia ba một góc với một cái "thước" rất đặc biệt, gọi là "thước đánh dấu hai điểm". Cụ thể là, giả sử cần chia góc nhọn $\widehat{ABC}$ thành ba phần bằng nhau (hình 21), lấy B làm tâm, dựng đường tròn bán kính R, cắt các cạnh của góc tại D và E. Bây giờ dùng "thước đánh dấu" của Acsimet, đánh dấu hai điểm là F và G sao cho FG = R.

Đặt cạnh "thước" tại điểm E sao cho F thì nằm trên đường tròn còn G thì nằm trên cạnh AB kéo dài. Khi đó góc $\widehat{EGD}$ sẽ là góc có số đo bằng một phần ba góc $\widehat{ABC}$. Thật vậy, theo hình vẽ 21, ta kí hiệu các góc là 1, 2, 3, 4, 5, cần chứng minh góc 5 bằng một phần ba góc 1, rõ ràng là :

$$\hat{1} = \hat{5} + \hat{2} \;;\; \hat{4} = \hat{5} \text{ và } \hat{2} = \hat{3}$$
$$\hat{3} = \hat{4} + \hat{5} \rightarrow \hat{3} = 2.\hat{5}$$

do đó $\hat{1} = \hat{5} + \hat{3} = \hat{5} + 2.\hat{5} = 3.\hat{5}$. Bài toán được chứng minh.

Việc tìm kiếm những phương pháp mới giải bài toán chia ba một góc cho thấy bài toán này liên quan tới các bài toán đại số và lượng giác. Chẳng hạn vào thế kỉ XV, nhà bác học Alcashi đã áp dụng phép chia ba một góc để lập các bảng số lượng giác rất chính xác, cần cho thiên văn và tính toán. Cụ thể sau khi áp dụng các phương pháp tính gần đúng nghiệm của phương trình bậc ba, ông đã tính ra được sin 1^o nhờ giá trị đã biết của sin 3^o. Sau đó, vào thế kỉ XVI, nhà toán học Pháp, Viet trên cơ sở bài toán chia ba một góc đã tìm được cách giải lượng giác phương trình bậc ba trong trường hợp được gọi là "không biến đổi để hạ bậc được". Các nhà toán học khác như Đêcac, Niutơn, Clerô (Clairaut)... cũng đã đưa ra những lời giải rất hay, nhưng khá phức tạp bài toán chia ba một góc. Đến nay người ta cũng vẫn đang tìm những lời giải mới của bài toán này.

37. Bài toán cầu phương đường tròn đã được các nhà bác học cổ Hi Lạp cố gắng giải, nhưng không thành công. Vấn đề là ở chỗ bài toán cầu phương đường tròn cũng như bài toán gấp đôi khối lập phương và bài toán chia ba một góc không thể giải được bằng thước và compa.

Sau những cố gắng bất thành của các nhà toán học, kể cả những nhà toán học "nghiệp dư" để giải bài toán cầu phương đường tròn, từ năm 1755, Viện hàn lâm Pari đã quyết định không xem xét các công trình có liên quan đến các bài toán cầu phương đường tròn, chia ba một góc và gấp đôi khối lập phương nữa. Điều này ít nhiều đã làm "nguội lạnh" nhiệt tình của các "nhà cầu phương".

Chỉ mãi đến nửa sau thế kỉ XIX, nhà toán học Đức F.Linđơman đã chứng minh được bài toán trên không thể giải được nhờ thước và *compa*. Cách chứng minh của F.Linđơman rất khó và nằm ngoài giới hạn của giáo trình toán sơ cấp. Xin tóm tắt ý tưởng như sau :

Giả sử cho trước đường tròn bán kính R. Yêu cầu dựng một hình vuông có diện tích bằng diện tích hình tròn này. Ta kí hiệu cạnh hình vuông là x, khi đó $x^2 = \pi R^2$, suy ra $x = R\sqrt{\pi}$.

Như vậy dẫn đến việc dựng tích đoạn R cho trước với $\sqrt{\pi}$, với yêu cầu là chỉ dùng thước và compa.

Bằng thước và compa luôn dựng được tích của đoạn R với một số hữu tỉ nhưng không phải lúc nào cũng có thể dựng được tích của đoạn R với một số vô tỉ. Điều này có thể làm được trong một vài trường hợp, ví dụ đối với số vô tỉ $\sqrt{2}$ hoặc $\sqrt{2-\sqrt{3}}$; khi đó $R\sqrt{2}$ là cạnh của hình vuông nội tiếp đường tròn bán kính R, còn $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ là cạnh của đa giác đều 12 cạnh nội tiếp đường tròn bán kính R, mà đa giác đều 12 cạnh rất dễ dựng, sau khi dựng được lục giác đều.

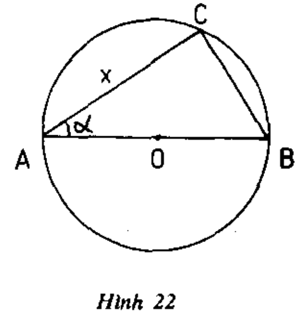
Lí thuyết dựng hình đã xác định rằng chỉ có thể dựng được tích của đoạn R cho trước với một số thực bằng thước và compa trong trường hợp số thực đó là nghiệm của phương trình đại số với các hệ số nguyên có nghiệm được biểu diễn bằng căn bậc hai. Một số không thể là nghiệm của một phương trình đại số. Với các hệ số nguyên được gọi là số siêu việt. Vậy thì để chứng minh sự vô nghiệm của bài toán cầu phương đường tròn bằng thước và compa chỉ cần nêu rõ π hoặc $\sqrt{\pi}$ là số siêu việt là đủ.

Công lao của F.Linđơman chính là ở chỗ lần đầu tiên trong khoa học đã chứng minh chặt chẽ được π là số siêu việt. Do vậy đã hoàn thành việc xác định tính không giải được của bài toán cầu phương đường tròn. Vì thế người ta gọi F.Linđơman là "người đánh bại số π ".

Tuy vậy bài toán này có thể giải được nếu ngoài thước và compa còn dùng thêm dụng cụ khác, hay vài đường cong đặc biệt (như đường cong bậc hai). Bằng thước và compa chỉ cho lời giải gần đúng mà thôi.

Dưới đây là một trong những lời giải gần đúng bằng cách sử dụng tam giác Bing. Lời giải này do kĩ sư người Nga Bing đưa ra năm 1836, rất thuận tiện cho các mục tiêu ứng dụng.

Xét tam giác ABC nội tiếp đường tròn (hình 22) sao cho cạnh lớn nhất là đường kính đường tròn. Ta kí hiệu góc $\widehat{CAB}$ là α, dây cung AC là x. Cần chọn cho α một giá trị để x là cạnh của hình vuông cầu phương. Do diện tích hình vuông cạnh x phải bằng diện tích hình tròn nên :



Hình 22

$$x^2 = \pi R^2 \text{ hay } 4R^2\cos^2\alpha = \pi R^2$$

từ đó $\cos^2\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0{,}886$. Tra bảng số ta nhận được $\alpha = 27^o36'$. Như vậy sau khi dựng một dây cung chứa góc $27^o36'$ trong đường tròn thì ta có ngay cạnh hình vuông có diện tích bằng diện tích hình tròn. Dễ đoán ra rằng tam giác ABC được xét đến chính là tam giác Bing.

Một cấp số cộng với số số hạng chẵn có thể viết :

$$\div\ a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n}$$

Gọi S_1 và S_2 lần lượt là tổng nửa đầu và tổng nửa cuối của cấp số cộng đó thì :

$$S_1 = \frac{a_1 + a_n}{2}n \text{ và } S_2 = \frac{a_{n+1} + a_{2n}}{2}n$$

Giả sử d là công sai của cấp số cộng, ta có :

$$a_n = a_1 + (n-1)d\ ;\ a_{n+1} = a_1 + nd\ ;\ a_{2n} = a_1 + (2n-1)d$$

do đó $S_2 - S_1 = d.n^2$. Đây chính là điều phải chứng minh.

Bài toán này của nhà bác học cổ Hi Lạp Gipsic sống vào khoảng thế kỉ II, trước CN. Ông cũng là tác giả của nhiều bài toán thú vị khác.

39. Hêrông giải bài toán này theo công thức do ông tìm ra :

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

trong đó $p = \frac{a+b+c}{2}$; a, b, c là số đo của các cạnh của tam giác. Vì thế công thức này còn được gọi là công thức Hêrông. Đáp số : $S_\Delta = 84$ (đơn vị diện tích).

Nhà bác học cổ Hi Lạp Hêrông sống vào thế kỉ thứ I. Ông được xem như là nhà bác học tài năng nghiên cứu về trắc địa. Trong tác phẩm "Đo", ông đã đưa ra các quy tắc giải phương trình bậc hai, cách tính gần đúng căn bậc hai, căn bậc ba, công thức tính gần đúng diện tích, thể tích vật thể hình học, trong đó nổi tiếng nhất là công thức tính diện tích tam giác theo ba cạnh của nó.

40. Kí hiệu x – 1, x, x + 1 lần lượt là các cạnh của tam giác phải tìm. Khi đó, theo công thức Hêrông, diện tích tam giác là :

$$S = \sqrt{\frac{3x}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}-1\right)}$$

Do đó : $S = \frac{x}{2}\sqrt{3\left(\frac{x^2}{4}-1\right)}$; trong đó $\frac{x}{2} = m$ là số nguyên.

Khi đó thì $S = m\sqrt{3(m^2-1)}$, vì S nguyên nên $m^2 - 1 = 3n^2$ hay $S = 3mn$.

Từ điều kiện $m^2 - 1 = 3n^2$ suy ra $m^2 - 3n^2 = 1$

hay $(m + n\sqrt{3})(m - n\sqrt{3}) = 1$ (1)

(1) đúng với $m = 2$ và $n = 1$:

$$(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$$

Suy ra $(2+\sqrt{3})^p(2-\sqrt{3})^p = 1$ với $p = 1, 2, 3...$ (2)

Từ (1) và (2) rút ra :

$$m_p + n_p\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^p$$

$$m_p - n_p\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^p$$

Kết quả cho theo bảng dưới đây :

p	x	S
1	4	6
2	14	84
3	52	1170
4	194	16296
.	.	.
.	.	.
.	.	.

41. Theo điều kiện đầu bài, chia dãy số lẻ thành các nhóm, tức là :

$1 + (3 + 5) + (7 + 9 + 11) + (13 + 15 + 17 + 19) + ...$

Ta thấy trực tiếp : $S_1 = 1 = 1^3$

$$S_2 = 3 + 5 \qquad\qquad\quad = 8 = 2^3$$

$$S_3 = 7 + 9 + 11 \qquad\quad = 27 = 3^3$$

$$S_4 = 13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3 \text{ v.v...}$$

Nhận thấy nhóm thứ n có n số hạng, do vậy số số hạng của n − 1 nhóm đầu là $1 + 2 + ... + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$. Từ đó rút ra số hạng cuối cùng của nhóm thứ n − 1 là $2.\frac{n(n-1)}{2} - 1 =$ $= n(n - 1) - 1$, suy ra số hạng tiếp theo của dãy số lẻ, tức là số hạng đầu tiên của nhóm thứ n là : $n(n - 1) - 1 + 2 = n^2 - n + 1$ và số hạng cuối cùng của nhóm thứ n là $n^2 - n + 1 + 2(n - 1) = n^2 + n - 1$. Từ đây suy ra tổng của nhóm thứ n :

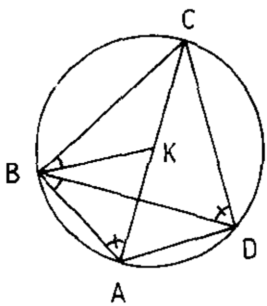
$$S_n = \frac{n^2 - n + 1 + n^2 + n - 1}{2}.n = n^3.$$

Đó chính là điều phải chứng minh.

Tác giả của bài toán này là nhà bác học cổ Hi Lạp Nicomède vào thế kỉ thứ I. Cuốn "Nhập môn số học" của ông đã được dùng làm sách giáo khoa về toán học sơ cấp trong một thời gian dài.

42. *Cần phải chứng minh :*

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD.$$



Hình 23

Ta dựng góc KBC bằng góc ABD (hình 23). Khi đó $\Delta ABK \sim \Delta BCD$ vì $\widehat{ABK} = \widehat{DBC}$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$. Từ đó suy ra $\frac{AB}{BD} = \frac{AK}{CD}$ hay $AB.CD = AK.BD$ (1)

Dễ thấy $\Delta ABD \sim \Delta KBC$ vì $\widehat{ABD} = \widehat{KBC}$ và $\widehat{ADB} = \widehat{BCK}$. Từ đó $\frac{AD}{KC} = \frac{BD}{BC}$ hay $AD.BC = KC.BD$ (2)

Cộng (1) với (2) : $AB.CD + AD.BC = (AK + KC)BD$

hay $AB.CD + AD.BC = AC.BD$.

Đây chính là điều phải chứng minh.

Ptolémée là nhà bác học cổ Hi Lạp, chết vào khoảng năm 168. Những công trình của ông có ý nghĩa lớn đối với sự phát triển của toán học, vật lý, địa lí và nhất là đối với thiên văn học. Ông đã cố gắng xây dựng luận chứng toán học cho thuyết "Địa tâm" của mình. Hệ thống này (địa tâm) của Ptolémée thống trị suốt 14 thế kỉ cho đến khi nhà thiên văn học Ba Lan Nicolas Copernic (1473 - 1543) đưa ra thuyết "Nhật tâm", phản ánh đúng thực chất của thế giới.

43. Từ điều kiện đầu bài, ta có hệ phương trình :

$$x - y = \frac{1}{3}z$$

$$y - z = \frac{1}{3}x$$

$$z - 10 = \frac{1}{3}y$$

Sau khi giải hệ này nhận được $x = 45$, $y = 37\frac{1}{2}$, $z = 22\frac{1}{2}$ (tất cả các bài toán của Diophante được giải với kí hiệu của toán học ngày nay).

44. Từ phương trình $x + y = 10$ ta có $\frac{x+y}{2} = 5$.

Đặt $\frac{x-y}{2} = z$ ta rút ra $x = 5 + z$, $y = 5 - z$.

Khi đó $x^2 + y^2 = (5 + z)^2 + (5 - z)^2$

hay $x^2 + y^2 = 50 + 2z^2$

Từ phương trình thứ hai của hệ rút ra $68 = 50 + 2z^2$. Từ đó $z^2 = 9$.

45. Theo giả thiết thì cạnh huyền bằng $x^3 + x$ còn cạnh góc vuông là $x^3 - x$, theo định lí Pitago thì cạnh góc vuông kia là $\sqrt{(x^3 + x)^2 - (x^3 - x)^2} = x^3$.

Từ đó có phương trình $2x^2 = x^3$, suy ra $x = 2$. Vậy cạnh huyền bằng 10, cạnh góc vuông thứ nhất là 6, cạnh góc vuông thứ hai bằng 8.

46. Kí hiệu x là phần nhỏ của lần chia thứ hai. Khi đó phần lớn của lần chia thứ nhất là 2x, suy ra phần nhỏ của lần chia đầu là $100 - 2x$; do vậy phần lớn của lần chia thứ hai là $300 - 6x$.

Từ đó ta có phương trình :

$$x + (300 - 6x) = 100$$

Rút ra $x = 40$.

Trả lời : Lần chia đầu : phần nhỏ 20, phần lớn 80

Lần chia sau : phần nhỏ 40, phần lớn 60.

47. Kí hiệu 2x là hiệu của hai số cần tìm. Khi đó số lớn sẽ là $10 + x$, còn số nhỏ là $10 - x$.

Theo giả thiết : $(10 + x)(10 - x) = 96$,

hay $100 - x^2 = 96$, từ đó $x^2 = 4$.

Vậy các số phải tìm là 12 và 8.

48. Bài toán dẫn đến giải hệ phương trình :

$$\frac{x}{y} = 3 \ ; \quad \frac{x^2 + y^2}{x + y} = 5.$$

Từ phương trình đầu suy ra $\frac{x^2}{y^2} = 9$, rồi suy ra $\frac{x^2 + y^2}{y^2} = 10$, thay vào phương trình thứ hai : $\frac{10y^2}{x + y} = 5$, hay $10y^2 = 5(x + y)$, chú ý rằng $x = 3y$, nên rút ra $10y^2 = 20y$, vậy $y = 2$, $x = 6$.

49. Bài toán dẫn đến giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x + y)z = 35 & (1) \\ (y + z)y = 27 & (2) \\ (y + z)x = 32 & (3) \end{cases}$$

(1) trừ (2) $\rightarrow xz - xy = 8$ rồi cộng với (3) rút ra :

$$xz = 20 \ ; \ xy = 12 \ ; \ yz = 15.$$

Đáp số : $z = 5$; $x = 4$; $y = 3$.

50. Bài toán này có vô số lời giải.

Ta có thể biểu thị số đầu là tích của x với lập phương của một số, chẳng hạn $2^3 = 8$, tức là có dạng 8x ; số thứ hai là $x^2 - 1$. Nếu vậy thì một trong các điều kiện của đầu bài được thỏa mãn : Tích hai số cộng với số đầu đúng bằng lập phương của một số :

$$8x(x^2 - 1) + 8x = (2x)^3 \qquad (1)$$

Theo điều kiện thứ hai thì $8x(x^2 - 1) + x^2 - 1$ cũng phải là lập phương của một số nào đó, chẳng hạn $(2x - 1)^3$.

Từ đó ta có phương trình để tính x như sau :

$$8x(x^2 - 1) + (x^2 - 1) = (2x - 1)^3 \qquad (2)$$

rút ra $x = \frac{14}{13}$, số đầu là $\frac{112}{13}$, số thứ hai là $\frac{27}{169}$.

Ta nhận thấy rằng tính vô định của nghiệm thể hiện ở chỗ trong (2) ta chỉ cần chọn vế phải sao cho có dạng $(ax + b)^3$ với a, b là các số thực bất kì. Ở cách giải này Diophante chọn a = 2, b = – 1 để cho phương trình trở thành bậc nhất dễ giải.

51. Đặt tổng của ba số I, II, III là :

$$I + II + III = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Hơn nữa, theo giả thiết thì $I + II = x^2$, khi đó $III = 2x + 1$.

Bây giờ giả sử $II + III = (x - 1)^2$.

Từ đó ta nhận được $I = 4x$, $II = x^2 - 4x$, hơn nữa $I + III = 6x + 1$ cần phải là một số chính phương, chẳng hạn $11^2 = 121$.

Ta nhận được phương trình :

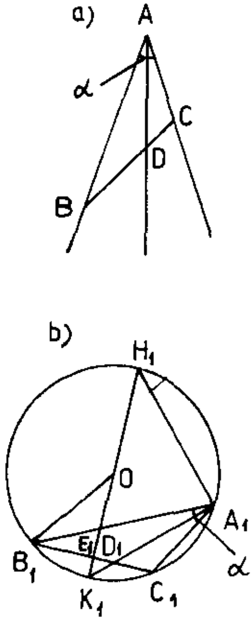
$$6x + 1 = 121$$

Từ đó x = 20.

Do vậy các số sẽ là : I = 80 ; II = 320 ; III = 41.

52. Theo điều kiện đầu bài, cho trước một góc α, đường phân giác của nó và một điểm nằm trên phân giác. Cần phải dựng đoạn BC (hình 24a) sao cho có độ dài đã cho.

Trước tiên dựng một tam giác ABC (hình 24b) ở vị trí tùy



Hình 24

ý. Trong trường hợp này, phải dựng một tam giác với đáy đã cho đối diện với góc α và phân giác đã cho. Giả sử B_1C_1 bằng BC. Dựng cung chứa góc α qua B_1C_1. Từ *trung điểm* E_1 của dây cung B_1C_1 dựng đường vuông góc K_1E_1 với B_1C_1.

Như vậy bài toán đưa đến việc dựng dây cung K_1A_1 sao cho D_1A_1 = DA cho trước.

Xét tam giác $E_1K_1D_1$ và $A_1K_1H_1$

Dễ dàng thấy rằng chúng là những tam giác đồng dạng, do đó :

$$\frac{K_1D_1}{H_1K_1} = \frac{E_1K_1}{K_1A_1}$$

hay là $K_1D_1 \cdot K_1A_1 = E_1K_1 \cdot H_1K_1$

Lưu ý rằng $K_1A_1 = K_1D_1 + D_1A_1$; ta nhận được :

$(K_1D_1)^2 + K_1D_1.D_1A_1$ $= H_1K_1.E_1K_1$. Vì C_1K_1 là cạnh của tam giác vuông $H_1C_1K_1$ nên : $H_1K_1.E_1K_1 = (C_1K_1)^2$,

suy ra : $(K_1D_1)^2 + K_1D_1.D_1A_1 = (C_1K_1)^2$

Ký hiệu $K_1D_1 = x$; $A_1D_1 = p$ và $C_1K_1 = q$ thì ta có :

$$x^2 + px = q^2$$

Vì thế, sau khi nhận được x từ phương trình trên ta sẽ dựng được tam giác $A_1B_1C_1$ với đường phân giác A_1D_1.

Thật vậy, mở compa, khẩu độ $x = K_1D_1$, tìm được D_1. Nối D_1K_1 kéo dài cắt cung chứa góc tại A_1. Do vậy ta dựng được $\Delta A_1B_1C_1$. Sau đó đặt A_1B_1 = AB và dựng BD.

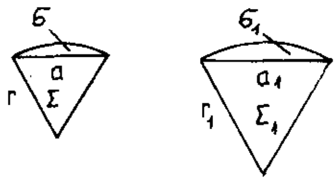
53. Kí hiệu diện tích các hình viên phân là σ, σ_1, diện tích các hình quạt tương ứng là δ S_1, còn diện tích các tam giác tương ứng là Σ , Σ_1 (hình 25). Giả sử a, a_1 và r , r_1 tương ứng là các đáy và bán kính của các viên phân. Khi đó :

$$\sigma = S - \Sigma \ ; \ \sigma_1 = S_1 - \Sigma_1$$

Do các tam giác đồng dạng nên :

$$\frac{\Sigma}{\Sigma_1} = \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \text{ và hơn nữa.}$$

$$\frac{S}{S_1} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^2$$



Hình 25

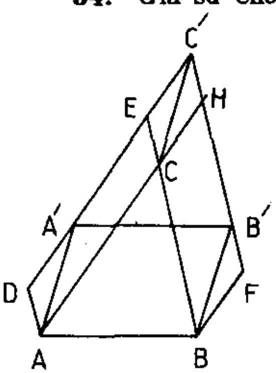
Suy ra $\dfrac{\Sigma}{\Sigma_1} = \dfrac{S}{S_1}$

hay là $\dfrac{\Sigma}{S} = \dfrac{\Sigma_1}{S_1}$; $\dfrac{S}{\Sigma} = \dfrac{S_1}{\Sigma_1}$

Từ đó $\dfrac{S - \Sigma}{\Sigma} = \dfrac{S_1 - \Sigma_1}{\Sigma_1}$ hay $\dfrac{\sigma}{\Sigma} = \dfrac{\sigma_1}{\Sigma_1} = \dfrac{\Sigma}{\Sigma_1}$ hay $\dfrac{\sigma}{\sigma_1} = \dfrac{\Sigma}{\Sigma_1}$

Cuối cùng suy ra $\dfrac{\sigma}{\sigma_1} = \dfrac{a^2}{a_1^2}$.

54. Giả sử cho ΔABC bất kì và trên cạnh AB của nó dựng hình bình hành ABB'A' và đồng thời dựng các hình bình hành ACED và BCHF tương ứng trên AC và BC sao cho DE đi qua A' và HF đi qua B' (hình 26).



Hình 26

Ta phải chứng minh diện tích hình bình hành ABB'A' bằng tổng diện tích các hình bình hành ACED và BCHF. Kéo dài DE và FH cắt nhau tại C'. Nối C với C'.

Trước hết dễ thấy $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (g.c.g). Diện tích hình bình hành ACED và ACC'A' bằng nhau ; diện tích hình bình hành

BB'C'C bằng diện tích hình bình hành BFHC vì cùng đáy và cùng chiều cao.

Bây giờ từ hình ABB'C'A'A lấy đi ΔA'B'C' thì sẽ còn hình bình hành ABB'A'. Nếu như cũng từ hình ABB'C'A'A đó lấy đi ΔABC thì còn lại hai hình bình hành mà tổng diện tích của chúng bằng tổng diện tích của hai hình bình hành ACED và BCHF.

Nhận xét thấy rằng bài toán này là tổng quát hóa của định lí Pitago. Nếu ΔABC là tam giác vuông thì ta sẽ có định lí Pitago.

55. Bài toán dẫn tới việc giải phương trình :

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x$$

Giải phương trình này ta có x = 28. Như vậy học trò của Pitago có 28 người.

59. Gọi x là sức chở của Lừa

y là sức chở của La.

Theo đầu bài ta có hệ phương trình :

$$y + 1 = 2(x - 1)$$
$$y - 1 = x + 1$$

Từ đó dễ dàng rút ra x = 5 ; y = 7.

60. Bài toán dẫn tới giải phương trình :

$$\frac{4}{3}x + x = 12$$

Suy ra $x = 5\frac{1}{7}$ (của ngày)

61. Từ điều kiện bài toán, dẫn tới giải phương trình :

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$$

Giải ra có x = 84. Do vậy Diophante sống được 84 tuổi.

Về cuộc đời của Mêtrôđo (người viết bài toán này) không ai biết rõ, cả thời gian sinh và mất. Trong lịch sử, ông là tác giả các bài toán hay dưới dạng thơ. Những bài toán – thơ này được phổ biến rộng rãi lúc đương thời.

TRUNG HOA

Nền văn hóa Trung Hoa, trong đó có toán học, có nguồn gốc từ thời cổ đại. Nhiều phát minh quan trọng trong khoa học và kĩ thuật của các nhà bác học Trung Hoa là động lực cho những phát minh khác trên thế giới.

Chẳng hạn, họ đã phát minh ra la bàn (vào thế kỉ thứ III trước CN), máy ghi địa chấn (thế kỉ II) máy đo tốc độ (tốc kế). Họ biết chế tạo thuốc súng từ lưu huỳnh trước người châu Âu rất lâu (thế kỉ X) ; người Trung Quốc đã nắm được bí quyết sản xuất đồ sành sứ từ thế kỉ thứ VII, trước CN. Trung Hoa còn là đất nước của lụa, sơn mài và vécni. Vào thế kỉ XI, người Trung Hoa đã chế tạo chữ in rời, thực chất không khác gì với hiện đại.

Ở Trung Hoa đã xuất hiện môn thiên văn mô tả, tức là khoa học về các thiên thể và lịch. Từ thời cổ đại, các nhà bác học Trung Hoa đã biết quan sát hệ mặt trời, sự chuyển động của các vì sao. Vào thế kỉ IV trước CN, nhà thiên văn Trung Hoa SHI-SHEN đã lập được bảng sơ đồ các vì sao, trong đó mô tả tới 800 ngôi sao mà một bảng như vậy ở châu Âu (gọi là bản đồ) vào thế kỉ thứ II mới được lập. Đài thiên văn cổ Trung Hoa là đài thiên văn Bắc Kinh, được xây ở ngoại ô Bắc Kinh vào năm 1279.

Tất cả chỉ dẫn và lời giải bài tập trong phần này đều rút ra từ các tài liệu Trung Quốc được trình bày với kí hiệu toán học ngày nay.

62. Bài toán dẫn tới việc giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ 2x + 8y = 8 \end{cases}$$

Dễ dàng rút ra $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$.

Như vậy 1 con bò giá 2 lượng, 1 con cừu giá $\frac{1}{2}$ lượng. Nhân đây, xin nói đến tác phẩm toán học cổ Trung Hoa : "Cửu chương thuật toán" (Cửu chương). Cuốn sách này đã đưa ra các quy tắc và những bài toán áp dụng các quy tắc này, trong đó có các bài toán có tính ứng dụng như đo đất, tính thể tích.

63. Bài toán này dẫn đến giải một phương trình vô định, nghiệm nguyên : giả sử x là số lần xúc thóc bằng xẻng, y là số lần xúc thóc bằng đấu gỗ và z là số lần xúc thóc bằng bát, khi đó ta có hệ phương trình :

$$19x + 1 = 17y + 14 = 12z + 1$$

Từ đó nhận được phương trình vô định :

$$19x = 12z \; ; \; x = \frac{12z}{19}.$$

Vì x, y, z nguyên dương nên có thể đặt $z = 19t$

Khi đó : $17y + 13 = 228t$,

Sau khi chọn giá trị nhỏ nhất của số nguyên dương t sao cho y nguyên, tức là $t = 14$, ta nhận được :

$$x = 168 \; ; \; y = 187 \; ; \; z = 266.$$

Từ đó tính ra số thóc mỗi tên trộm lấy :

Tên trộm đầu tiên lấy 3 tạ 1 yến 9 cân 2 lượng ;

Tên trộm thứ hai lấy 3 tạ 1 yến 7 cân 9 lượng ;

Tên trộm thứ ba lấy 3 tạ 1 yến 9 cân 2 lượng.

64. Bài toán dẫn đến giải hệ phương trình ba ẩn :

$$\begin{cases} a + b + c = p & (1) \\ a^2 + b^2 = c^2 & (2) \\ ab = 2S & (3) \end{cases}$$

Trong đó a, b, c là cạnh ; p là chu vi ; S là diện tích của tam giác đã cho.

Từ (2) và (3) suy ra $(a + b)^2 = 4S + c^2$,

do (1) suy ra $(p - c)^2 = 4s + c^2$

từ đó giải ra $\qquad c = \dfrac{p^2 - 4S}{2p}$

$$a + b = \frac{p^2 + 4S}{2p}$$

để ý tới phương trình (3) thì a, b được xem như là nghiệm của phương trình bậc 2 :

$$X^2 - \frac{p^2 + 4S}{2p} X + 2S = 0.$$

Nhân đây xin nói đến tác phẩm "Nhập môn thuật toán" được in năm 1593. Trong tác phẩm này chứa những quy tắc tính toán quan trọng, dễ nhớ dưới dạng những bài thơ. Đương thời, nó được xem như là "giáo khoa thư" toán học sơ cấp, đồng thời nội dung cuốn sách chứa đựng nhiều thông tin về toán học Trung Hoa cho đến cuối thế kỉ thứ XVI.

65. Lời giải của bài toán, như sau : "khi chia cho 3 dư 2, vậy lấy 140, khi chia cho 5 dư 3, vậy ta lấy 63, khi chia cho 7 dư 2, vậy ta lấy 30. Cộng chúng lại với nhau, nhận được 233, từ đó trừ đi 210, ta có kết quả".

Bài toán này có thể giải một cách đơn giản như sau, nó dẫn tới giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x = 3y + 2 \\ x = 5z + 3 \\ x = 7u + 2 \end{cases}$$

hay $3y + 2 = 5z + 3 = 7u + 2$.

Từ đó rút ra $3y = 7u$; $y = \frac{7u}{3}$.

Do y nguyên, đặt $u = 3t$, t nguyên, khi đó nhận được :

$$y = 7t$$

từ đó $x = 21t + 2$

Do vậy $21t + 2 = 5z + 3$ hay $21t - 5z = 1$.

Từ đây ta chọn cặp nghiệm $t = 1$, $z = 4$, công thức nghiệm tổng quát của phương trình này là :

$$t = 1 + 5q \;;\; z = 4 + 21q,$$

trong đó $q = 0, 1, 2,...$

Vì $x = 21t + 2$, nên $x = 23 + 105q$, $q = 0, 1, 2...$ khi $q = 0$ thì x sẽ nhỏ nhất, tức là $x = 23$, còn khi $q = 1$, $x = 128$; $q = 2$, $x = 233$; $q = 3$, $x = 338$, v.v...

66. Chỉ dẫn : chỉ cần xác định xem 1 bách chứa bao nhiêu mét khối, 1 trượng vuông bằng bao nhiêu mét vuông là đủ. Từ đó ta tính ra chiều cao bằng mét.

67. Trong "Cửu chương thuật toán" đưa ra quy tắc sau : "Lấy 4 (bát), chia cho 3 (đốt dưới), gọi là hệ số dưới, lấy 3 (bát), chia cho 4 (đốt trên), gọi là hệ số trên. Lấy hệ số dưới (lớn) trừ hệ số trên (nhỏ) ta được số bị chia. Rồi lấy 9 trừ đi nửa tổng 3 và 4 ta được số chia. Lấy số bị chia chia cho số chia ta được số bát chỉ chênh lệch thể tích của 2 đốt kề nhau. Hệ số dưới $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ chính là thể tích của đốt thứ hai từ dưới lên. Từ đó dễ dàng tính ra thể tích các đốt còn lại".

Theo quy tắc đó, có thể diễn giải như sau :

1) $\frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12}$ là hiệu số giữa hai hệ số dưới và trên

2) $9 - \frac{4}{2} - \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$ là số chia

3) $\frac{7}{12} : \frac{11}{2} = \frac{7}{66} = d$ là số chênh lệch 2 đốt kề nhau

4) $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ (bát) là thể tích đốt thứ 2 từ dưới lên.

Cách giải bài toán này được "hiện đại hóa" như sau : Trước hết lưu ý 1 cân bằng 16 lạng, 1 lạng bằng 24 phân. Gọi x là khối lượng mỗi thỏi vàng, z là khối lượng mỗi thỏi bạc, ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 9x = 11z & (1) \\ 13 + 8x + z = 10z + x & (2) \end{cases}$$

Bài toán được giải theo phương pháp "giả thiết tạm" (hai lần).

Đầu tiên $x_1 = 3$, khi đó $z_1 = \frac{9x_1}{11} = 2\frac{5}{11}$

Gọi y_1 là "phần thiếu ở vế phải", từ (2) ta có

$$y_1 = \left(\frac{13}{16} + 8.3 + 2\frac{5}{11}\right) - \left(10.2\frac{5}{11} + 3\right)$$

$$= 27.\frac{47}{11.16} - 27.\frac{96}{11.16} = -\frac{49}{11.16}$$

Sau đó $x_2 = 2$, khi đó $z_2 = 1\frac{7}{11}$ và nếu gọi y_2 là "phần thừa ở vế trái" ta có :

$$y_2 = \left(\frac{13}{16} + 1\frac{7}{11} + 8.2\right) - \left(10.1\frac{7}{11} + 2\right) = \frac{15}{11.16}$$

Lập bảng theo kiểu Trung Hoa :

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}$$

trong đó cột trái là "vế trái" còn cột phải là "vế phải".

Ta có : $$x = \frac{2 \cdot \frac{49}{11.6} + 3 \cdot \frac{15}{11.6}}{\frac{49}{11 . 6} + \frac{15}{11.6}} = 2\,\frac{15}{64}$$

Như vậy x = 2 cân 3 lạng 6 phân

Khi đó $$z = \frac{x}{\frac{11}{9}} = 1\frac{53}{64}$$

Như vậy z = 1 cân 13 lạng 6 phân.

69. Theo phương pháp giả thiết tạm (hai lần), tác giả đưa ra quy tắc giải bài toán này như sau : "Giả sử sau 15 ngày thì hai con ngựa gặp nhau, khi đó phần thiếu là 337,5 dặm. Nếu sau 16 ngày mới gặp nhau thì phần thừa là 140 dặm. Lấy phần thừa và thiếu nhân chéo với số lượng ngày giả định rồi cộng lại, được bao nhiêu chia cho tổng của phần thừa và phần thiếu ta xác định được số ngày phải tìm. Nếu phép chia có dư, kết quả là một hỗn số"

Sau n ngày ngựa thứ nhất chạy được :

$$193+(193 + 13)+ (193 + 2.13) +\ldots + [193 + (n - 1). 13] =$$

$$= 193n + 13.\frac{n(n-1)}{2} \text{ (dặm)}$$

Cũng với số ngày trên ngựa thứ hai chạy được :

$$97 + \left(97 - \frac{1}{2}\right) + \left(97 - 2.\frac{1}{2}\right) + \ldots\left[97 - (n-1).\frac{1}{2}\right] =$$

$$= 97n - \frac{1}{2}.\frac{n(n-1)}{2} \text{ (dặm)}$$

Vì vậy sau n ngày tổng quãng đường cả hai con ngựa chạy được là :

$$193n + 13.\frac{n(n-1)}{2} + 97n - \frac{1}{2}.\frac{n(n-1)}{2} =$$

$= 290n + 6\frac{1}{4}(n^2 - n)$ (dặm), cũng chính bằng hai lần quãng đường, tức là 6000 dặm. Từ đây tìm ra được n.

Bây giờ ta diễn giải quy tắc đã nêu trên.

Nếu $n = 15$, phần thiếu là $6000 - 5662\frac{1}{2} = 337\frac{1}{2}$ (dặm)

Nếu $n = 16$, phần thừa là $6140 - 6000 = 140$ (dặm)

Gọi x là số ngày sẽ gặp nhau, thế thì :

$$x = \frac{15.140 + 16.337\frac{1}{2}}{140 + 337\frac{1}{2}} = 15\frac{135}{191} \text{ (ngày)}$$

Từ đây dễ dàng tính ra quãng đường mỗi con ngựa chạy được.

70. Bài toán dẫn đến giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x + 2y = 10 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$$

Đáp số : x = giá mỗi con trâu = $1\frac{13}{21}$ (lượng)

y = giá mỗi con cừu = $\frac{20}{21}$ (lượng)

71. Gọi x là số hộc thóc thu được từ 1 bó lúa năng suất cao
Gọi y là số hộc thóc thu được từ 1 bó lúa năng suất trung bình
Gọi z là số hộc thóc thu được từ 1 bó lúa năng suất thấp
Bài toán dẫn đến giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Giải ra ta có $x = 9\frac{1}{4}$ (hộc)

$y = 4\frac{1}{4}$ (hộc)

$z = 2\frac{3}{4}$ (hộc)

Ở đây không trình bày lời giải "gốc". Song cũng cần nói thêm là người Trung Hoa trong khi giải bài toán này bằng phương pháp "Fan-chen" (tạm dịch là "phân bổ") đã biết đến ma trận và phép biến đổi ma trận của đại số tuyến tính ngày nay, chẳng khác gì quy tắc Cramer trong giải hệ phương trình tuyến tính.

72. Gọi x là số lúa thu được từ 1 bó lúa năng suất cao

Gọi y là số lúa thu được từ 1 bó lúa năng suất trung bình

Gọi z là số lúa thu được từ 1 bó lúa năng suất thấp

Theo bài ra, có hệ phương trình : $\begin{cases} 2x = 1 - y \\ 3y = 1 - z \\ 4z = 1 - x \end{cases}$

Hay đưa về dạng chính tắc :

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & (1) \\ 3y + z = 1 & (2) \\ x + 4z = 1 & (3) \end{cases}$$

Đáp số : $x = \frac{9}{25}$

$y = \frac{7}{25}$

$z = \frac{4}{25}$

73. Tương tự như các bài toán trên, dẫn đến giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x = 1 + y \\ 3y = 1 + z \\ 4z = 1 + x \end{cases}$$

Dạng chính tắc là $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3y - z = 1 \\ -x + 4z = 1 \end{cases}$

Đáp số : $x = \frac{17}{23}$ (yến)

$y = \frac{11}{23}$ (yến)

$z = \frac{10}{23}$ (yến)

74. Gọi x, y, z tương ứng là giá của 1 con trâu, 1 con cừu, 1 con lợn, ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x + 5y = 13z + 1000; \\ 3x + 3z = 9y; \\ 6y + 8z = 5x - 600, \end{cases}$$

Đáp số : x = 1200 (đồng)

y = 500 (đồng)

z = 300 (đồng)

75. Bài toán dẫn đến giải hệ gồm 5 phương trình tuyến tính với 6 ẩn số như sau :

$$\begin{cases} 2x + y = m \\ 3y + z = m \\ 4z + u = m \\ 5u + v = m \\ 6v + x = m \end{cases}$$

trong đó các ẩn số là x, y, z, u, v, m, thêm vào đó, theo yêu cầu của đầu bài thì m được chọn sao cho các số nguyên dương x, y, z, u, v là bé nhất.

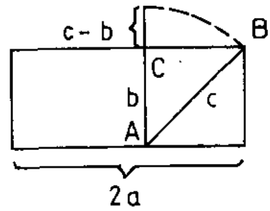
Giải hệ này ta rút ra :

$$x = \frac{265}{721}m,\ y = \frac{191}{721}m,\ z = \frac{148}{721}m;\ u = \frac{129}{721}m,\ v = \frac{76}{721}m.$$

Do đó cần chọn m = 721.

76. Người Trung Hoa cổ đã biết đến định lí Pitago từ rất lâu, mà họ gọi là "định lí về cạnh vuông và cạnh huyền". Những ghi chép về tam giác có các cạnh 3, 4 và 5 có từ gần 2200 năm trước công nguyên ở Trung Hoa đã chứng minh điều này.

Trong cuốn "Cửu chương thuật toán" đã đưa ra quy tắc để giải bài toán này như sau : "Lấy nửa cạnh bể nước nhân với chính nó gọi là phần đầu ; lấy phần nhô lên trên mặt nước 1 trượng nhân với chính nó, được bao nhiêu lấy phần đầu trừ đi nó được một số dư ; rồi đem phần dư này chia cho hai lần phần nhô lên mặt nước, ta có độ sâu của bể nước ; thêm vào phần nhô lên mặt nước ta có độ dài của cây sậy"...



Hình 27

Theo quy tắc trên thì nếu ta gọi độ dài của cạnh bể là 2a, chiều dài cây sậy là c (hình 27), độ sâu của bể là b thì b và c được xác định như sau :

$$b = \frac{a^2 - (c - b)^2}{2(c - b)}$$

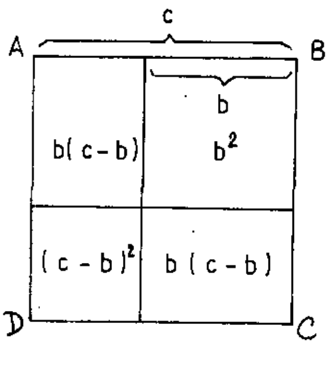
$$c = b + (c - b) = \frac{a^2 + (c - b)^2}{2(c - b)}$$

Thay $b - c = \frac{1}{10}$; $2a = 1$ vào ta sẽ có :

$$b = 1\frac{1}{5} \text{ (trượng)}$$

$$c = 1\frac{3}{10} \text{ (trượng)}$$

Nhưng vấn đề là ở chỗ làm thế nào mà người Trung Hoa đã có được quy tắc nêu trên ? Trong lời bình luận về cuốn sách "Toán học trong chín cuốn", tác giả Lưu Hoa đã giải thích một cách thuyết phục về sự hình thành của quy tắc trên. Ông cho rằng các công thức bằng lời trên có được dựa vào trí tưởng tượng phong



Hình 28

phú của người Trung Hoa cổ. Có lẽ họ đã sử dụng hình vẽ sau đây (hình 28).

Theo quy tắc gọi là "tung - hoành" thì ta có $a^2 = c^2 - b^2$. Từ hình vẽ ta lại có :

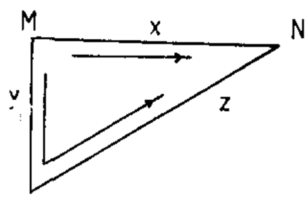
$$a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)^2 + 2b(c-b)$$

từ đó

$$b = \frac{a^2 - (c-b)^2}{2(c-b)}$$

77. Ta giải bài toán này theo quy tắc cổ của người Trung Hoa đưa ra, theo ngôn ngữ hiện đại :

Gọi x là quãng đường mà B đi về hướng đông, còn y là quãng đường mà A đi về hướng nam (theo đầu bài thì y = 10 (dặm)) và z là quãng đường mà A đi theo hướng chéo (đông - bắc) để gặp B, tức là theo cạnh huyền của tam giác vuông (hình 29).



Hình 29

Khi đó $x^2 + 10^2 = z^2$ (1)

và $7x = 3(z + 10)$

từ đó rút ra $z = \frac{7}{3}x - 10$ (2),

thay vào (1) : $x^2 + 10^2 = \left(\frac{7}{3}x - 10\right)^2$

hay $2x^2 - 21x = 0$; $x = 10\frac{1}{2}$ (dặm)

theo (2) thì $z = \frac{7}{3}\cdot\frac{21}{2} - 10 = 14\frac{1}{2}$ (dặm).

Trả lời : A đi được $14\frac{1}{2} + 10 = 24\frac{1}{2}$ (dặm)

B đi được $10\frac{1}{2}$ (dặm).

78. Cả bài toán này cũng có quy tắc giải, được gọi là quy tắc "chuẩn bị sẵn". Hiểu theo ngôn ngữ ngày nay như sau :

Nếu kí hiệu x là chiều rộng cánh cửa, y là chiều cao cánh cửa, d là đường chéo của cánh cửa thì ta có hệ phương trình :

$$d^2 = x^2 + y^2$$
$$m = y - x$$

(m ở đây là chênh lệch giữa chiều cao và chiều rộng). Từ đây ta nhận được một phương trình bậc hai :

$$2x^2 + 2mx + m^2 - d^2 = 0$$

Giải phương trình này ta có :

$$x_{1,2} = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{m^2 - d^2}{2}}$$

hay $$x_{1,2} = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}}$$

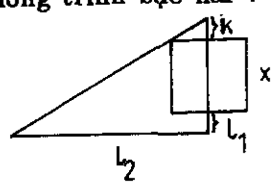
Vì x phải là số dương nên :

$$x = \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}} - \frac{m}{2}$$

Còn y sẽ là : $y = \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}} + \frac{m}{2}$.

Quy tắc "chuẩn bị sẵn" này nói lên một điều thú vị là : dường như người Trung Hoa cổ đã biết giải cả phương trình bậc hai !

79. Quy tắc cổ Trung Hoa giải như sau : "số bộ đo được từ cổng phía bắc nhân với hai lần số bộ đi về hướng tây - đó là số bị chia. Cộng thêm số bộ đo từ cổng phía bắc với số bộ đi ra từ cổng phía nam, ta có số chia. Lấy căn bậc hai ta có số đo của cạnh của tòa thánh".

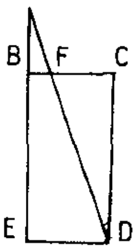


Hình 30

Bài toán này được mô tả trên hình vẽ 30.

Theo các kí hiệu trên hình vẽ, bài toán dẫn tới giải phương trình $x^2 + (k + l_1)x - 2kl_2 = 0$

80. Để giải bài toán, chắc là các nhà toán học cổ Trung Hoa đã biết đến sự đồng dạng của các tam giác vuông (hình 31) :



Hình 31

$\Delta ABF \sim \Delta FCD$,

suy ra $\dfrac{AB}{BF} = \dfrac{x}{FC}$; $x = FC . \dfrac{AB}{BF}$

hay $x = \dfrac{AB(BC - BF)}{BF}$.

Vì thế lời giải "cổ" là : "lấy 5 tấc - đường kính giếng, trừ đi 4 phân (1 tấc bằng 10 phân) được bao nhiêu nhân với 5 tấc - chiều cao của cây sào. Đem số này chia cho 4 phân thì có kết quả phải tìm.

81. Sách "cổ" đưa ra lời giải sau đây :

"Chu vi đáy nhân với nó, rồi nhân với chiều cao, chia làm 36 phần, lấy 1 phần".

Như vậy thể tích hình nón theo người Trung Hoa cổ được tính theo công thức :

$$V = \frac{h}{3} . \frac{c^2}{4\pi}$$

đã giả thiết $\pi = 3$

82. Người Trung Hoa cổ giải bài toán này theo quy tắc sau : "Nhân chu vi trên với chu vi dưới, mỗi chu vi nhân với nhau, cộng tất cả lại, được bao nhiêu nhân với chiều cao, chia làm 36 phần, lấy 1 phần".

Như vậy, thể tích hình nón cụt ở Trung Hoa cổ được tính theo công thức :

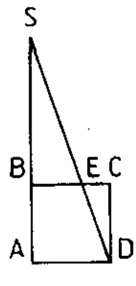
$$V = \frac{(Cc + C^2 + c^2)h}{36}$$

Nó gần đúng với công thức hiện nay, khi coi $\pi = 3$.

$$V = \frac{h}{3} . \frac{Cc + C^2 + c^2}{4\pi}$$

83. Quy tắc "cổ" để giải bài toán là : "lấy tổng hai cạnh góc vuông chia cho tích hai cạnh ấy, ta có cạnh của hình vuông nội tiếp tính bằng bộ".

84. Bài toán có thể được mô tả như hình vẽ 32. Rõ ràng các nhà bác học Trung Hoa đã xét tới các tam giác đồng dạng :



Hình 32

$\Delta SAD \backsim \Delta ECD$, từ đó rút ra :

$$\frac{AS}{CD} = \frac{AD}{EC}$$

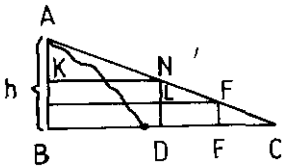
hay là $x = AS = \dfrac{AD.CD}{EC}$

Thay số vào công thức trên, ta có qui tắc bằng lời là :

$$x = \frac{1 \text{ trượng} \times 1 \text{ trượng}}{3 \text{ tấc}}$$

"nhân 1 trượng với nó, chia tích đó cho 3 tấc thì có kết quả" – đó là quy tắc người Trung Hoa cổ đưa ra.

85. Xét các tam giác đồng dạng ΔAKN và ΔNLF (hình 33).



Hình 33

Từ đó có : $\dfrac{AK}{KN} = \dfrac{NL}{LF}$

hay là $\dfrac{x - ND}{BD} = \dfrac{ND - FE}{DE}$

Do đó $x = ND + \dfrac{(ND - FE)BD}{DE}$

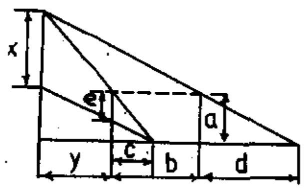
Công thức này là cơ sở hình thành quy tắc cổ được người Trung Hoa đưa ra trong tài liệu "gốc" là : "Lấy chiều cao cột trừ đi 7 tấc tầm nhìn, được bao nhiêu nhân với 53 dặm rồi đem chia cho khoảng cách từ chỗ đứng đến cột là 3 dặm. Sau đó thêm vào thương này chiều cao của cột được kết quả là chiều cao của ngọn núi".

86. Nhà toán học lớn của Trung Hoa vào thế kỉ thứ III là Lưu Hoa là tác giả của nhiều tác phẩm toán học có giá trị, cũng là người đóng góp nhiều cho hình học ứng dụng. Ông rất nổi tiếng trong việc giải những bài toán xác định khoảng cách, hoặc xác định kích thước những vật không tiếp cận được, mà ngày nay những bài toán ấy được xếp vào môn trắc địa học.

Đối với bài toán này, Lưu Hoa đã giải nó theo quy tắc được biểu diễn bằng hai công thức sau :

$$x = \frac{be}{d + c} + e \ ; \ y = \frac{bc}{d - c}$$

trong đó x là chiều cao cây thông, y là khoảng cách từ cây sào đứng trước đến đồi, a là chiều cao của mỗi cây sào, b là khoảng cách giữa hai cây sào, c là khoảng cách từ điểm nằm sau sào thứ nhất đến sào sao cho điểm đó thẳng hàng với đỉnh cây sào và ngọn cây, còn d là khoảng cách từ điểm nằm sau sào thứ hai đến sào thứ hai sao cho điểm đó thẳng hàng với đỉnh sào thứ hai và ngọn cây (hình vẽ 34).



Hình 34

Cũng nên biết rằng, nhiều bài toán khác của Lưu Hoa rất phức tạp. Ông cho lời giải các bài toán này dưới dạng các quy tắc, chủ yếu dựa vào việc xét các tam giác đồng dạng. Do giá trị ứng dụng cao, các bài toán này được phổ biến rộng rãi, không chỉ ở Trung Hoa.

ẤN ĐỘ

Ấn Độ là nước có nền văn minh lớn, rất đa dạng. Hàng ngàn năm trước công nguyên, ở Ấn Độ, người ta đã biết xây dựng hệ thống tưới tiêu, cung cấp nước cho thành phố, xây nhà tầng bằng gạch nung. Người Ấn Độ từ rất xa xưa đã nắm được nghệ thuật làm đồ gốm, phát triển nghề kim hoàn. Rất nhiều tri thức trong các lĩnh vực ngôn ngữ, thiên văn và các môn khoa học khác đã được tích lũy từ thời Ấn Độ cổ xưa.

Các nhà bác học Ấn Độ đã đạt được nhiều thành tựu to lớn nhất trong lĩnh vực toán học. Họ chính là người sáng lập ra môn số học và đại số mà sau này người Hi Lạp đã kế thừa và phát triển. Đáng kể nhất là việc phát minh ra hệ đếm thập phân gồm 10 chữ số Ấn Độ, có cả số 0 – theo tiếng Ấn Độ là "Xunhi", có nghĩa là "không gì cả". Số không đầu tiên được kí hiệu là dấu chấm, sau nhiều thế kỉ nó biến thành một vòng tròn nhỏ, như ngày nay. Không rõ trong các nhà khoa học Ấn Độ ai là người đầu tiên sử dụng hệ thập phân. Nhưng có nhiều căn cứ để cho rằng hệ thập phân được phát minh vào đầu thế kỉ I, mãi đến thế kỉ thứ II thì số 0 mới được sử dụng.

Những nhà toán học Ấn Độ nổi tiếng nhất là Ariapkhata (cuối thế kỉ I) ; Bramagupta (thế kỉ thứ VII) và Bkhacara (thế kỉ XII).

Lưu ý : những chỉ dẫn và lời giải các bài toán cổ Ấn Độ đều dùng các kí hiệu ngày nay.

87. Bài toán này lấy ra từ cảo bản Bakhơsali, tìm được vào năm 1881 khi khai quật ở vùng Bakhơsali, thuộc miền bắc Ấn Độ. Nó được viết trên vỏ cây bạch dương vào khoảng thế kỉ II hoặc III sau CN.

Bài toán được giải bằng quy tắc "giả định", lập luận như sau : Giả sử ẩn số bằng 1, khi đó người đầu cúng 1 (nén vàng) ; người thứ 2 cúng 2 ; người thứ 3 cúng 6 ; người thứ 4 cúng 24. Tổng số phần cúng lễ sẽ là 33. Bây giờ chia 123 cho 33 ta sẽ có số phải tìm – tức là số nén vàng người thứ nhất đã cúng.

88. Theo điều kiện bài toán thì :

$$n + 5 = x^2$$
$$n - 11 = y^2$$

Từ đó rút ra $x^2 - y^2 = 16$ hay $16 = (x + y)(x - y)$

Vậy $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$ (I) hoặc $\begin{cases} x + y = 16 \\ x - y = 1 \end{cases}$ (II)

Với hệ (I) ta có $x = 5$, $y = 3$, suy ra $n = 20$.

Với hệ (II) ta có $x = \frac{17}{2}$, $y = \frac{15}{2}$, do đó $n = 67\frac{1}{4}$.

89. Bài toán dẫn tới phương trình :

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x + 3\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}x\right) + 1 = x$$

Giải ra $x = 15$. Vậy đàn ong có 15 con ong

Bài toán này của nhà toán học Sritđokhara sống vào khoảng thế kỉ VI – X. Ông là tác giả của nhiều bài toán mà sau này được phổ biến rộng rãi.

90. Gọi x là quãng đường của một thiên thạch đã đi được cho đến khi hai thiên thạch gặp nhau, thế thì thời gian đi hết quãng đường đó là $\frac{x}{v_1}$. Khi đó thiên thạch kia đi được một quãng đường là $d - x$ và đi hết $\frac{d-x}{v_2}$ thời gian. Ta có phương trình :

$$\frac{x}{v_1} = \frac{d-x}{v_2}$$

từ đó $$x = \frac{dv_1}{v_1 + v_2}.$$

Bài toán này lấy từ một cuốn sách của nhà toán học Ấn Độ nổi tiếng Ariapkhata. Ông chuyên viết sách về toán học và thiên văn học. Ông đã đưa ra nhiều quy tắc về số học, đại số, hình học và lượng giác rất cần thiết cho ngành thiên văn mà trước hết là bảng số thiên văn. Ông còn là tác giả của nhiều bài toán hay, trong đó có bài toán này và bài 91 sau đây.

91. Nếu cho n các giá trị 1, 2, 3... thì ta có dãy số tam giác tương ứng : 1, 3, 6,... chú ý rằng tổng của 2 số hạng kề nhau của dãy số tam giác bao giờ cũng là một số chính phương :

$$\begin{aligned}
T_n + T_{n-1} &= n^2 \\
T_{n-1} + T_{n-2} &= (n-1)^2 \\
&\dots\dots\dots \\
T_3 + T_2 &= 3^2 \\
T_2 + T_1 &= 2^2
\end{aligned}$$

Cộng những đẳng thức này lại với nhau ta có :

$$T_n + 2(T_{n-1} + T_{n-2} + \ldots + T_2) + T_1 = n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 3^2 + 2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_n + 2(T_{n-1} + T_{n-2} + \ldots + T_2) + T_1 = n.\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - 1$$

$$\Rightarrow 2(T_n + T_{n-1} + \ldots + T_2 + T_1) = T_1 + T_n + n.\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - 1$$

Vì $T_1 = 1$ và $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ nên

$$T_1 + T_2 + \ldots + T_n = \frac{1}{2}.\frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{6}$$

Hay $T_1 + T_2 + \ldots + T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

92. Giả sử người thứ nhất có số đồ vật là a và có số tiền là m, còn người thứ hai có số đồ vật là b và số tiền là p. Khi đó nếu ta gọi x là giá trị của một đồ vật thì ta sẽ có phương trình :

$$ax + m = bx + p,$$

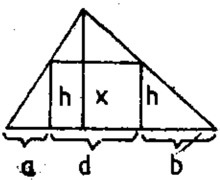
từ đó rút ra $x = \frac{p-m}{a-b}$.

93. Kí hiệu d là đường kính đường tròn, ta có :

$\frac{\pi d^2}{4} = \left(\frac{13}{15}d\right)^2$ từ đó suy ra $\pi = \frac{276}{225}$ hay $\pi = 3,00(4)$. Sai số ở đây gần 4,3%.

Bài toán này lấy ra từ một tác phẩm toán học – hình học cổ Ấn Độ "Sulva - Sutra" (tức là "quy tắc sợi dây thừng"). Cuốn sách là bản chỉ dẫn đặc biệt về xây dựng các bàn thờ cúng, ở đó có nhiều tư liệu hình học ứng dụng quý giá. Người ta thấy rằng ít nhất vào thế kỉ thứ VIII trước công nguyên, các nhà bác học Ấn Độ đã biết đến định lí bình phương cạnh huyền (định lí Pitago), tức là trước Pitago khá lâu. Trong "Sulva - Sutra" định lí này đã được nêu ra. Chính cuốn sách này đã đưa ra qui tắc "Katiaina" (tạm dịch là qui vuông) : "Chia đường kính đường tròn thành 15 phần bằng nhau, lấy 13 phần, thì đó chính là cạnh hình vuông có diện tích bằng diện tích hình tròn", có nghĩa là đề cập tới bài toán ngược với bài toán "cầu phương đường tròn" của các nhà bác học cổ Hi Lạp. Quy tắc " Katiaina" là nội dung của bài toán vừa xét ở trên.

94. Gọi x là chiều cao của cây đèn bạch lạp, h là chiều cao của cây gậy, còn a và b là độ dài bóng của nó về hai phía, d là khoảng cách giữa hai vị trí của cây gậy đó (hình 35).



Hình 35

Từ sự đồng dạng của các tam giác ta có :

$$\frac{x}{x-h} = \frac{a+b+d}{d},$$

$$\text{suy ra } x = \frac{h(a+b+d)}{a+b} = h\left(1 + \frac{d}{a+b}\right).$$

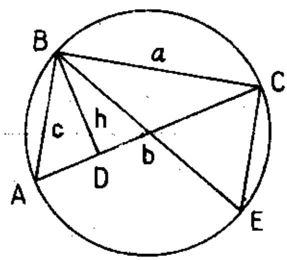
95. Cần chứng minh rằng :

$\frac{ac}{h} = BE$, trong đó BE là đường kính đường tròn ngoại tiếp (hình 36).

Thấy ngay $\Delta ADB \backsim \Delta BCE$

nên $c : h = BE : a$

từ đó $\frac{ac}{h} = BE$.



Hình 36

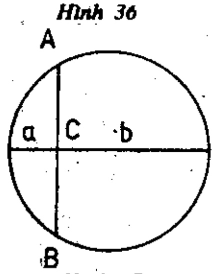
96. Gọi D là đường kính đường tròn, ta cần phải chứng minh

$\frac{AB^2}{4a} + a = D$ (hình 37).

Thật vậy : $AC^2 = ab$ (1)

$$AC = \frac{AB}{2} \quad (2)$$

$$b = D - a \quad (3)$$



Hình 37

Từ (1), (2), (3) rút ra $\frac{AB^2}{4} = a(D - a)$ hay $\frac{AB^2}{4} + a^2 = Da$ (4).
Chia cả 2 vế của (4) cho a, ta có điều cần chứng minh.

97. Cũng với giả thiết và hình vẽ của bài toán 96, ta cần phải chứng minh :

$$a = \frac{1}{2}\left(D - \sqrt{D^2 - AB^2}\right) \; ; \; AB^2 = 4aD - 4a^2$$

Thật vậy : dễ thấy $D^2 - 4aD + 4a^2 = D^2 - AB^2$;

$$(D - 2a)^2 = D^2 - AB^2$$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

98. Bkhascara - Acaria là nhà toán học lỗi lạc Ấn Độ vào thế kỉ XII. Ông sinh năm 1114. Acaria có nghĩa là người thông thái. Bài toán này là một trong những bài toán của ông. Ông đã giải nó bằng phương pháp giả định.

Giả sử số phải tìm là 3. Khi đó theo điều kiện đầu bài thì $3 \times 5 = 15$, một phần 3 của 15 là 5. Do $15 - 5 = 10$ nên đem chia cho 10 ta được 1, thêm vào $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ và $\frac{1}{4}$ của 3 ta nhận được :

$$1 + 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{17}{4}.$$

Số này nhỏ hơn 68 đúng 16 lần.

Do đó số phải tìm là $3.16 = 48$.

99. $\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} =$

$= \sqrt{2 + 3 + 5 + 2\sqrt{2.3} + 2\sqrt{2.5} + 2\sqrt{3.5}} =$

$= \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$

Bài toán này lấy ra từ một cuốn sách về toán học của Bkhascara – Acaria.

100. Ta viết đồng nhất thức :

$$[(m^2 + n^2)x]^2 = [(m^2 - n^2)x]^2 + (2mnx)^2$$

và lấy $(m^2 + n^2)x$ là độ dài cạnh huyền, còn $(m^2 - n^2)x$ và $2mnx$ là độ dài những cạnh góc vuông.

Từ điều kiện đầu bài ta có :

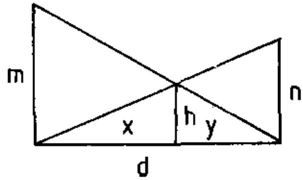
$$(m^2 + n^2)x = mnx^2(m^2 - n^2)$$

hay $\quad m^2 + n^2 = mn(m^2 - n^2)x$

từ đó $\quad x = \dfrac{m^2 + n^2}{mn(m^2 - n^2)}$

Từ đây dễ dàng tính ra các cạnh của tam giác phải tìm.

101. Gọi h là đường cao phải tính, d là khoảng cách giữa 2 cây tre, còn x và y là các đoạn ở trên d (hình 38). Quy tắc của Bkhascara có thể được mô tả như sau :



Hình 38

$$h = \frac{mn}{m + n}\ ;\ x = \frac{dm}{m + n}\ ;\ y = \frac{dn}{m + n}$$

Điều này rút ra một cách dễ dàng từ những đẳng thức hiển nhiên sau :

$$\frac{m}{h} = \frac{d}{y}\ ;\ \frac{n}{h} = \frac{d}{x}\ ;\ x + y = d.$$

102. Giả sử người thứ nhất có 2x − 100 (rupi) (tiền cổ Ấn Độ), còn người thứ hai có x + 100 (rupi). Khi đó điều kiện của bài toán sẽ được thỏa mãn.

Từ điều kiện thứ hai của bài toán ta có :

$$6(2x - 110) = x + 110$$

Giải phương trình này, rút ra x = 70.

Vậy người thứ nhất có 40 (rupi),

người thứ hai có 170 (rupi).

103. Nhân hai vế của phương trình với 4a ($a \neq 0$) ta có :

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac$$

Sau đó thêm b^2 vào hai vế của đẳng thức :

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 + 4ac$$

Suy ra $\quad 2ax + b = \sqrt{b^2 + 4ac}$

Từ đây ta có $\quad x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}.$

Còn đối với giá trị âm của nghiệm thì Bkhascara nhận xét rằng "con người không thích thú gì các số âm trừu tượng" !

104. Giả sử đàn ong có $2x^2$ con, ta có phương trình :

$$2x^2 = x + \frac{16}{9}x^2 + 2$$

hay $\quad 2x^2 - 9x = 18,$

từ đó $x = 6$ và $2x^2 = 72$.

105. Gọi số phải tìm là x, ta có phương trình sau :

$$x^3 + 12x = 6x^2 + 35 \ (*)$$

hay $x^3 + 12x - 6x^2 = 35$, trừ 8 vào 2 vế :

$$x^3 + 12x - 6x^2 - 8 = 27 \ ; \ (x - 2)^3 = 27$$

Do đó $x - 2 = 3$; Vậy $x = 5$.

Thực ra phương trình (*) còn cho hai nghiệm ảo nữa, nhưng Bkhascara không xét đến.

Ngoài ra phương trình (*) có thể được biến đổi để trở thành $(x - 5)(x^2 - x + 7) = 0$,

Từ đây cũng rút ra được $x = 5$, nghiệm ảo rút ra từ phương trình $x^2 - x + 7 = 0$.

106. $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$

$\Leftrightarrow x^4 - 11x^3 + 11x^3 - 121x^2 + 119x^2 - 1309x + 909x - 9999 = 0$

$\Leftrightarrow x^3(x - 11) + 11x^2(x - 11) + 119x(x - 11) + 909(x - 11) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 11)(x^3 + 11x^2 + 119x + 909) = 0$

Từ đây nhận được 2 phương trình :

$$x - 11 = 0 \text{ và } x^3 + 11x^2 + 119x + 909 = 0$$

Giải phương trình đầu, ta có $x = 11$, là nghiệm mà Bkhascara đã chỉ ra. Những nghiệm của phương trình thứ hai là phương trình bậc ba, Bkhascara không xét đến. Bây giờ ta tìm nghiệm của phương trình thứ hai này :

$$x^3 + 11x^2 + 119x + 909 = 0$$

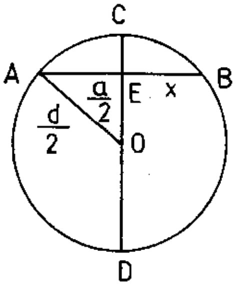
$\Leftrightarrow x^3 + 9x^2 + 2x^2 + 18x + 101x + 909 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x + 9) + 2x(x + 9) + 101(x + 9) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 9)(x^2 + 2x + 101) = 0$

Từ đây ta nhận được $x = -9$ và hai nghiệm ảo nữa.

107. Gọi d là độ dài đường kính CD, a là dây cung đáy AB của viên phân, x là chiều cao CE phải tìm (hình 39) thì : $\frac{a^2}{4} = x(d - x) = xd - x^2$



Hình 39

hay $x^2 - xd + \frac{a^2}{4} = 0$

$$x = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - a^2}}{2};$$

$$x_1 = \frac{d + \sqrt{d^2 - a^2}}{2};$$

$$x_2 = \frac{d - \sqrt{d^2 - a^2}}{2}.$$

108. Phương trình đã cho tương đương với phương trình :

$$(x - b)(y - a) = ab + c$$

Để x, y hữu tỉ, cần đặt $x = b + n$ khi đó :

$$y = a + \frac{ab + c}{n}$$

109. Các nhà toán học Ấn Độ đã sử dụng phương pháp suy luận độc đáo, được áp dụng rộng rãi gọi là "quy tắc đảo" hay "quy tắc ngược". Thực chất của suy luận này là nếu cần tìm một số mà sau khi thực hiện một loạt các phép tính sẽ dẫn tới một số đã biết thì từ số đó thực hiện theo trình tự ngược lại với phép tính ngược.

Chẳng hạn với bài toán này, bắt đầu từ số 2, thực hiện các phép toán ngược theo thứ tự ngược lại :

$$(2.10 - 8)^2 + 52 = 196;$$

$$\sqrt{196} = 14;\ 14.\frac{3}{2}.7.\frac{4}{7} = 84;\ 84 : 3 = 28$$

Vậy số phải tìm là 28.

110. Kí hiệu số khỉ là x, ($x > 0$), bài toán dẫn đến giải phương trình :

$$\frac{x^2}{64} + 0.x + 12 = 0.x^2 + x + 0$$

Rút gọn ta có $x^2 - 64x = -768$

thêm bớt 32^2 :

$$x^2 - 64x + 32^2 = -768 + 1024$$

hay $(x - 32)^2 = 16^2$

$$x - 32 = \pm 16$$

Vậy $x = 48$ và $x = 16$ đều là nghiệm.

111. Bài toán dẫn đến giải phương trình :

$$\left(\frac{x}{5} - 3\right)^2 + 1 = x$$

Giải ra có nghiệm là $x_1 = 50$ và $x_2 = 5$.

Bkhascara nhận xét rằng $\frac{1}{5}.5 - 3$ là số âm nên ta chỉ lấy nghiệm $x = 50$.

112. Theo đầu bài, nếu gọi x là số mũi tên thì ta có :

$$\frac{x}{2} + 4\sqrt{x} + 6 + 3 + 1 = x$$

dẫn đến phương trình $x^2 - 104x + 400 = 0$,

từ đó $x = 52 \pm \sqrt{52^2 - 400}$

hay $x = 52 \pm 48$

Như vậy có hai nghiệm là : $x_1 = 100$; $x_2 = 4$.

Nhưng theo điều kiện của bài toán chỉ có nghiệm x_1 là chấp nhận được.

113. Bài toán dẫn tới giải phương trình :

$$x = 10\sqrt{x} + \frac{1}{8}x + 6$$

trong đó x là số sếu của đàn sếu.

Đặt $u = \sqrt{x}$ sẽ có một phương trình bậc hai :

$$7u^2 - 80u - 48 = 0$$

Sử dụng công thức của Bkhascara, tìm được

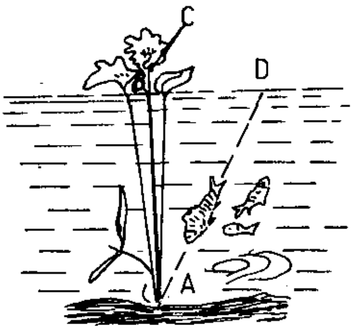
$$u = \frac{80 + \sqrt{6400 + 1344}}{14}$$

hay $u = \dfrac{80 + 88}{14} = \dfrac{168}{14} = 12$

Do đó $x_1 = u^2 = 144$.

Còn nghiệm thứ hai, Bkhascara không lấy vì ứng với giá trị âm của u, hơn nữa x không nguyên, không phù hợp với thực tế.

114. Bài toán có thể được mô tả bằng hình vẽ 40 :



Hình 40

$BC = \frac{1}{2}$ (thước) ; $BD = 2$ (thước). Ta phải xác định AB, gọi là x. Từ đó dẫn đến phương trình :

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + 2^2$$

Từ đây dẫn tới $x + \frac{1}{4} = 4$

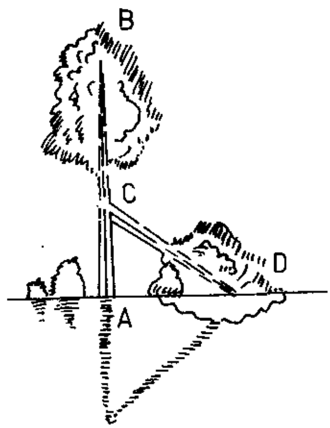
do đó $x = 3\frac{3}{4}$ (thước)

Trả lời : hồ sâu $3\frac{3}{4}$ thước.

115. Bài toán được mô tả bằng hình vẽ 41 : cây dương bị gãy ở điểm C với AC = 3 (thước), AD = 4 (thước).

$$AB = AC + CD$$
$$= AC + \sqrt{AC^2 + AD^2}$$
$$= 3 + \sqrt{9 + 16} = 3 + 5$$
$$= 8 \text{ (thước)}$$

Vậy cây dương cao 8 thước.



Hình 41

116. Theo "quy tắc đảo", bắt đầu từ số 4, ta có :

$\sqrt{4} = 2$; $2 + 1 = 3$; $3^2 = 9$

$9 - 6 = 3$; $3.5 = 15$;

$15 : 3 = 5$

Vậy số phải tìm là 5.

Quy tắc này được sử dụng rộng rãi, không chỉ ở Ấn Độ mà còn được dùng ở vương quốc Ả Rập và sau đó ở châu Âu.

117. Hãy dùng kí hiệu ngày nay để xem người Ấn Độ cổ giải phương trình Pell như thế nào. Trước tiên dùng các số bất kì x_1, y_1, x_2, y_2 để xác định các số b_1, b_2 sao cho các đẳng thức sau được thỏa mãn :

$$ax_1^2 + b_1 = y_1^2 ;$$

$$ax_2^2 + b_2 = y_2^2.$$

hay

$$y_1^2 - ax_1^2 = b_1 ;$$

$$y_2^2 - ax_2^2 = b_2.$$

Rồi nhân hai phương trình này với nhau :

$$(ax_1x_2 + y_1y_2)^2 - a(x_1y_2 + x_2y_1)^2 = b_1b_2.$$

Sau khi đặt $x_2 = x_1$; $y_2 = y_1$ thì $b_1 = b_2$, dẫn đến phương trình :

$$a(2x_1y_1)^2 + b_1^2 = (ax_1^2 + y_1^2)^2$$

Chia 2 vế cho b_1^2 :

$$a\left(\frac{2x_1y_1}{b_1}\right)^2 + 1 = \left(\frac{ax_1^2 + y_1^2}{b_1}\right)^2$$

Từ đó $\quad x = \dfrac{2x_1y_1}{b_1}$; $y = \dfrac{ax_1^2 + y_1^2}{b_1}$

Như vậy các nhà bác học Ấn Độ thu được nghiệm hữu tỉ thỏa mãn phương trình Pell. Bằng cách cho x_1, y_1 những giá trị tùy ý, đôi khi họ cũng thu được nghiệm nguyên dương.

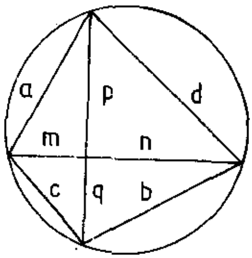
118. Cần chứng minh : $a^2 + b^2 = D^2$ và $c^2 + d^2 = D^2$ trong đó D là đường kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác (hình 42). Từ xưa, theo Acsimet thì $m^2 + n^2 + p^2 + q^2 = D^2$,

theo định lí Pitago thì :

$m^2 + p^2 = a^2$; $n^2 + q^2 = b^2$

từ đó suy ra $a^2 + b^2 = D^2$.

Tương tự suy ra $c^2 + d^2 = D^2$.



Hình 42

MỤC LỤC