

Hệ phương trình

I. Hệ phương trình dạng hoán vị vòng quanh.

✎ Bài 1. (Đề thi HSG quốc gia năm 1994)

$$\text{Giải hệ phương trình : } \begin{cases} x^3 + 3x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = y \\ y^3 + 3y - 3 + \ln(y^2 - y + 1) = z \\ z^3 + 3z - 3 + \ln(z^2 - z + 1) = x \end{cases}$$

Giải :

$$\text{Xét hàm số : } f(t) = t^3 + 3t - 3 + \ln(t^2 - t + 1)$$

$$\text{Ta có : } f'(t) = 3t^2 + 1 + \frac{2t - 1}{t^2 - t + 1} > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta viết lại hệ phương trình như sau :

$$\begin{cases} f(x) = y \\ f(y) = z \\ f(z) = x \end{cases}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử : $x = \min\{x, y, z\}$. Lúc đó :

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \Rightarrow y \leq z \Rightarrow f(y) \leq f(z) \Rightarrow z \leq x. \text{ Hay : } x \leq y \leq z \leq x \Rightarrow x = y = z$$

Với : $x = y = z$, xét phương trình : $x^3 + 2x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = 0$

Do hàm số : $\varphi(x) = x^3 + 2x - 3 + \ln(x^2 - x + 1)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên pt có nghiệm duy nhất : $x = 1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $x = y = z = 1$.

✎ Bài toán tổng quát 1. Xét hệ phương trình có dạng :

$$\begin{cases} f(x_1) = g(x_2) \\ f(x_2) = g(x_3) \\ \dots \\ f(x_{n-1}) = g(x_n) \\ f(x_n) = g(x_1) \end{cases}$$

Nếu hai hàm số f và g cùng tăng trên tập A và $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là nghiệm của hệ phương trình, trong đó $x_i \in A, \forall i = 1, 2, \dots, n$ thì $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Chứng minh :

Không mất tính tổng quát giả sử : $x_1 = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Lúc đó ta có : $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow g(x_2) \leq g(x_3) \Rightarrow x_2 \leq x_3 \dots \Rightarrow x_n \leq x_1$.

Vậy : $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_1$

Từ đó suy ra : $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

✍ Bài 2.

$$\text{Giải hệ phương trình : } \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{2x^3+x^2} = y \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{2y^3+y^2} = z \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{2z^3+z^2} = x \end{cases}$$

Giải:

Vì vế trái của các phương trình trong hệ đều dương nên hệ chỉ có nghiệm : $x, y, z > 0$.

Xét hàm số : $f(t) = \left(\frac{1}{4}\right)^{2t^3+t^2}$, ta có :

$$f'(t) = -(2 \ln 4)(3t^2 + t) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2t^3+t^2} < 0, \quad \forall t > 0.$$

Vậy hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Không mất tính tổng quát, giả sử : $x = \min\{x, y, z\}$. Lúc đó :

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow y \geq z \Rightarrow f(y) \leq f(z) \Rightarrow z \leq x \Rightarrow x = z \Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow y = x.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $x = y = z = \frac{1}{2}$.

✍ Bài toán tổng quát 2 . Xét hệ phương trình có dạng (với n lẻ) :

$$\begin{cases} f(x_1) = g(x_2) \\ f(x_2) = g(x_3) \\ \dots \\ f(x_{n-1}) = g(x_n) \\ f(x_n) = g(x_1) \end{cases}$$

Nếu hàm số f giảm trên tập A , g tăng trên A và $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là nghiệm của hệ phương trình, trong đó $x_i \in A, \forall i = 1, 2, \dots, n$ thì $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ với n lẻ.

Chứng minh :

Không mất tính tổng quát giả sử : $x_1 = \min \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Lúc đó ta có :

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow g(x_2) \geq g(x_3) \Rightarrow x_2 \geq x_3 \dots \Rightarrow x_n \leq x_1 \Rightarrow f(x_n) \geq f(x_1) \Rightarrow x_1 \geq x_2.$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

Từ đó suy ra : $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

✍ Bài 3.

$$\text{Giải hệ phương trình : } \begin{cases} (x-1)^2 = 2y \\ (y-1)^2 = 2z \\ (z-1)^2 = 2t \\ (t-1)^2 = 2x \end{cases}$$

Giải :

Vì vế trái của các phương trình trong hệ không âm nên phương chỉ có nghiệm : $x, y, z, t \geq 0$.

Xét hàm số : $f(s) = (s-1)^2$, ta có : $f'(s) = 2(s-1)$. Do đó hàm số tăng trên khoảng $(1; +\infty)$ và giảm trên $[0; 1]$ (Do $f(s)$ liên tục trên $\mathbb{R}$).

Không mất tính tổng quát, giả sử : $x = \min \{x, y, z, t\}$.

+ Nếu $x \in (1; +\infty) \Rightarrow x, y, z, t \in (1; +\infty)$, do đó theo bài toán tổng quát 1, hệ có nghiệm duy nhất : $x = y = z = t = 2 + \sqrt{3}$.

+ Nếu $x \in [0; 1] \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2y \leq 1$, hay $y \in [0; 1]$, tương tự $\Rightarrow z, t \in [0; 1]$.

Vậy $x, y, z, t \in [0; 1]$. Do đó ta có :

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow y \geq z \Rightarrow f(y) \leq f(z) \Rightarrow z \leq x \Rightarrow x = z.$$

$$\text{Với } x = z \Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow y = t.$$

$$\text{Lúc đó hệ phương trình trở thành : } \begin{cases} (x-1)^2 = 2y \\ (y-1)^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 2y \\ \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2 - \sqrt{3}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm : $x = y = z = t = 2 + \sqrt{3}$ và $x = y = z = t = 2 - \sqrt{3}$.

✍ Bài toán tổng quát 3 . Xét hệ phương trình có dạng (với n chẵn) :

$$\begin{cases} f(x_1) = g(x_2) \\ f(x_2) = g(x_3) \\ \dots \\ f(x_{n-1}) = g(x_n) \\ f(x_n) = g(x_1) \end{cases}$$

Nếu hàm số f giảm trên tập A , g tăng trên A và $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là nghiệm của hệ phương trình, trong đó $x_i \in A, \forall i=1, 2, \dots, n$ thì
$$\begin{cases} x_1 = x_3 = \dots = x_{n-1} \\ x_2 = x_4 = \dots = x_n \end{cases} \text{ với } n \text{ chẵn}.$$

Chứng minh :

Không mất tính tổng quát giả sử : $x_1 = \min \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Lúc đó ta có :

$$x_1 \leq x_3 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_3) \Rightarrow g(x_2) \geq g(x_4)$$

$$\Rightarrow x_2 \geq x_4$$

$$\Rightarrow f(x_2) \leq f(x_4) \Rightarrow g(x_3) \leq g(x_5)$$

$$\Rightarrow x_3 \leq x_5 \dots \dots \dots$$

$$\Rightarrow f(x_{n-2}) \leq f(x_n) \Rightarrow g(x_{n-1}) \leq g(x_1)$$

$$\Rightarrow x_{n-1} \leq x_1 \dots \dots \dots$$

$$\Rightarrow f(x_{n-1}) \geq f(x_1) \Rightarrow g(x_n) \geq g(x_2) \Rightarrow x_n \geq x_2$$

$$\text{Vậy : } x_1 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_1 \Rightarrow x_1 = x_3 = \dots = x_{n-1} ; \quad x_2 \geq x_4 \geq \dots \geq x_n \geq x_2 \Rightarrow x_2 = x_4 = \dots = x_n$$

Phần bài tập ứng dụng phương pháp

☞ 1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = y \\ 2y^3 - 7y^2 + 8y - 2 = z \\ 2z^3 - 7z^2 + 8z - 2 = x \end{cases}$$

☞ 2. Chứng minh với mỗi $a \in R$, hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 = y^3 + y + a \\ y^2 = z^3 + z + a \\ z^2 = x^3 + x + a \end{cases} \text{ có một nghiệm duy nhất .}$$

☞ 3. Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 = y + a \\ y^2 = z + a \\ z^2 = x + a \end{cases}$$

Tìm a để hệ phương trình chỉ có nghiệm với dạng $x = y = z$.

☞ 4. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1^3 - 3x_1 + 2 = 2x_2 \\ x_2^3 - 3x_2 + 2 = 2x_3 \\ \dots \dots \dots \\ x_{99}^3 - 3x_{99} + 2 = 2x_{100} \\ x_{100}^3 - 3x_{100} + 2 = 2x_1 \end{cases}$$

☞ 5. Cho n là số nguyên lớn hơn 1. Tìm a để hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1^2 = x_2^3 - 4x_2 + ax_2 \\ x_2^2 = x_3^3 - 4x_3 + ax_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1}^2 = x_n^3 - 4x_n + ax_n \\ x_n^2 = x_1^3 - 4x_1 + ax_1 \end{cases} \quad \text{có một nghiệm duy nhất .}$$

☞ 6. Cho n là số nguyên lớn hơn 1 và $a \neq 0$. Chứng minh hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1^2 = x_2^3 - 4x_2 + ax_2 \\ x_2^2 = x_3^3 - 4x_3 + ax_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1}^2 = x_n^3 - 4x_n + ax_n \\ x_n^2 = x_1^3 - 4x_1 + ax_1 \end{cases} \quad \text{có nghiệm duy nhất .}$$

☞ 7. Chứng minh với mỗi $a \in R$, hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 = y^3 + y^2 + y + a \\ y^2 = z^3 + z^2 + z + a \\ z^2 = x^3 + x^2 + x + a \end{cases} \quad \text{có một nghiệm duy nhất .}$$

Ii. Hệ phương trình giải được bằng phương pháp lượng giác hoá.

$$\begin{aligned} \text{☞ 1. Giải hệ phương trình : } & \begin{cases} x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1 & (1) \\ (1-x)(1+y) = 2 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Giải. ĐK : $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \end{cases}$

Đặt $x = \cos \alpha$; $y = \cos \beta$ với $\alpha, \beta \in [0; \pi]$, khi đó hệ phương trình :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha \cdot \sin \beta + \cos \beta \cdot \sin \alpha = 1 \\ (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \beta) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \\ \sin \alpha - \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 1 = 0 \end{cases}$$

Đặt $t = \sin \alpha - \cos \alpha$, $|t| \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1-t^2}{2}$

Khi đó ta có : $t - \frac{1-t^2}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 \Rightarrow t = 1$

Với $t = 1$, ta có : $\sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

Nếu : $|x| \leq a (a > 0)$, ta đặt $x = a \cos \alpha$, với $\alpha \in [0; \pi]$

✎ 2. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \sqrt{2}(x-y)(1+4xy) = \sqrt{3} & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Giải . Do $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x, y \in [-1; 1]$. Đặt $x = \sin \alpha, y = \cos \alpha$ với $\alpha \in [0; 2\pi]$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin \alpha - \cos \alpha)(1 + 2\sin 2\alpha) = \sqrt{3}$
 $\Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \cdot 2 \cdot \left(\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 4 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \left(\sin 2\alpha + \sin \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$
 $\Leftrightarrow 8 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 4 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) \left[\cos \frac{\pi}{3} - \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{3}$
 $\Leftrightarrow 2 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right) - 4 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right) \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$
 $\Leftrightarrow 2 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right) - 2 \left[\cos\left(3\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right)\right] = \sqrt{3} \Leftrightarrow -2 \cos\left(3\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$
 $\cos\left(3\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -35^\circ + k120^\circ \\ \alpha = 65^\circ + k120^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

Từ đó suy ra hệ có 6 nghiệm $(x, y) = \{(\sin 65^\circ, \cos 65^\circ), (-\sin 35^\circ, \cos 35^\circ), (\sin 85^\circ, \cos 85^\circ), (-\sin 5^\circ, -\cos 5^\circ), (-\sin 25^\circ, -\cos 25^\circ), (\sin 305^\circ, \cos 305^\circ)\}$

Nếu : $x^2 + y^2 = a (a > 0)$, **ta đặt** $x = \sqrt{a} \sin \alpha, y = \sqrt{a} \cos \alpha$, **với** $\alpha \in [0; 2\pi]$

✎ 3. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2x + x^2 y = y \\ 2y + y^2 z = z \\ 2z + z^2 x = x \end{cases}$$

Giải : Từ các phương trình của hệ, suy ra : $x, y, z \neq \pm 1$. Do đó ta có :

$$\begin{cases} y = \frac{2x}{1-x^2} & (1) \\ z = \frac{2y}{1-y^2} & (2) \\ x = \frac{2z}{1-z^2} & (3) \end{cases}$$

Đặt $x = \tan \alpha$ với $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (4) và sao cho $\tan \alpha, \tan 2\alpha, \tan 4\alpha \neq \pm 1$ (5).

Tương tự bài 2. Hệ phương trình có 7 nghiệm

$$\left(x = \tan \frac{k\pi}{7}, y = \tan \frac{2k\pi}{7}, z = \tan \frac{4k\pi}{7}\right), k = 0, \pm 1, \dots, \pm 3$$

Với mọi số thực x có một số α với $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $x = \tan \alpha$

✎ 4. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x-3z^2x-3z+z^3=0 \\ y-3x^2y-3x+x^3=0 \\ z-3y^2z-3y+y^3=0 \end{cases}$$

Giải . Viết lại hệ phương trình dưới dạng :

$$\begin{cases} x(1-3z^2)=3z-z^3 \\ y(1-3x^2)=3x-x^3 \\ z(1-3y^2)=3y-y^3 \end{cases} \quad (I)$$

Từ đó, dễ thấy nếu (x, y, z) là nghiệm của hệ đã cho thì phải có $x, y, z \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Bởi thế :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3z-z^3}{1-3z^2} & (1) \\ y = \frac{3x-x^3}{1-3x^2} & (2) \\ z = \frac{3y-y^3}{1-3y^2} & (3) \end{cases} \quad (II)$$

Đặt $x = \operatorname{tg} \alpha$ với $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (4) và sao cho $\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} 3\alpha, \operatorname{tg} 9\alpha \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ (5).

Khi đó từ (2), (3), (1) sẽ có : $y = \operatorname{tg} 3\alpha, z = \operatorname{tg} 9\alpha$ và $x = \operatorname{tg} 27\alpha$

Từ đây dễ dàng suy ra (x, y, z) là nghiệm của (II) khi và chỉ khi $y = \operatorname{tg} 3\alpha, z = \operatorname{tg} 9\alpha, x = \operatorname{tg} \alpha$, với α được xác định bởi (4), (5) và $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 27\alpha$ (6).

Lại có : (6) $\Leftrightarrow 26\alpha = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Vì thế α thoả mãn đồng thời (4) và (6) khi và chỉ khi $\alpha = \frac{k\pi}{26}$ với k nguyên thoả mãn : $-12 \leq k \leq 12$. Dễ dàng kiểm tra được rằng, tất cả các giá trị α được xác định như vừa nêu đều thoả mãn (5).

Vậy tóm lại hệ phương trình đã cho có tất cả 25 nghiệm, đó là :

$$\left(x = \operatorname{tg} \frac{k\pi}{26}, y = \operatorname{tg} \frac{3k\pi}{26}, z = \operatorname{tg} \frac{9k\pi}{26} \right), k = 0, \pm 1, \dots, \pm 12$$

✎ 5. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$$

Giải. Nhận xét : $xyz \neq 0$; x, y, z cùng dấu . Nếu (x, y, z) là một nghiệm của hệ thì $(-x, -y, -z)$ cũng là nghiệm của hệ, nên chúng ta sẽ tìm nghiệm x, y, z dương .

Đặt $x = \operatorname{tg} \alpha; y = \operatorname{tg} \beta; z = \operatorname{tg} \gamma$ ($0 < \alpha, \beta, \gamma < 90^\circ$).

$$\text{Hệ} \begin{cases} 3\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = 4\left(\operatorname{tg}\beta + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right) = 5\left(\operatorname{tg}\gamma + \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}\right) & (1) \\ \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha = 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 3\left(\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = 4\left(\frac{1+\operatorname{tg}^2\beta}{\operatorname{tg}\beta}\right) = 5\left(\frac{1+\operatorname{tg}^2\gamma}{\operatorname{tg}\gamma}\right) \Leftrightarrow \frac{3}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{\sin 2\beta} = \frac{5}{\sin 2\gamma}$$

$$\text{Từ (2) suy ra : } \operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = 1 - \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \cot\gamma = \frac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)}{1 - \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Do} \begin{cases} \frac{3}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{\sin 2\beta} = \frac{5}{\sin 2\gamma} \\ 0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}; \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{nên } 2\alpha, 2\beta, 2\gamma \text{ là các góc của một tam giác có số đo } 3$$

cạnh 3, 4, 5. Do tam giác có 3 cạnh 3, 4, 5 là tam giác vuông nên

$$2\gamma = 90^\circ \Rightarrow \gamma = 45^\circ \Rightarrow z = \operatorname{tg}\gamma = 1$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{tg}2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{2y}{1 - y^2} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

Tuyển tập các bài toán hay

II . Hệ phương trình 2 ẩn.

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = \frac{698}{81} & (1) \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải : Giả sử hệ phương trình có nghiệm . Ta thấy (2) tương đương với :

$$x^2 + (y-3)x + (y-2)^2 = 0$$

Để phương trình này có nghiệm đối với x ta phải có :

$$\Delta = (y-3)^2 - 4(y-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \frac{7}{3} \quad (3)$$

Mặt khác phương trình (2) cũng tương đương với : $y^2 + (x-4)y + x^2 - 3x + 4 = 0$

Để phương trình này có nghiệm đối với y ta phải có :

$$\Delta = (x-4)^2 - 4(x^2 - 3x + 4) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{4}{3} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có : $x^4 + y^2 \leq \frac{256}{81} + \frac{49}{9} = \frac{697}{81} < \frac{698}{81}$, không thoả mãn (1).
 Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm .

☞ 2. (Đề thi HSG Quốc Gia năm 1995-1996.Bảng A)

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1 + \frac{1}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{7y}\left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

☞ 3. (Đề thi HSG Quốc Gia năm 1995-1996.Bảng A)

Hãy biện luận số nghiệm thực của hệ phương trình với ẩn x, y :

$$\begin{cases} x^3 y - y^4 = a^2 \\ x^2 y + 2xy^2 + y^3 = b^2 \end{cases}$$

Giải . Điều kiện có nghĩa của hệ : $x, y \in \mathbb{R}$.

Viết lại hệ dưới dạng :

$$\begin{cases} y(x^3 - y^3) = a^2 & (1) \\ y(x+y)^2 = b^2 & (2) \end{cases}$$

Xét các trường hợp sau :

★ Trường hợp 1 : $b = 0$. Khi đó :

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-x \end{cases} \text{ và do vậy : Hệ đã cho } \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y=0 \\ y(x^3 - y^3) = a^2 \end{cases} & (I) \\ \begin{cases} y=-x \\ y(x^3 - y^3) = a^2 \end{cases} & (II) \end{cases}$$

Có (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ -2x^4 = a^2 \end{cases}$

Từ đó : + Nếu $a \neq 0$ thì (I) và (II) cùng vô nghiệm, dẫn đến hệ vô nghiệm .

+ Nếu $a = 0$ thì (I) có vô số nghiệm dạng $(x \in \mathbb{R}, y=0)$, còn (II) có duy nhất nghiệm $(x=0, y=0)$. Vì thế hệ đã cho có vô số nghiệm .

★ Trường hợp 2 : $b \neq 0$. Khi đó, từ (1) và (2) dễ thấy , nếu (x, y) là nghiệm của hệ đã cho thì phải có $x, y > 0$. Vì thế $(2) \Leftrightarrow x = \frac{|b|}{\sqrt{y}} - y$ (3).

Thế (3) vào (1) ta được : $y \left[\left(\frac{|b|}{\sqrt{y}} - y \right)^3 - y^3 \right] = a^2$

Đặt $\sqrt{y} = t > 0$. Từ (4) ta có phương trình sau :

$$t^2 \left[\left(\frac{|b|}{t} - t^2 \right)^3 - t^6 \right] = a^2 \Leftrightarrow t^9 - (|b| - t^3)^3 + a^2 t = 0 \quad (5)$$

Xét hàm số : $f(t) = t^9 - (|b| - t^3)^3 + a^2 t$ xác định trên $[0; +\infty)$ có :

$$f'(t) = 9t^8 + 9(|b| - t^3)^2 t^2 + a^2 \geq 0, \forall t \in [0; +\infty).$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$, và vì thế phương trình (5) có tối đa 1 nghiệm trong $[0; +\infty)$. Mà $f(0) = -|b|^3 < 0$ và $f(\sqrt[3]{|b|}) = |b|^3 + |b|a^2 > 0$, nên phương trình (5) có duy nhất nghiệm, kí hiệu là t_0 trong $(0; +\infty)$. Suy ra hệ có duy nhất nghiệm $\left(x = \frac{|b|}{t_0} - t_0^2, y = t_0^2\right)$.

Vậy tóm lại : + Nếu $a = b = 0$ thì hệ đã cho có vô số nghiệm .

+ Nếu a tùy ý , $b \neq 0$ thì hệ đã cho có duy nhất nghiệm .

+ Nếu $a \neq 0, b = 0$ thì hệ đã cho có vô nghiệm .

4. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình : $\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = m \end{cases}$ (1) có nghiệm .

Giải . + Với $y = 0$ hệ trở thành $\begin{cases} 2x^2 = 1 \\ x^2 = m \end{cases}$. Hệ có nghiệm khi $m = \frac{1}{2}$

+ Với $y \neq 0$, đặt $\frac{x}{y} = t$, hệ trở thành

$$\begin{cases} 2t^2 + t - 1 = \frac{1}{y^2} \\ t^2 + t + 1 = \frac{m}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 + t - 1 = \frac{1}{y^2} \\ t^2 + t + 1 = m(2t^2 + t - 1) \end{cases} \quad (2)$$

Vậy hệ PT (1) có nghiệm (x, y) khi và chỉ khi hệ PT (2) có nghiệm (t, y) .

Xét hệ (2), từ $2t^2 + t - 1 = \frac{1}{y^2}$ suy ra $2t^2 + t - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1 \\ t > \frac{1}{2} \end{cases}$. Do đó hệ (2) có nghiệm (t, y)

$\Leftrightarrow m = \frac{t^2 + t + 1}{2t^2 + t - 1}$ có nghiệm $t \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + t + 1}{2t^2 + t - 1}$ trên khoảng

$(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Ta có : $f(t) = -\frac{t^2 + 6t + 2}{(2t^2 + t - 1)^2}$, $f(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 - \sqrt{7} \\ t = -3 + \sqrt{7} \end{cases}$

Lập bảng biến thiên :

t	$-\infty$	$-3-\sqrt{7}$	-1	$-3-\sqrt{7}$	$\frac{1}{2}$	$-\infty$
$f'(t)$	-	0	+	+	0	-
$f(t)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{14+5\sqrt{7}}{28+11\sqrt{7}}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy để hệ có nghiệm : $m \geq \frac{14+5\sqrt{7}}{28+11\sqrt{7}}$.

5. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3(2+3y)=1 & (1) \\ x(y^3-2)=3 & (2) \end{cases}$

Giải . Rõ ràng nếu $y=\sqrt[3]{2}$ hệ vô nghiệm.

Với $y \neq \sqrt[3]{2}$, từ (2) suy ra $x = \frac{3}{y^3-2}$, thay vào (1) ta có :

$$\frac{27(2+3y)}{(y^3-2)^3} = 1 \quad (3). \text{ Xét hàm số : } f(y) = \frac{27(2+3y)}{(y^3-2)^3} - 1, \text{ ta có : } f'(y) = -\frac{81(8y^3+6y^2+2)}{(y^3-2)^3}$$

Suy ra : $f'(y) = 0 \Leftrightarrow y = -1$

Ta có bảng biến thiên :

y	$-\infty$	-1	$\sqrt[3]{2}$	$+\infty$
$f'(y)$	+	0	-	-
$f(y)$	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên suy ra pt(3) không có nghiệm trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; \sqrt[3]{2})$.

Phương trình có 1 nghiệm $y = -1$ và 1 nghiệm trong khoảng $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$

Dễ thấy $y = 2$ là 1 nghiệm thuộc khoảng $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm : $(-1; -1)$ và $(\frac{1}{2}; 2)$.

☞ 6. (Đề thi HSG Quốc Gia năm 2004 —Bảng B)

Giải hệ phương trình sau :
$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$$

☞ 7. (Đề thi HSG Quốc Gia năm 1998-1999 —Bảng A)

Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} (1 + 4^{2x-y}) \cdot 5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1} \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 \end{cases}$$

Giải .

ĐK: $y^2 + 2x > 0$

Đặt $t = 2x - y$ thì phương trình thứ nhất của hệ trở thành :

$$(1 + 4^t) \cdot 5^{1-t} = 1 + 2^{t+1} \Leftrightarrow \frac{1 + 4^t}{5^t} = \frac{1 + 2^{t+1}}{5} \quad (1)$$

Vế trái là hàm nghịch biến, vế phải là hàm đồng biến trên nên $t=1$ là nghiệm duy nhất của (1).

Vậy $2x - y = 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}$ thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được :

$$y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1) = 0 \quad (2)$$

Vế trái là hàm đồng biến do đó $y = -1$ là nghiệm duy nhất của (2).

Đáp số : $x = 0, y = -1$.

☞ 8. (Đề thi HSG Quốc Gia năm 2000-2001 —Bảng B)

Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5 \\ \sqrt{2x+y} + x - y = 2 \end{cases}$$

Giải :

ĐK có nghĩa của hệ phương trình : $\min\{7x, 2x\} \geq -y$

Đặt : $\sqrt{7x+y} = a$ và $\sqrt{2x+y} = b$. Từ hệ phương trình đã cho ta có hệ :

$$\begin{cases} a + b = 5 & (1) \\ b + x - y = 2 & (2) \end{cases}$$

Nhận thấy : $a^2 - b^2 = 5x$. Kết hợp với (1) suy ra : $b = \frac{(5-x)}{2}$, thế vào (2) ta được :

$$\frac{5-x}{2} + x - y = 2 \Leftrightarrow x = 2y - 1 \quad (3)$$

Thế (3) vào (2) ta có : $\sqrt{5y-2} + y - 1 = 2 \Rightarrow y = \frac{11 - \sqrt{77}}{2}$

Thế vào (3) suy ra nghiệm của hệ là: $x = 10 - \sqrt{77}, y = \frac{11 - \sqrt{77}}{2}$.

☞ 9. Cho hệ phương trình 2 ẩn x, y :

$$\begin{cases} k(x^2 + \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1) = yx \\ k(\sqrt[3]{x^8} + x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1) + (k-1)\sqrt[3]{x^4} = 2y\sqrt[3]{x^4} \end{cases}$$

1. Xác định k để hệ phương trình có nghiệm .

2. Giải hệ phương trình với $k = 16$.

☞ 10. (Đề thi HSG Quốc Gia năm 1995-1996 —Bảng A)

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{3x} \cdot \left(1 + \frac{1}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{7y} \cdot \left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

Giải . ĐK có nghĩa của hệ : $x \geq 0, y \geq 0$ và $x^2 + y^2 \neq 0$.

Để thấy , nếu (x, y) là nghiệm của hệ đã cho thì phải có $x > 0, y > 0$. Do đó :

$$\text{Hệ đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{x+y}\right) = \frac{2}{\sqrt{3x}} \\ \left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{\sqrt{3x}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} & (1) \\ 1 = \frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} & (2) \end{cases}$$

Nhân (1) với (2) theo vế ta được :

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{3x} - \frac{8}{7y} \Leftrightarrow 21xy = (x+y)(7y-3x) \Leftrightarrow (y-6x)(7y+4x) = 0 \Leftrightarrow y = 6x \text{ (vì } x > 0, y > 0 \text{)}$$

Thay vào (2) và giải ra ta được : $x = \frac{11+4\sqrt{7}}{21}, y = \frac{22+8\sqrt{7}}{7}$.Thử lại ta thấy thoả mãn yêu cầu bt.

☞ Iii. HỒ PHƯƠNG TRÌNH 3 ẨN.

☞ 1. (Đề thi HSG Tỉnh Quảng Ngãi 1995-1996)

Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \end{cases}$$

☞ 4. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 12x^2 - 48x + 64 = y^3 \\ 12y^2 - 48y + 64 = z^3 \\ 12z^2 - 48z + 64 = x^3 \end{cases}$$

☞ 5. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^{19} + y^5 = 1890z + z^{2001} \\ y^{19} + z^5 = 1890x + x^{2001} \\ z^{19} + x^5 = 1890y + y^{2001} \end{cases}$$

Giải . Chúng ta sẽ chứng minh hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $x = y = z = 0$.

Giả sử (x, y, z) là một nghiệm của hệ phương trình khi đó $(-x, -y, -z)$ cũng là một nghiệm của hệ phương trình , nên không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết : có ít

nhất hai trong ba số x, y, z không âm. Ví dụ $x \geq 0, y \geq 0$. Từ phương trình thứ nhất ta suy ra $z \geq 0$.

Mặt khác nếu $0 < u \leq 1$ thì $1890 + u^{2000} > 2 \geq u^{18} + u^4$

Nếu $u > 1$ thì $1890 + u^{2000} > 1 + u^{2000} > 2\sqrt{u^{2000}} = 2u^{1000} > u^{18} + u^4$

Do đó $1890u + u^{2001} > u^{19} + u^5$ với mọi $u > 0$.

Bởi vậy nếu cộng từng vế của HPT ta suy ra $x = y = z = 0$. đpcm

☞ 6. Tìm điều kiện cần và đủ của m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} x^2 = (2+m)y^3 - 3y^2 + my \\ y^2 = (2+m)z^3 - 3z + mz \\ z^2 = (2+m)x^3 - 3x + mx \end{cases}$$

☞ 7. (Đề thi HSG Quốc Gia năm 2004 —Bảng A)

Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x^3 + x(y-z)^2 = 2 \\ y^3 + y(z-x)^2 = 30 \\ z^3 + z(x-y)^2 = 16 \end{cases}$$

☞ 8. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2(x+1) = 2(y^3 - x) + 1 \\ y^2(y+1) = 2(z^3 - y) + 1 \\ z^2(z+1) = 2(x^3 - z) + 1 \end{cases}$$

Giải . Viết lại hệ đã cho dưới dạng :

$$\begin{cases} x^3 + x^2 + 2x = 2y^3 + 1 \\ y^3 + y^2 + 2y = 2z^3 + 1 \\ z^3 + z^2 + 2z = 2x^3 + 1 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} f(x) = g(y) \\ f(y) = g(z) \\ f(z) = g(x) \end{cases}$$

Trong đó $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ và $g(t) = 2t^3 + 1$. Nhận xét rằng $g(t), f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ vì : $f'(t) = 3t^2 + 2t + 2 > 0, g'(t) = 6t^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hệ đã cho tương đương với hệ : $\begin{cases} x = y = z \\ h(x) = 0 \end{cases} \quad (4)$

Trong đó $h(t) = t^3 - t^2 - 2t + 1$. Nhận xét rằng $h(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và :

$$h(-2) < 0, h(0) > 0,$$

$h(1) < 0, h(2) > 0$ nên phương trình $h(t) = 0$ có cả 3 nghiệm phân biệt đều nằm trong $(-2; 2)$

Đặt $x = 2\cos u, u \in (0; \pi)$. Khi đó $\sin u \neq 0$ và (4) có dạng :

$$\begin{cases} x = y = z = 2\cos u, u \in (0; \pi) \\ 8\cos^3 u - 4\cos^2 u - 4\cos u + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = y = z = 2\cos u, u \in (0; \pi) \\ \sin u (8\cos^3 u - 4\cos^2 u - 4\cos u + 1) = 0 \end{cases}$$

Hay $\begin{cases} x = y = z = 2\cos u, u \in (0; \pi) \\ \sin 4u = \sin 3u \end{cases} \quad (5).$

Giải hệ phương trình (5) ta thu được $u \in \left\{ \frac{\pi}{7}; \frac{3\pi}{7}; \frac{5\pi}{7} \right\}$ và $\begin{cases} x = y = z = 2\cos u, u \in (0; \pi) \\ u \in \left\{ \frac{\pi}{7}; \frac{3\pi}{7}; \frac{5\pi}{7} \right\} \end{cases}$

☞ 9. Tìm tất cả các bộ ba số dương (x, y, z) thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x^{2004} = y^6 + z^6 \\ 2y^{2004} = z^6 + x^6 \\ 2z^{2004} = x^6 + y^6 \end{cases}$$

Giải :

Giả sử (x, y, z) là một bộ ba số dương thỏa mãn hệ PT đã cho . Không mất tính tổng quát , giả sử $0 < x \leq y \leq z$. Như vậy :

$$\begin{cases} 2x^{2004} = y^6 + z^6 \geq x^6 + x^6 \\ 2z^{2004} = x^6 + y^6 \leq z^6 + z^6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{2004} \geq x^6 \\ z^{2004} \leq z^6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ z \leq 1 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 1$$

Đảo lại, dễ thấy $x = y = z = 1$ là một bộ ba số dương thỏa mãn yêu cầu bài toán .

☞ 10. Tìm điều kiện của m để hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 + xy - yz - zx = 1 \\ y^2 + z^2 + yz = 2 \\ x^2 + z^2 + xz = m \end{cases}$$

☞ 11. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^5 - x^4 + 2x^2y = 2 \\ y^5 - y^4 + 2y^2z = 2 \\ z^5 - z^4 + 2z^2x = 2 \end{cases}$$

☞ 12. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3(y^2 + 3y + 3) = 3y^2 \\ y^3(z^2 + 3z + 3) = 3z^2 \\ z^3(x^2 + 3x + 3) = 3x^2 \end{cases}$$

☞ 13. Tìm tất cả các số thực a sao cho hệ phương trình sau có nghiệm thực x, y, z :

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} = a-1 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1} = a+1 \end{cases}$$

Giải. ĐK: $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$

Hệ phương trình tương đương với hệ phương trình :

$$\begin{cases} (\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}) + (\sqrt{y-1} + \sqrt{y+1}) + (\sqrt{z-1} + \sqrt{z+1}) = 2a \\ (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) + (\sqrt{y+1} - \sqrt{y-1}) + (\sqrt{z+1} - \sqrt{z-1}) = 2 \end{cases}$$

Đặt $u = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$; $v = \sqrt{y-1} + \sqrt{y+1}$; $s = \sqrt{z-1} + \sqrt{z+1}$

Do $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$ nên $u \geq \sqrt{2}, v \geq \sqrt{2}, s \geq \sqrt{2}$. Ngược lại nếu $u \geq \sqrt{2}, v \geq \sqrt{2}, s \geq \sqrt{2}$, ta có :

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{2}{u} \Rightarrow \sqrt{x+1}=\frac{1}{2}\left(u+\frac{2}{u}\right) \Rightarrow x=\frac{1}{4}\left(u^2+\frac{4}{u^2}\right) \geq 1$$

Tương tự đối với y, z .

Do đó bài toán của ta đưa về bài toán tương đương : Tìm tất cả các số thực a sao cho hệ phương trình sau có nghiệm $u \geq \sqrt{2}, v \geq \sqrt{2}, s \geq \sqrt{2}$:

$$\begin{cases} u+v+s=2a \\ \frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{s}=1 \end{cases} \quad (1)$$

+ **Điều kiện cần** : Giả sử hệ phương trình (1) có nghiệm . Theo bất đẳng thức Bunhia ta có : $2a=(u+v+s)\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{s}\right) \geq 9 \Rightarrow a \geq \frac{9}{2}$

+ **Điều kiện đủ** : Giả sử $a \geq \frac{9}{2}$. Chúng ta sẽ chứng minh hệ phương trình (1) có nghiệm

Lấy $s=3$ (thoả mãn $s \geq \sqrt{2}$) . Khi đó (1) tương đương với : $\begin{cases} u+v=2a-3 \\ u.v=\frac{3(2a-3)}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow u, v$ là hai nghiệm của tam thức bậc hai : $t^2-2(2a-3)t+\frac{3(2a-3)}{2}$

$$\Rightarrow u, v=\frac{2a-3 \pm \sqrt{(2a-3)(2a-9)}}{2}$$

Chú ý : Đặt $h=2a-9 \geq 0 \Rightarrow (h+6-2\sqrt{2})^2 > (h+3)^2 > h(h+6)$. Tức là :

$$(2a-3)-2\sqrt{2} > \sqrt{(2a-3)(2a-9)} \Rightarrow u > \sqrt{2}, v > \sqrt{2} .$$

Như vậy hệ phương trình (1) có nghiệm $u \geq \sqrt{2}, v \geq \sqrt{2}, s \geq \sqrt{2}$.

Tóm lại các số thực a cần tìm là tất cả các số thực $a \geq \frac{9}{2}$.

✎ 14. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 20\left(x+\frac{1}{x}\right)=11\left(y+\frac{1}{y}\right)=2007\left(z+\frac{1}{z}\right) \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}$$

✎ 15. (Đề thi HSG Quốc Gia năm 2005-2006 —Bảng A)

$$\text{Giải hệ phương trình : } \begin{cases} \sqrt{x^2-2x+6}.\log_3(6-y)=x \\ \sqrt{y^2-2y+6}.\log_3(6-z)=y \\ \sqrt{z^2-2z+6}.\log_3(6-x)=z \end{cases}$$

Giải . ĐK xác định $x, y, z < 6$. Hệ đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} \log_3(6-y) = \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}} & (1) \\ \log_3(6-z) = \frac{y}{\sqrt{y^2-2y+6}} & (2) \\ \log_3(6-x) = \frac{z}{\sqrt{z^2-2z+6}} & (3) \end{cases}$$

Nhận thấy $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+6}}$ là hàm tăng, còn $g(x) = \log_3(6-x)$ là hàm giảm với $x < 6$.

Nếu (x, y, z) là một nghiệm của hệ phương trình ta chứng minh $x=y=z$. Không mất tính tổng quát giả sử $x = \max\{x, y, z\}$ thì có hai trường hợp :

1) $x \geq y \geq z$. Do $g(x)$ là hàm giảm, suy ra : $\log_3(6-y) \geq \log_3(6-z) \geq \log_3(6-x)$
 $\Rightarrow x \geq z \geq y$. Do $y \geq z$ nên $z = y$. Từ (1) và (2) suy ra : $x=y=z$.

2) $x \geq z \geq y$.

Tương tự $\log_3(6-y) \geq \log_3(6-x) \geq \log_3(6-z)$

$\Rightarrow z \geq x \geq y$. Do $x \geq z$ nên $z = x$. Từ (1) và (3) suy ra : $x=y=z$.

Phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm duy nhất $x=3$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất : $x=y=z=3$.

✎ 16. (Đề thi HSG Quốc Gia năm 2005-2006 —Bảng B)

$$\text{Giải hệ phương trình : } \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 = y \\ y^3 + 3y^2 + 2y - 5 = z \\ z^3 + 3z^2 + 2z - 5 = x \end{cases}$$

Giải . Giả sử $x = \max\{x, y, z\}$. Xét hai trường hợp :

1) $x \geq y \geq z$

$$\begin{aligned} \text{Từ hệ trên ta có : } & \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 \leq x \\ z^3 + 3z^2 + 2z - 5 \geq z \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} (x-1)[(x+2)^2 + 1] \leq 0 \\ (z-1)[(z+2)^2 + 1] \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 1 \leq z \end{cases} \end{aligned}$$

2) $x \geq z \geq y$

$$\begin{aligned} \text{Từ hệ trên ta có : } & \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 2x - 5 \leq x \\ y^3 + 3y^2 + 2y - 5 \geq y \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} (x-1)[(x+2)^2 + 1] \leq 0 \\ (y-1)[(y+2)^2 + 1] \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 1 \leq y \end{cases} \end{aligned}$$

Cả hai trường hợp đều cho $x = z = y = 1$. Thử lại ta thấy $x = z = y = 1$ là nghiệm của hệ phương trình. Tóm lại hệ đã cho có nghiệm duy nhất : $x = z = y = 1$.

☞ 17. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{8}{3} \\ x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{118}{9} \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + z\sqrt{z} - \frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{y\sqrt{y}} - \frac{1}{z\sqrt{z}} = \frac{728}{27} \end{cases}$$

☞ 18. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = -y(x + z) \\ x^2 + x + y = -2yz \\ 3x^2 + 8y^2 + 8xy + 8yz = 2x + 4z + 2 \end{cases}$$

Giải. Hệ đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} x(x + y) + y(y + z) = 0 \\ x(x + 1) + y(2z + 1) = 0 \\ 4(x + y)^2 + 4(y + z)^2 = (x + 1)^2 + (2z + 1)^2 \end{cases}$$

Xét : $\vec{a} = (x, y)$, $\vec{b} = (x + y, y + z)$, $\vec{c} = (x + 1, 2z + 1) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, $4\vec{b}^2 = \vec{c}^2$

+ Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ thì $x = y = 0$, $z = -\frac{1}{2}$.

+ Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ thì $\vec{b}$ và $\vec{c}$ cộng tuyến nên : $\vec{c} = \pm 2\vec{b}$, từ đó ta có :

$$x = 0, y = z = \frac{1}{2}.$$

Tóm lại hệ có hai nghiệm : $\left(0; 0; -\frac{1}{2}\right), \left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

IV. HỒ PHẪNG TRÌNH NỀN. ($n > 3, n \in \mathbb{N}$)

☞ 1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^{1996} \\ x_2 + x_3 = x_4^{1996} \\ \dots\dots\dots \\ x_{1995} + x_{1996} = x_1^{1996} \\ x_{1996} + x_1 = x_2^{1996} \end{cases}$$

Giải : Gọi X là giá trị lớn nhất của các nghiệm $x_i, i = 1, \dots, 1996$ và Y là giá trị bé nhất của chúng. Thế thì từ phương trình đầu ta có :

$$2X \geq x_1 + x_2 = x_3^{1996}$$

Từ đó đối với các phương trình của hệ ta có : $2X \geq x_k^{1996}, \forall k=1,2,\dots,1996$

Hay là ta có : $2X \geq X^{1996}$ suy ra : $2 \geq X^{1995}$ (vì $X > 0$) (1)

Lập luận một cách tương tự ta cũng đi đến : $2 \leq Y^{1995}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $X^{1995} = Y^{1995} = 2$

Nghĩa là ta có : $x_1 = x_2 = \dots = x_{1996} = \sqrt[1995]{2}$

✎ 2. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \frac{x_1 - a_1}{b_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{b_n} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = c \end{cases}$$

với $b_1, b_2, \dots, b_n \neq 0, \sum_{i=1}^n b_i \neq 0$

Giải . Đặt : $\frac{x_1 - a_1}{b_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{b_n} = t$

Ta có : $x_i = tb_i + a_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n a_i + t \sum_{i=1}^n b_i \Rightarrow c = \sum_{i=1}^n a_i + t \sum_{i=1}^n b_i \Rightarrow t = \frac{\left(c - \sum_{i=1}^n a_i \right)}{\sum_{i=1}^n b_i}$

$$\Rightarrow x_i = a_i + b_i \frac{\left(c - \sum_{i=1}^n a_i \right)}{\sum_{i=1}^n b_i}$$