

Dạng 3. Một số bài toán liên quan hình lăng trụ đặc biệt

Câu 1. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$.

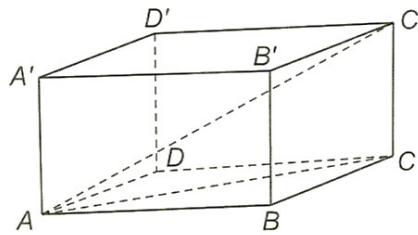
a) Chứng minh rằng $(BDD'B') \perp (ABCD)$.

b) Xác định hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Cho $AB = a, BC = b, CC' = c$. Tính AC' .

Lời giải

a) $BB' \perp (ABCD) \Rightarrow (BDD'B') \perp (ABCD)$.



Hình 7.21

b) Hình chiếu của AC' trên $(ABCD)$ là AC .

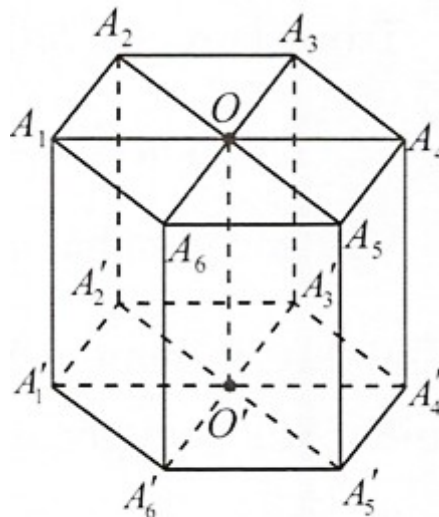
c) $AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Câu 2. Cho hình lăng trụ đứng lục giác đều có cạnh đáy bằng a , cạnh bên $2a$.

a) Tính diện tích xung quanh của lăng trụ.

b) Tính diện tích toàn phần của lăng trụ.

Lời giải



Hình 11

a) Lăng trụ đứng lục giác đều có sáu mặt bên là hình chữ nhật bằng nhau với kích thước lần lượt là $a, 2a$ (Hình 11). Vậy diện tích xung quanh của lăng trụ là:

$$S_{xq} = 6 \cdot a \cdot 2a = 12a^2. \quad \text{b) Vì tam giác } A_1A_2O \text{ đều nên } S_{\Delta A_1A_2O} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Diện tích đáy $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ của lăng trụ là:

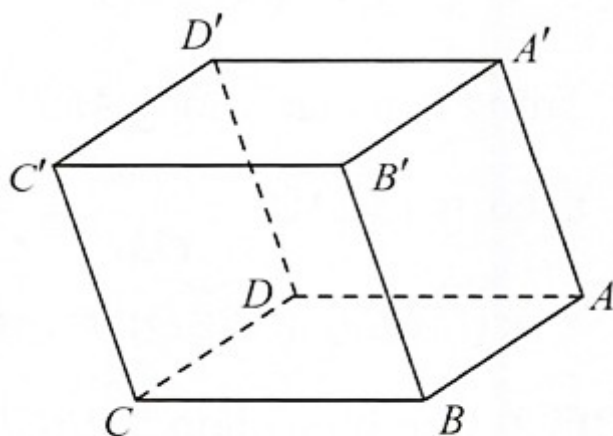
$$S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6} = 6 \cdot S_{\Delta A_1A_2O} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Diện tích toàn phần của lăng trụ là:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6} = 12a^2 + 2 \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = (12 + 3\sqrt{3})a^2.$$

Câu 3. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và có $\angle BAD = \angle BAA' = \angle DAA' = 60^\circ$. Tính tổng diện tích các mặt của hình hộp.

Lời giải



Hình 12

Tam giác ABD có $AD = AB = a$ và $\angle DAB = 60^\circ$.

Suy ra tam giác ABD là tam giác đều, nên $S_{ABCD} = S_{A'B'C'D'} = 2S_{\Delta ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

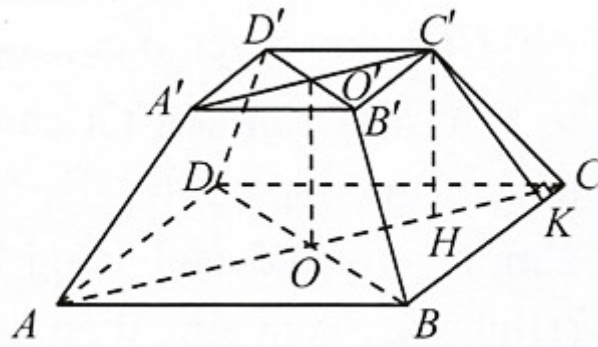
Tương tự, ta có tam giác $A'AB$ và tam giác $A'AD$ là tam giác đều, nên

$$S_{A'BB'A'} = S_{D'C'CD} = S_{D'A'AD} = S_{C'B'BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy tổng diện tích các mặt của hình hộp là $S = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 3a^2\sqrt{3}$.

Câu 4. Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đáy lớn $ABCD$ có cạnh bằng $2a$, đáy nhỏ $A'B'C'D'$ có cạnh bằng a và cạnh bên $2a$. Tính đường cao của hình chóp cụt và đường cao của mặt bên.

Lời giải



Hình 13

Trong hình thang vuông $OO'C'C$, vẽ đường cao $C'H$ ($H \in OC$) (Hình 13).

Ta có: $OC = a\sqrt{2}, O'C' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, suy ra $CH = a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông $C'CH$, ta có:

$$C'H = \sqrt{CC'^2 - CH^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}. \quad \text{Nên } OO' = C'H = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

Trong hình thang $BB'C'C$, vẽ đường cao $C'K$ ($K \in BC$).

Ta có $CK = \frac{BC - B'C'}{2} = \frac{2a - a}{2} = \frac{a}{2}$.

Trong tam giác vuông $C'CK$, ta có:

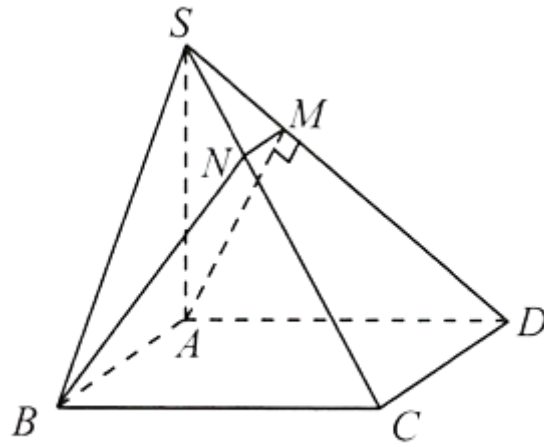
$$C'K = \sqrt{CC'^2 - CK^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a, SA = a\sqrt{3}$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD) .

a) Tìm các giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp.

b) Các giao tuyến ở câu a tạo thành hình gì? Tính diện tích của hình đó.

Lời giải



Hình 5

a) Ta có: $(SAB) \perp (ABCD)$;

$(SAD) \perp (ABCD)$;

$(SAB) \cap (SAD) = SA$

$\Rightarrow SA \perp (ABCD)$.

Dễ dàng chứng minh được $(SAD) \perp (SCD)$.

Vẽ $AM \perp SD (M \in SD) \Rightarrow AM \perp (SCD)$

$\Rightarrow (ABM) \perp (SCD)$ hay (ABM) là mặt phẳng

(α) qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD) .

Trong mặt phẳng (SCD) kẻ $MN \parallel CD (N \in SC)$.

Suy ra: $MN \parallel AB \Rightarrow MN \subset (\alpha)$.

Vậy các giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp là AB, BN, NM, MA .

b) Ta có: $MN \parallel AB$ và $AB \perp AM$ (vì $AB \perp (SAD)$) nên $ABNM$ là hình thang vuông tại A và M .

Tam giác SAD vuông tại A có AM là đường cao nên

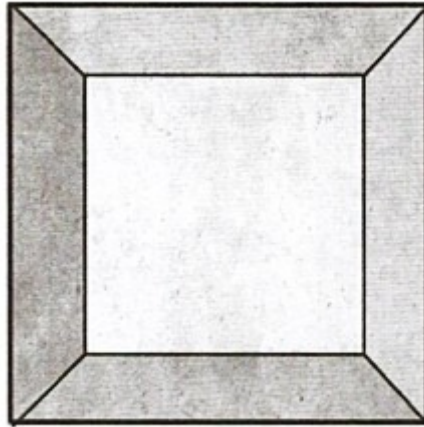
$$\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$MN \parallel CD \Rightarrow \frac{MN}{CD} = \frac{SM}{SD} \Rightarrow \frac{MN}{CD} = \frac{SA^2}{SD^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AD^2} = \frac{3a^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{3}{4}CD = \frac{3}{4}a.$$

Vậy
$$S_{ABNM} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot (MN + AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}a + a \right) = \frac{7a^2\sqrt{3}}{16}$$

Câu 6. Người ta cần sơn tất cả các mặt của một khối bê tông hình chóp cụt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng $2m$, đáy nhỏ có cạnh bằng $1m$ và cạnh bên bằng $2m$ (Hình 14). Tính tổng diện tích các bề mặt cần sơn.

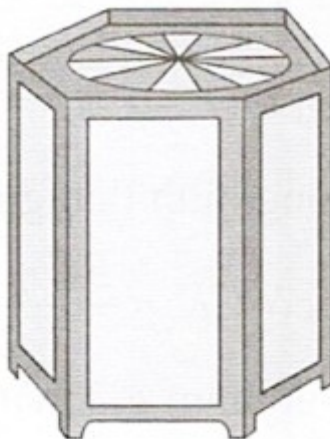


Hình 14

Lời giải

$$S_{tp} = 4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{(2+1)}{2} + 4 + 1 = 5 + 3\sqrt{5} \approx 16,62 (m^2)$$

Câu 7. Một hộp đèn treo trên trần có hình dạng lăng trụ đứng lục giác đều (hình 15), cạnh đáy bằng $10cm$ và cạnh bên bằng $50cm$. Tính tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích một mặt đáy của hộp đèn.



Hình 15

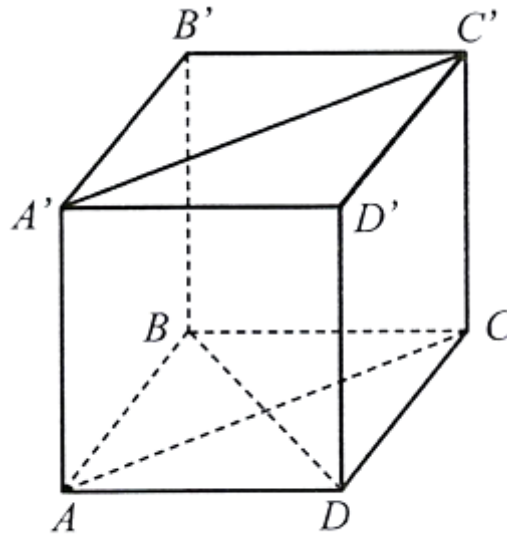
Lời giải

$$\frac{S_{xq}}{S_{day}} = \frac{6 \cdot 50 \cdot 10}{6 \cdot \frac{10^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11,55$$

Câu 8. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $AC \perp (BDD'B')$.

Lời giải

(Hình 44)



Hình 44

Vì $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình lăng trụ tứ giác đều nên $BB' \perp (ABCD)$. Mà $AC \subset (ABCD)$ nên $BB' \perp AC$.

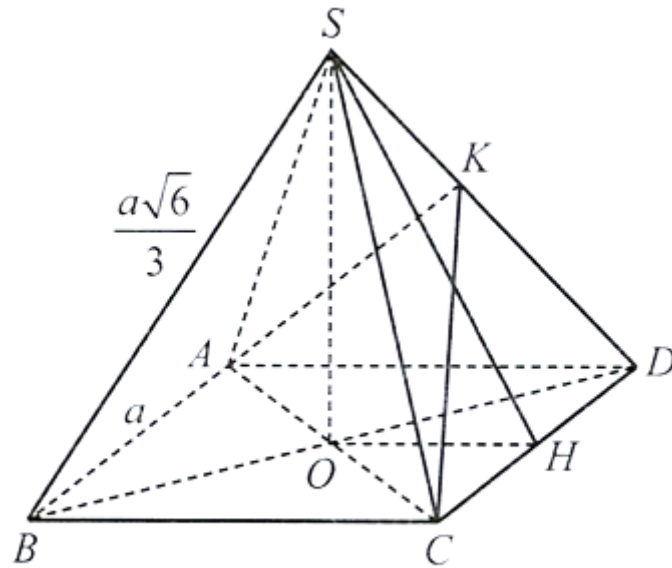
Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$. Mà BB' và BD cắt nhau trong mặt phẳng $(BDD'B')$ nên $AC \perp (BDD'B')$.

Câu 9. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a, SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

- Tính chiều cao của khối chóp $S.ABCD$.
- Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.
- Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$.
- Tính cosin của số đo góc nhị diện $[S, CD, B]$.
- Tính cosin của số đo góc nhị diện $[A, SD, C]$.

Lời giải

(Hình 45)



Hình 45

a) Gọi O là giao điểm của AC và BD . Vì $ABCD$ là hình vuông nên

$OA = OB = OC = OD$, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ nên O là chân đường cao của khối chóp $S.ABCD$.

Khi đó, chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng SO .

Trong hình vuông $ABCD$, ta có:

$$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Xét tam giác } SAO \text{ vuông tại } O \text{ có:}$$

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Vậy chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

b) Diện tích đáy $ABCD$ là: $S_{ABCD} = a^2$. Suy ra thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}.$$

c) Vì $SO \perp (ABCD)$ nên OA là hình chiếu của SA trên $(ABCD)$. Khi đó góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\angle SAO$.

$$\text{Xét tam giác } SAO \text{ vuông tại } O \text{ có: } \cos \angle SAO = \frac{AO}{SA} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $\angle SAO = 30^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° .

d) Gọi H là hình chiếu của O trên CD . Vì OCD là tam giác vuông cân tại O nên H là trung điểm CD . Mà tam giác SCD cân tại S nên $SH \perp CD$.

Suy ra $\angle SHO$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[S, CD, B]$.

Xét tam giác DBC có OH là đường trung bình nên $OH = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$.

Xét tam giác SOH vuông tại O có:

$$SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

Suy ra $\cos \angle SHO = \frac{OH}{SH} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{15}}{6} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

Vậy cosin của số đo góc nhị diện $[S, CD, B]$ bằng $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

e) Gọi K là hình chiếu của A trên SD . Vì $AC \perp BD, AC \perp SO$ và BD, SO cắt nhau trong mặt phẳng (SBD) nên $AC \perp (SBD)$. Mà $SD \subset (SBD)$ nên $AC \perp SD$.

Ngoài ra, $SD \perp AK$ và AK, AC cắt nhau trong mặt phẳng (ACK) nên $SD \perp (ACK)$.

Mà $CK \subset (ACK)$ nên $SD \perp CK$.

Từ đó ta có $\angle KAC$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[A, SD, C]$.

$$KC = \frac{SH \cdot CD}{SD} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{6} \cdot a}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{a\sqrt{15}}{6} \cdot \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

Xét tam giác SCD có:

Tương tự ta có: $KA = \frac{a\sqrt{10}}{4}$. Xét tam giác AKC , ta có:

$$\cos \angle KAC = \frac{KA^2 + KC^2 - AC^2}{2KA \cdot KC} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2 - (a\sqrt{2})^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{10}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{4}} = \frac{-3}{5}$$

Vậy cosin của số đo góc nhị diện $[A, SD, C]$ bằng $\frac{-3}{5}$.

Câu 10. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ cạnh a . Tính:

a) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$;

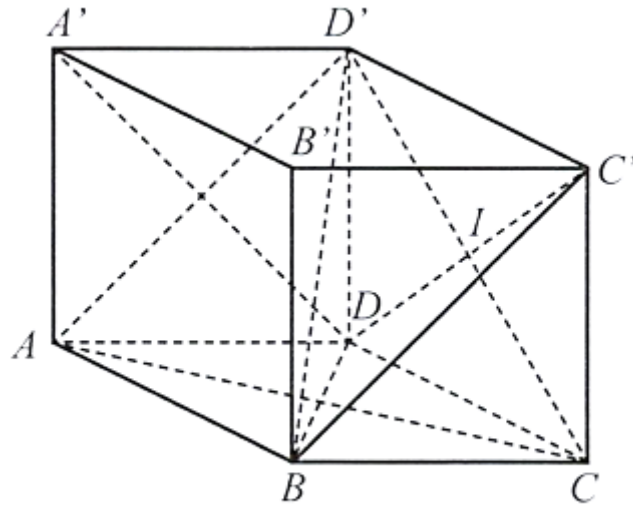
b) Số đo của góc nhị diện $[A, CD, B']$;

c) Tang của góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$;

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng $C'D$ và BC ;

e*) Góc giữa hai đường thẳng BC' và CD' .

Lời giải



Hình 85

a) $d((ABCD), (A'B'C'D')) = a$.

b) Vì $A'B' \parallel DC$ nên A', B', C, D đồng phẳng. Khi đó, góc nhị diện $[A, CD, B']$ là $[A, CD, A']$. Ta có $AD \perp DC, A'D \perp DC$. Số đo của góc nhị diện $[A, CD, B']$ bằng $\angle ADA' = 45^\circ$.

c) Vì $DD' \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\angle BDD'$.

Khi đó, tang của góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

$$\tan \angle BDD' = \frac{DD'}{BD} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

d) Gọi I là giao điểm của CD' và $C'D$. Khi đó $IC \perp BC, IC \perp C'D$.

Suy ra $d(C'D, BC) = IC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

e*) Vì $BC' \parallel AD'$ nên góc giữa hai đường thẳng BC' và CD' bằng góc giữa hai đường thẳng AD' và CD' . Vì tam giác $AD'C$ đều cạnh $a\sqrt{2}$ nên $\angle AD'C = 60^\circ$. Vậy góc giữa hai đường thẳng BC' và CD' bằng 60° .

Dạng 4. Ứng dụng

Câu 11. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Trong cửa sổ ở Hình 7.56, cánh và khung cửa là các nửa hình tròn có đường kính 80 cm , bản lề được đính ở điểm chính giữa O của các cung tròn khung và cánh cửa. Khi cửa mở, đường kính của khung và đường kính của cánh song song với nhau và cách nhau một khoảng d ; khi cửa đóng, hai đường kính đó trùng nhau. Hãy tính số đo của góc nhị diện có hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa cánh, khung cửa khi $d = 40\text{ cm}$.



Hình 7.56

Lời giải

Gọi I, J lần lượt là tâm của nửa hình tròn khung cửa và nửa hình tròn cánh cửa. Khi cửa mở, đường kính của khung và đường kính của cánh song song với nhau, do đó chúng cũng song song với giao tuyến m (qua O) của hai mặt phẳng tương ứng chứa khung và cánh cửa.

Vì O là trung điểm của các cung tròn khung cửa và cánh cửa nên OI vuông góc với đường kính khung cửa, OJ vuông góc với đường kính cánh cửa. Vậy OI, OJ cùng vuông góc với m . Do đó $\angle IOJ$ là một góc phẳng nhị diện của nhị diện có hai cạnh tương ứng chứa cánh và khung cửa.

Ta có $m \perp OI, m \perp OJ$ nên $m \perp IJ$. Vậy IJ cũng vuông góc với các đường kính cánh cửa và khung cửa. Do đó $IJ = 40\text{ cm}$. Mặt khác $OI = OJ = 40\text{ cm}$, suy ra tam giác OIJ đều và $\angle IOJ = 60^\circ$. Vậy để khoảng cách d giữa đường kính cánh cửa và đường kính khung cửa bằng 40 cm thì góc nhị diện có hai cạnh tương ứng chứa cánh và khung cửa có số đo là 60° .

Câu 12. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Từ một tấm tôn hình chữ nhật, tại 4 góc bác Hùng cắt bỏ đi 4 hình vuông có cùng kích thước và sau đó hàn gắn các mép tại các góc như Hình 7.65. Giải thích vì sao bằng cách đó, bác Hùng nhận được chiếc thùng không nắp có dạng hình hộp chữ nhật.



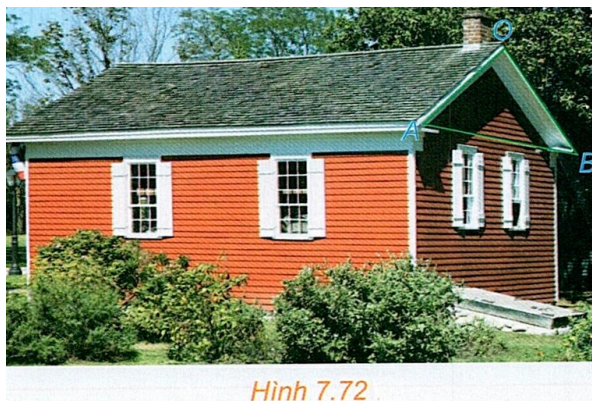
Hình 7.65

Lời giải

Vận dụng kiến thức về hình hộp chữ nhật để tạo dựng hình thực tế. Thùng có đáy và các mặt bên là các hình chữ nhật. Điều đó cũng kéo theo rằng miệng thùng là một hình chữ nhật (có các cạnh

tương ứng song song và bằng cạnh đáy) thuộc mặt phẳng song song với đáy. Vì các cạnh bên của song song với nhau nên thùng là một hình lăng trụ. Mặt khác, mỗi cạnh bên của thùng đều vuông góc với đáy (vì vuông với hai cạnh kề của đáy). Do đó thùng là lăng trụ đứng, hơn nữa, có đáy là hình chữ nhật nên thùng có dạng hình hộp chữ nhật.

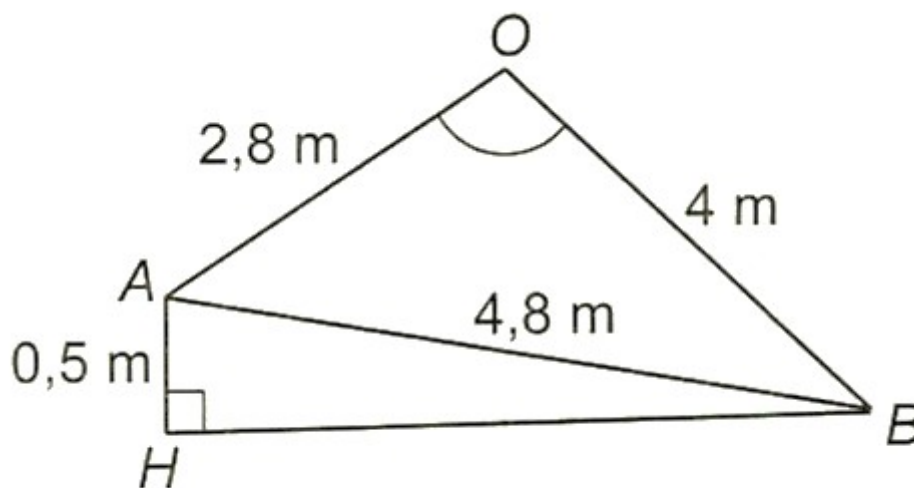
Câu 13. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Hai mái nhà trong Hình 7.72 là hai hình chữ nhật. Giả sử $AB = 4,8\text{ m}$, $OA = 2,8\text{ m}$; $OB = 4\text{ m}$



Hình 7.72

- Tính (gần đúng) số đo của góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái nhà.
- Chứng minh rằng mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt đất phẳng. Lưu ý: Đường giao giữa hai mái (đường nóc) song song với mặt đất.
- Điểm A ở độ cao (so với mặt đất) hơn điểm B là $0,5\text{ m}$. Tính (gần đúng) góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất.

Lời giải



Hình 7.23

a)
$$\cos \angle AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = \frac{1}{28} \Rightarrow \angle AOB \approx 88^\circ$$

- Mặt phẳng (OAB) vuông góc với đường nóc nhà, đường nóc nhà song song với mặt phẳng đất nên mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt phẳng đất.

c) $\sin \angle ABH = \frac{0,5}{4,8} \Rightarrow \angle ABH \approx 6^\circ; \cos \angle BBA = \frac{13}{16} \Rightarrow \angle BBA \approx 36^\circ$. Do đó $\angle BBH = \angle ABH + \angle BBA \approx 42^\circ$.

Câu 14. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Độ dốc của mái nhà, mặt sân, con đường thẳng là tang của góc tạo bởi mái nhà, mặt sân, con đường thẳng đó với mặt phẳng nằm ngang. Độ dốc của đường thẳng dành cho

người khuyết tật được quy định là không quá $\frac{1}{12}$. Hỏi theo đó, góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá bao nhiêu độ? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Ta có: $\tan \alpha \leq \frac{1}{12} \Rightarrow \alpha \leq 4,76^\circ$.

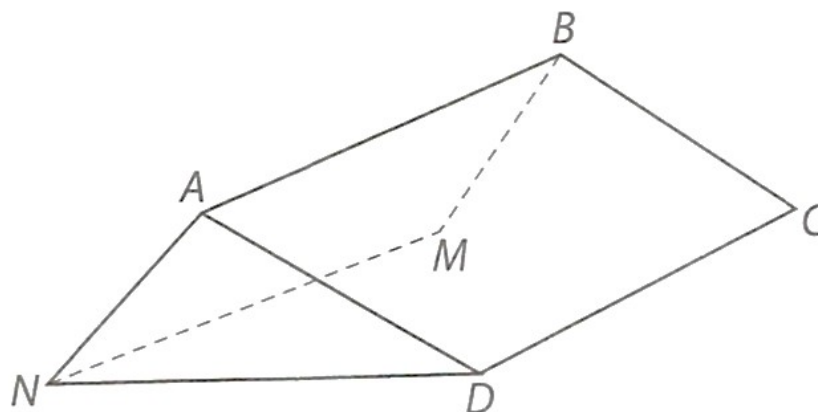
Câu 15. Một ngôi nhà có hai mái trước, sau có dạng là các hình chữ nhật $ABCD, ABMN$, $AD = 4m, AN = 3m, DN = 5m$. Tính góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mái nhà đó (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Lời giải

(H.7.13)

Xét tam giác ADN có: $AN^2 + AD^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = DN^2$ nên tam giác AND vuông tại A . Mặt khác, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ABMN)$ bằng góc DAN . Vậy góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mái nhà bằng 90° .

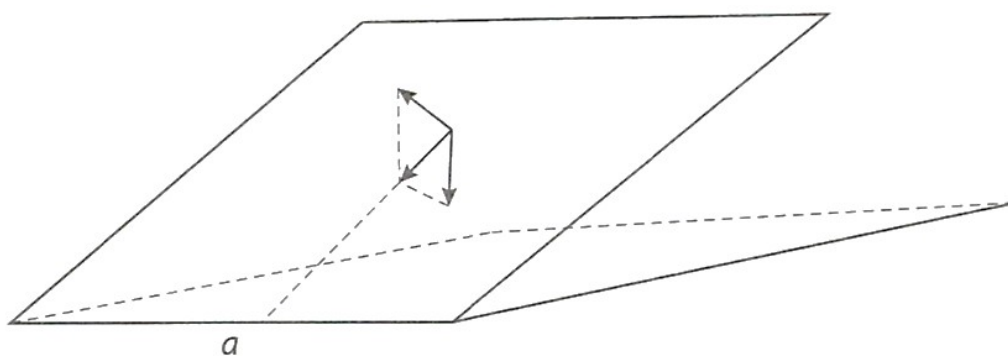


Hình 7.13

Câu 16. Một viên bi được thả lăn trên một mặt phẳng nằm nghiêng (so với mặt phẳng nằm ngang). Coi viên bi chịu tác dụng của hai lực chính là lực hút của Trái Đất (theo phương thẳng đứng, hướng xuống dưới) và phản lực, vuông góc với mặt phẳng nằm nghiêng, hướng lên trên. Giải thích vì sao viên bi di chuyển trên một đường thẳng vuông góc với giao tuyến của mặt phẳng nằm nghiêng và mặt phẳng nằm ngang.

Lời giải

Gọi a là giao tuyến của mặt phẳng nằm ngang và mặt phẳng nằm nghiêng. Phương của lực hút trái đất vuông góc với mặt phẳng nằm ngang, phương của phản lực vuông góc với mặt phẳng nghiêng nên phương của hai lực nói trên đều vuông góc với đường thẳng a , do đó đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) chứa hai phương của hai lực đó. Vì tổng hợp lực của trọng lực và phản lực là một lực có phương nằm trên mặt phẳng (P) nên phương đó vuông góc với a . Do đó, viên bi lăn dọc theo đường thẳng vuông góc với đường thẳng a .

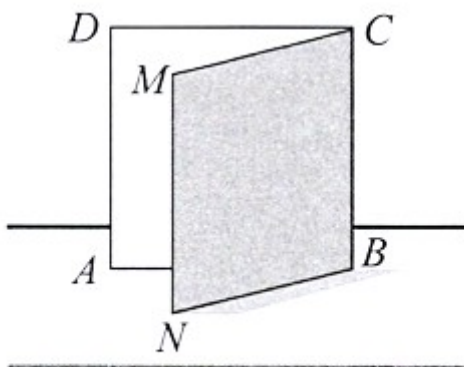


Hình 7.45

Câu 17. Hình 19 minh họa một cánh cửa và khung cửa. Cánh cửa có dạng hình chữ nhật $BCMN$ và khung cửa có dạng hình chữ nhật $ABCD$, ở đó $AB = BN$. Góc mở cửa là góc nhị diện $[A, BC, N]$. Biết chiều rộng BN của cửa là $1,2m$. Khi góc mở cửa có số đo bằng 60° thì khoảng cách giữa A và N bằng bao nhiêu?

Lời giải

(hình 19)



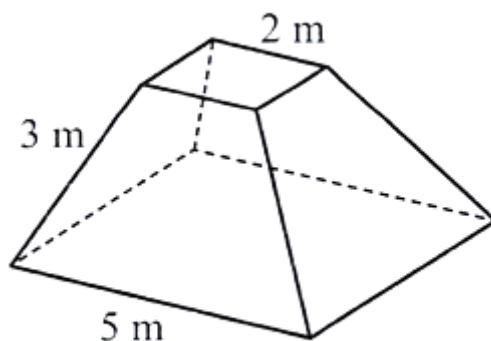
Hình 19

Vì $AB \perp BC$ và $NB \perp BC$ nên góc ABN là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[A, BC, N]$.

Vì góc mở cửa bằng 60° nên số đo góc nhị diện $[A, BC, N]$ bằng 60° , suy ra $\sphericalangle ABN = 60^\circ$.

Xét tam giác ABN cân tại B có $BA = BN = 1,2m$ và $\angle ABN = 60^\circ$. Khi đó tam giác ABN đều, suy ra $AN = 1,2m$, hay khoảng cách giữa A và N bằng $1,2m$.

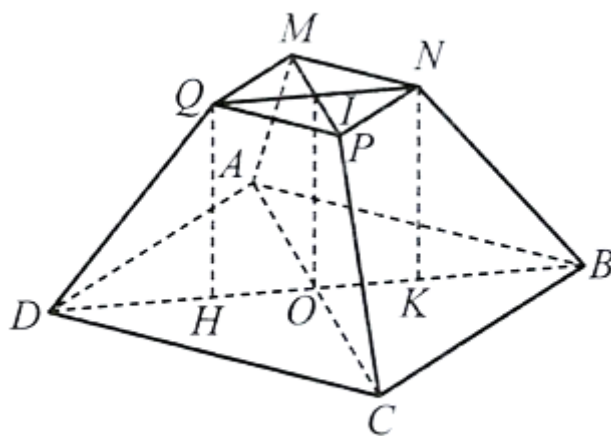
Câu 18. Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (Hình 46). Cạnh đáy dưới dài $5m$, cạnh đáy trên dài $2m$, cạnh bên dài $3m$. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1470000 đồng $/m^3$. Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn).



Hình 46

Lời giải

(Hình 47)



Hình 47

Giả sử chân tháp là khối chóp cụt tứ giác đều $ABCD.MNPQ$ với $ABCD$ là hình vuông cạnh $5m$, $MNPQ$ là hình vuông cạnh $2m$, $AM = BN = CP = DQ = 3m$.

Vì DQ, NB cắt nhau nên D, Q, N, B đồng phẳng. Mà $(ABCD) \parallel (MNPQ)$ nên $NQ \parallel BD$.

Gọi I là giao điểm của MP và NQ , O là giao điểm của AC và BD . Khi đó $IO \perp (MNPQ), IO \perp (ABCD)$.

Xét hình thang $QNBD$, gọi H là hình chiếu của Q trên BD , K là hình chiếu của N trên BD . Vì $IO \perp BD$, $QH \perp BD, NK \perp BD$ trong $(QNBD)$ nên $IO \parallel QH \parallel NK$.

Suy ra $QH \perp (MNPQ), QH \perp (ABCD)$ nên QH bằng chiều cao của khối chóp cụt đều.

Ngoài ra, ta có $QH = NK = IO$ và $QD = NB$. Suy ra $\triangle QHD = \triangle NKB$ nên ta có $HD = BK$.

Bên cạnh đó, $QNKH$ là hình chữ nhật nên $QN = HK$. Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} HD &= \frac{BD - HK}{2} = \frac{\sqrt{AD^2 + AB^2} - \sqrt{MN^2 + MQ^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{5^2 + 5^2} - \sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} (m). \end{aligned}$$

Xét tam giác QHD vuông tại H có:

$$QH = \sqrt{QD^2 - HD^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} (m).$$

Diện tích của hai đáy là: $S_{ABCD} = AB^2 = 5^2 = 25 (m^2)$,

$$S_{MNPQ} = MN^2 = 2^2 = 4 (m^2).$$

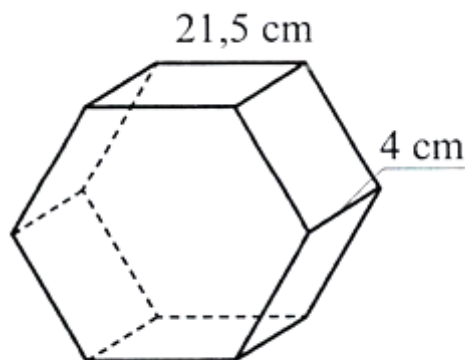
Suy ra thể tích của khối chóp cụt đều là:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} QH (S_{ABCD} + \sqrt{S_{ABCD} \cdot S_{MNPQ}} + S_{MNPQ}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} (25 + \sqrt{25 \cdot 4} + 4) = \frac{39\sqrt{2}}{2} (m^3). \end{aligned}$$

Số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp là:

$$1470000 \cdot \frac{39\sqrt{2}}{2} \approx 40538000 \text{ (đồng)}.$$

Câu 19. Người ta cần đổ bê tông để làm những viên gạch có dạng khối lăng trụ lục giác đều (Hình 48) với chiều cao là 4 cm và cạnh lục giác dài $21,5 \text{ cm}$. Tính thể tích bê tông theo đơn vị centimet khối để làm một viên gạch như thế (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 48

Lời giải

Chia hình lục giác đều trên hai mặt đáy thành 6 hình tam giác đều cạnh $21,5\text{ cm}$. Khi đó diện tích

đáy của viên gạch bằng: $6 \cdot \frac{(21,5)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{5547\sqrt{3}}{8} (\text{cm}^2)$

. Thể tích bê tông cần dùng bằng thể tích

viên gạch, tức là: $4 \cdot \frac{5547\sqrt{3}}{8} \approx 4803,8 (\text{cm}^3)$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>