

Chương III

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chuyên đề 16. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA ĐƯỢC VỀ DẠNG

$$ax + b = 0 \text{ (hay } ax = -b \text{)}$$

A. Kiến thức cần nhớ

a) Phương trình không chứa mẫu số

- Thực hiện phép tính để bỏ dấu ngoặc.
- Chuyển các hạng tử chứa ẩn sang một vế, các hằng số sang vế kia.
- Thu gọn và giải phương trình nhận được.

b) Phương trình chứa mẫu số bằng số

Trước hết phải quy đồng mẫu số rồi nhân hai vế với mẫu chung để khử mẫu số rồi thực hiện như a)

Chú ý: Không nhất thiết phải thực hiện theo các bước như trên. Tùy theo phương trình mà vận dụng linh hoạt các bước đó.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1:

$$a) \frac{x^2 + 2}{3} + \frac{3(2x - 1)}{4} - 6 = \frac{(2x + 3)(x - 2)}{6} - \frac{5 + 8x}{12} \quad (1)$$

$$b) 3x - \frac{\frac{x+5}{2} - \frac{x}{4}}{6} = \frac{4x - \frac{5-2x}{3}}{4} - 2x + 1 \quad (2)$$

Giải

$$a) (1) \Leftrightarrow 4(x^2 + 2) + 9(2x - 1) - 72 = 2(2x^2 - x - 6) - 5 - 8x$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 8 + 18x - 9 - 72 = 4x^2 - 2x - 12 - 5 - 8x$$

$$\Leftrightarrow 18x + 8x + 2x = -12 - 5 - 8 + 9 + 72$$

$$\Leftrightarrow 28x = 56 \Leftrightarrow x = 2.$$

Nhận xét:

- Ở câu a) ta có thể bỏ qua bước quy đồng mẫu hai vế mà viết thẳng (1)

$\Leftrightarrow 4(x^2 + 2) + 9(2x - 1) - 72 = 2(2x^2 - x - 6) - 5 - 8x$ vì thực chất nhân hai vế của phương trình (3) với 12 được ngay kết quả này.

- Sau khi khai triển hai vế có chứa hai hạng tử bằng nhau $4x^2$, ta có thể bỏ đi (thực chất khi chuyển vế được hai hạng tử đối nhau nên tổng bằng 0).

$$b) (2) \Leftrightarrow 3x - \frac{2x+10-x}{24} = \frac{12x-5+2x}{12} - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow 72x - 2x - 10 + x = 24x - 10 + 4x - 48x + 24$$

$$\Leftrightarrow 72x - 2x + x - 24x - 4x + 48x = 24 \Leftrightarrow 91x = 24 \Leftrightarrow x = \frac{24}{91}.$$

Nhận xét: Câu b) sau khi nhân hai vế với 24, hai vế xuất hiện hai số bằng nhau là -10 ta có thể bỏ đi (vì khi chuyển vế $-10+10=0$).

Ví dụ 2: Tìm các giá trị của y sao cho biểu thức A và B sau đây có giá trị bằng nhau:

$$A = \frac{y-2}{2} - \frac{9-5y}{8} - \frac{2-y}{6} + \frac{3(5y-9)}{4}; \quad B = \frac{45-25y}{8} + \frac{2-y}{3} - \frac{5y-9}{2}.$$

Tìm cách giải: Để tìm các giá trị của y sao cho hai biểu thức A và B có giá trị bằng nhau ta quy về việc giải phương trình $A=B$.

Giải

Để $A=B$ ta phải có:

$$\begin{aligned} \frac{y-2}{2} - \frac{9-5y}{8} - \frac{2-y}{6} + \frac{3(5y-9)}{4} &= \frac{45-25y}{8} + \frac{2-y}{3} - \frac{5y-9}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{y-2}{2} + \frac{y-2}{6} + \frac{y-2}{3} &= \frac{5(9-5y)}{8} + \frac{9-5y}{2} + \frac{9-5y}{8} + \frac{3(9-5y)}{4} \\ \Leftrightarrow (y-2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) &= (9-5y) \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{3}{4} \right) \\ \Leftrightarrow (y-2) \left(\frac{3}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \right) &= (9-5y) \left(\frac{5}{8} + \frac{4}{8} + \frac{1}{8} + \frac{6}{8} \right) \\ \Leftrightarrow (y-2).1 &= (9-5y).2 \\ \Leftrightarrow y-2 &= 18-10y \\ \Leftrightarrow 11y &= 20 \Leftrightarrow y = \frac{20}{11}. \end{aligned}$$

Nhận xét: Ta không quy đồng mẫu các phân thức mà biến đổi bài toán một cách linh hoạt, vừa đổi dấu phân thức sau đó chuyển vế để xuất hiện các nhân tử chung là $(y-2)$ và $(9-5y)$.

Ví dụ 3: Giải phương trình sau với m là hằng số (tham số):

$$m(mx-2) = x(3m+4) + 2 \quad (1)$$

Giải

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow m^2x - 2m = 3mx + 4x + 2 \\ &\Leftrightarrow m^2x - 3mx - 4x = 2m + 2 \Leftrightarrow x(m^2 - 3m - 4) = 2(m+1) \\ &\Leftrightarrow x(m+1)(m-4) = 2(m+1). \end{aligned}$$

- Nếu $m \neq -1$ và $m \neq 4$ thì $x = \frac{2}{m-4}$;
- Nếu $m = 4$ phương trình có dạng $0x = 10$. Vô nghiệm;
- Nếu $m = -1$ phương trình có dạng $0x = 0$. Phương trình nghiệm đúng với mọi giá trị của x.

Ví dụ 4: Giải phương trình sau với b là tham số:

$$\frac{x-2+b}{b+3} + \frac{x-b}{b-3} = \frac{-4b-x}{9-b^2} \quad (1)$$

Giải

Điều kiện $b \neq \pm 3$

Phương trình (1) biến đổi thành $(x - 2 + b)(b - 3) + (x - b)(b + 3) = x + 4b$

$$\Leftrightarrow xb - 3x - 2b + 6 + b^2 - 3b + xb + 3x - b^2 - 3b = x + 4b$$

$$\Leftrightarrow 2xb - x = 12b - 6 \Leftrightarrow (2b - 1)x = 6(2b - 1).$$

* Nếu $b \neq 0,5$ và $b \neq \pm 3$ thì $x = 6$;

* Nếu $b = 0,5$ thì phương trình trở thành $0x = 0$. Phương trình nghiệm đúng $\forall x$.

Ví dụ 5: Giải phương trình:

$$\frac{4029x + 2014 + 2.2015}{2014.2015} = \frac{4037x - 2.2019 - 3.2018}{2018.2019}$$

* *Tìm cách giải:* Ở phương trình trên nếu quy đồng mẫu thức hai vế thì mẫu thức chung quá lớn. Ta nhận xét $4029x = 2014x + 2015x$; $4037x = 2018x + 2019x$ do đó ta biến đổi và giải phương trình như sau:

Giải

$$\frac{4029x + 2014 + 2.2015}{2015.2014} = \frac{2014x + 2014 + 2015x + 2.2015}{2015.2014}$$

$$= \frac{2014(x + 1) + 2015(x + 2)}{2014.2015} = \frac{x + 1}{2015} + \frac{x + 2}{2014}$$

$$\frac{4037x - 2.2019 - 3.2018}{2018.2019} = \frac{2019x - 2.2019 + 2018x - 3.2018}{2018.2019}$$

$$= \frac{2019(x - 2) + 2018(x - 3)}{2018.2019} = \frac{x - 2}{2018} + \frac{x - 3}{2019}$$

Phương trình trở thành

$$\frac{x + 1}{2015} + \frac{x + 2}{2014} = \frac{x - 2}{2018} + \frac{x - 3}{2019} \Leftrightarrow \left(\frac{x + 1}{2015} + 1 \right) + \left(\frac{x + 2}{2014} + 1 \right) = \left(\frac{x - 2}{2018} + 1 \right) + \left(\frac{x - 3}{2019} + 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x + 2016}{2015} + \frac{x + 2016}{2014} - \frac{x + 2016}{2018} + \frac{x + 2016}{2019} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2016) \left(\frac{1}{2015} + \frac{1}{2014} - \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} \right) = 0$$

$$\text{Do } \frac{1}{2015} + \frac{1}{2014} - \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} \neq 0.$$

Do đó $x + 2016 = 0$

Vậy $x = -2016$

Ví dụ 6: Tìm giá trị của a để:

a) Phương trình $(2x - 3)(1 + 3a) - 5(x + 6) = 25(x + 3)(2 - x) + 5(a - 2) + 50$. (1) có nghiệm $x = -3$;

b) Phương trình $(x - a)(x + 5) - 4ax + 17 = (x + a)(x - 6) - 3x$ (2) có nghiệm gấp năm nghiệm của phương trình:

$$3x(x - 5) - 4(x - 4) = 3(x - 1)(x + 3) \quad (3)$$

Tìm cách giải: a) Để x_0 là nghiệm của phương trình $A(x) = B(x)$ ta phải có $A(x_0) = B(x_0)$. Do đó thay $x = -3$ vào hai vế của phương trình (1) ta được một phương trình mới với ẩn là a .

b) Trước hết giải phương trình (3) tìm nghiệm x_0 . Nghiệm của phương trình (2) sẽ bằng $5x_0$.

Giải

a) Để $x = -3$ nghiệm của phương trình (1) ta phải có:

$$\begin{aligned} (-6 - 3)(1 + 3a) - 5(-3 + 6) &= 25(-3 + 3)(2 + 3) + 5(a - 2) + 50 \\ \Leftrightarrow -9(1 + 3a) - 15 &= 5(a - 2) + 50 \Leftrightarrow -9 - 27a - 15 = 5a - 10 + 50 \\ \Leftrightarrow -27a - 5a &= -10 + 50 + 9 + 15 \Leftrightarrow -32a = 64 \Leftrightarrow a = -2. \end{aligned}$$

b) Giải phương trình (3): $3x(x - 5) - 4(x - 4) = 3(x - 1)(x + 3)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 3x^2 - 15x - 4x + 16 &= 3x^2 + 9x - 3x - 9 \\ \Leftrightarrow -15x - 4x - 9x + 3x &= -9 - 16 \Leftrightarrow -25x = -25 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Nghiệm của phương trình (2) gấp 5 nghiệm của phương trình (3) nghĩa là phương trình (2) có nghiệm là 5. Thay $x = 5$ vào hai vế phương trình (2) ta có:

$$\begin{aligned} (5 - a)(5 + 5) - 20a + 17 &= (5 + a)(5 - 6) - 15 \\ \Leftrightarrow 50 - 10a - 20a + 17 &= -5 - a - 15 \\ \Leftrightarrow -10a - 20a + a &= -5 - 15 - 50 - 17 \Leftrightarrow -29a = -87 \Leftrightarrow a = 3 \end{aligned}$$

Ví dụ 7: Giải các phương trình:

$$a) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{9^2}\right) (18x - 45) = 2(x - 1) + 97. \quad (1)$$

$$b) \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{199.200}\right) \cdot 2017x = \frac{2016}{101} + \frac{2016}{102} + \dots + \frac{2016}{199} + \frac{2016}{200}. \quad (2)$$

$$c) \left(\frac{10}{1.3} + \frac{10}{3.5} + \dots + \frac{10}{9.11}\right) \cdot 2,2x - [0,8 \cdot (7,5 - 2,5x)] : 0,25 = 12. \quad (3)$$

Tìm cách giải: Các phương trình trong ví dụ 7 xuất hiện các dãy tổng hoặc tích các phân số hoặc các biểu thức chứa phân số có quy luật. Trước hết ta tính toán để rút gọn các dãy đó, rồi thay kết quả vào phương trình để giải tiếp. Trong câu b) và c) ta gặp các phân số dạng $\frac{m}{a \cdot (a + m)}$ với a ; m là các số và $a \neq -m$.

Ta phải biến đổi như sau:

$$\frac{m}{a \cdot (a + m)} = \frac{(a + m) - a}{a(a + m)} = \frac{(a + m)}{a(a + m)} - \frac{a}{a(a + m)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a + m}.$$

(phương pháp biến đổi trên thường gọi là: Sai phân hữu hạn)

Giải

$$a) \text{ Ta có } \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{9^2}\right) = \frac{2^2 - 1}{2^2} \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2} \cdot \frac{4^2 - 1}{4^2} \dots \frac{9^2 - 1}{9^2}$$

$$= \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \dots \cdot \frac{8.10}{9.9} = \frac{1.2.3 \dots 8}{2.3.4 \dots 9} \cdot \frac{3.4.5 \dots 10}{2.3.4 \dots 9} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

Do đó phương trình trở thành:

$$\Leftrightarrow \frac{5}{9}(18x - 45) = 2(x - 1) + 97 \Leftrightarrow 10x - 25 = 2x - 2 + 97$$

$$\Leftrightarrow 10x - 2x = -2 + 97 + 25 \Leftrightarrow 8x = 120 \Leftrightarrow x = 15$$

b) Xét $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{199.200} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200}$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{200} \right)$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} \right) = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200}$$

Vậy phương trình trở thành

$$\left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} \right) \cdot 2017x = 2016 \cdot \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2017x = 2016 \Leftrightarrow x = \frac{2016}{2017}.$$

c) Ta có: $\frac{10}{1.3} + \frac{10}{3.5} + \dots + \frac{10}{9.11} = 5 \cdot \left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \dots + \frac{2}{9.11} \right)$

$$= 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) = 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{11} \right) = \frac{50}{11}.$$

Khi ấy phương trình trở thành $\frac{50}{11} \cdot 2, 2x - [0, 8 \cdot (7, 5 - 2, 5)]: 0, 25 = 12$

$$\Leftrightarrow 10x - (6 - 2x) \cdot 4 = 12 \Leftrightarrow 10x - 24 + 8x = 12$$

$$\Leftrightarrow 18x = 36$$

$$\Leftrightarrow x = 2.$$

Ví dụ 8: Với z là ẩn; m, n, p là các số và $m \neq -n; n \neq -p; p \neq -m$.

Giải phương trình $\frac{z - mn}{m + n} + \frac{z - np}{n + p} + \frac{z - pm}{p + m} = m + n + p$.

Tìm cách giải: Nếu chuyển về và ghép $-m; -n$ và $-p$ với các phân thức mà mẫu không chứa các số đó và quy đồng từng cặp một sẽ xuất hiện nhân tử chung $(z - mn - mp - np)$. Từ đó cách giải như sau:

Giải

$$PT \Leftrightarrow \frac{z - mn}{m + n} - p + \frac{z - np}{n + p} - m + \frac{z - pm}{p + m} - n = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{z - mn - pm - pn}{m + n} + \frac{z - np - mn - mp}{n + p} + \frac{z - pm - np - nm}{p + m} = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - mn - mp - np) \left(\frac{1}{m+n} + \frac{1}{n+p} + \frac{1}{p+m} \right) = 0$$

Do đó:

$$+ \text{ Nếu } \frac{1}{m+n} + \frac{1}{n+p} + \frac{1}{p+m} \neq 0 \text{ thì } z = mn + mp + np$$

$$+ \text{ Nếu } \frac{1}{m+n} + \frac{1}{n+p} + \frac{1}{p+m} = 0 \text{ thì phương trình trở thành } 0z = 0 \text{ nghiệm đúng với mọi } z.$$

C. Bài tập vận dụng

16.1. Giải các phương trình:

$$a) \frac{3-x}{6} + 2x = \frac{4x+3}{3} - \frac{2(x-1)}{5};$$

$$b) 0,5(x+2)^2(x-1) - \frac{1}{6}x(x^2-2) = \frac{1}{3}(x+2)^3 - \frac{(x-2)^2 + (x-2)(x+2)}{4};$$

$$c) \frac{3+x}{3} - \frac{x - \frac{x-1}{3}}{2} = \frac{5-3x}{2} + \frac{x-3}{5};$$

$$d) \frac{x-3}{6} + \frac{\frac{2x-4}{3} - 2\left(3x + \frac{x-1}{5}\right)}{4} = \frac{2+5x - \frac{8-3x}{4}}{3} - 3x.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Các phương trình đều chứa các mẫu số. Do đó ta thực hiện việc quy đồng mẫu số các phân số rồi khử mẫu số (thực chất là ta nhân hai vế của phương trình với cùng mẫu số chung). Riêng c) và d) ta phải quy đồng riêng các phân thức trên các tử rồi đưa về thành một phân thức sau đó mới quy đồng mẫu hai vế. Ở

câu b) Ta có: 0,5 là $\frac{1}{2}$;

Trong quá trình giải có thể rút gọn các hạng tử đồng dạng từng vế sau đó mới chuyển vế, và bỏ những hạng tử giống nhau ở hai vế nếu có.

* Đáp số: a) $x = 1$; b) $x = -1$; c) $x = 2\frac{1}{3}$; d) $x = -4$

16.2. Tìm y nếu:

$$a) \left(2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} + 4\frac{1}{5} - 5\frac{1}{6} \right) \cdot \frac{15}{16}y = \frac{1}{2}(3 - 8y) + 7\frac{1}{2};$$

$$b) \frac{8,54 + 0,46 - 4,5 : 0,25}{2,68 + \frac{8}{25}} + \frac{y}{4} = \left(\frac{y}{2} - \frac{y}{4} \right) \cdot 0,5 + 3;$$

$$c) -\frac{15}{6}y : \left(3,25 - 5\frac{1}{6} - 2\frac{1}{3} + 3 \right) - 4 = 20 - \frac{32}{31}y \cdot \left(0,5 + 0,25 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \right).$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Các phương trình đều chứa các biểu thức về phân số và số thập phân. Trước hết ta rút gọn các biểu thức đó, tùy theo các biểu thức ta biến đổi thành phân số hay số thập phân thuận tiện cho việc tính.

$$a) \text{ Ta có } \left(2\frac{1}{3} - 3\frac{1}{2} + 4\frac{1}{5} - 5\frac{1}{6} \right) \cdot \frac{15}{16} = \frac{70 - 105 + 126 - 155}{30} \cdot \frac{15}{16} = \frac{-64}{30} \cdot \frac{15}{16} = -2$$

Do đó phương trình trở thành $-2y = \frac{1}{2}(3 - 8y) + 7\frac{1}{2}$. Giải được $y = 4,5$.

$$b) \text{ Biến đổi } \frac{8,45 + 0,46 - 4,5 : 0,25}{2,68 + \frac{8}{25}} = \frac{8,54 + 0,46 - 4,5 : 0,25}{2,68 + 0,32} = \frac{9 - 18}{3} = -3$$

$$\text{Phương trình thành } -3 + \frac{y}{4} = \left(\frac{y}{2} - \frac{y}{4} \right) \cdot \frac{1}{2} + 3$$

hoặc $-3 + 0,25y = (0,5 - 0,25y)0,5 + 3$. Giải được $x = 48$.

$$c) 3,25 - 5\frac{1}{6} - 2\frac{1}{3} + 3 = \frac{13}{4} - \frac{31}{6} - \frac{7}{3} + 3 = \frac{39 - 62 - 28 + 36}{12} = -\frac{15}{12}$$

$$\text{Và } 0,5 + 0,25 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

$$\text{Do đó phương trình trở thành } -\frac{15}{6}y : \left(-\frac{15}{12} \right) - 4 = 20 - \frac{32}{31}y \cdot \frac{31}{32}$$

Giải được $y = 8$.

16.3. Cho phương trình với z là ẩn, m là một số (tham số)

$$(z - 2)^2 - (z + 5m - 2) + (z + 3)^2 = 2(z^2 - m + 1) + 8(m - 5)z + 28$$

a) Tìm giá trị của m để phương trình có nghiệm là $z = 3$;

b) Giải phương trình theo tham số m .

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Để phương trình có nghiệm là $z = 3$ phải có:

$$(3 - 2)^2 - (3 + 5m - 2) + (3 + 3)^2 = 2(3^2 - m + 1) + 8(m - 5) \cdot 3 + 28$$

Giải phương trình tìm được $m = 4$.

$$b) (z - 2)^2 - (z + 5m - 2) + (z + 3)^2 = 2(z^2 - m + 1) + 8(m - 5)z + 28$$

Khai triển rút gọn, chuyển về ta được phương trình $(41 - 8m)z = 3m + 15$

$$\text{Nếu } m \neq \frac{41}{8} \text{ thì phương trình có nghiệm } z = \frac{3m + 15}{41 - 8m}.$$

$$\text{Nếu } m = \frac{41}{8} \text{ ta có: } 0z = 3 \cdot \frac{41}{8} + 15 \text{ vô nghiệm vì } 3 \cdot \frac{41}{8} + 15 = \frac{253}{8} \neq 0.$$

16.4. Tìm giá trị của m để phương trình

$$x^2 - \frac{2m - 3x}{2} + 5(x + m) = x^3 - 6x^2 + 31$$

có nghiệm bằng $\frac{1}{4}$ nghiệm của phương trình $(x-2)(x+3)=x(x-1)+10$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Giải phương trình $(x-2)(x+3)=x(x-1)+10$ được nghiệm $x=8$.

Vậy phương trình $x^2 - \frac{2m-3x}{2} + 5(x+m) = x^3 - 6x^2 + 31$ có nghiệm $x=2$

Nghĩa là $2^2 - \frac{2m-3.2}{2} + 5(2+m) = 2^3 - 6.2^2 + 31$. Giải tìm được $m = -\frac{1}{2}$.

16.5. Giải các phương trình:

$$a) 3x \left(\frac{1}{294} + \frac{1}{295} \right) - \left(\frac{6}{294} + \frac{5}{295} \right) = \frac{3x-294}{6} + \frac{3x-295}{5};$$

$$b) x \left(\frac{1}{126} + \frac{1}{125} + \frac{1}{124} \right) + 5 + \frac{74}{126} + \frac{75}{125} + \frac{76}{124} = -\frac{122(77+x) + 123(78+x)}{122.123};$$

$$c) \frac{99x-50.49-51.50}{50.49} + \frac{25(x-52)+48(x-175)}{48.25} = 0;$$

$$d) \frac{4x-350}{15} + \frac{4x-100}{25} + \frac{4x-95}{35} = \frac{110.55+145.45-400x}{45.55}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta biến đổi phương trình đã cho thành phương trình

$$\frac{3x-5}{295} + \frac{3x-6}{294} = \frac{3x-294}{6} + \frac{3x-295}{5}$$

$$\Leftrightarrow (3x-300) \left(\frac{1}{295} + \frac{1}{294} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) = 0. \text{ Tìm được } x=100.$$

$$b) \text{ Biến đổi thành: } \frac{74+x}{126} + \frac{75+x}{125} + \frac{76+x}{124} + \frac{77+x}{123} + \frac{78+x}{122} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{74+x}{126} + 1 \right) + \left(\frac{75+x}{125} + 1 \right) + \left(\frac{76+x}{124} + 1 \right) + \left(\frac{77+x}{123} \right) + \left(\frac{78+x}{122} + 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (200+x) \left(\frac{1}{126} + \frac{1}{125} + \frac{1}{124} + \frac{1}{123} + \frac{1}{122} \right) = 0. \text{ Tìm được } x = -200.$$

$$c) \text{ Biến đổi phương trình thành: } \frac{x-50}{50} + \frac{x-51}{49} + \frac{x-52}{48} + \frac{x-175}{25} = 0$$

Ở vế trái của phương trình, nếu ta thêm (-1) vào mỗi phân thức trong ba phân thức đầu và thêm $(+3)$ vào phân thức thứ tư rồi quy đồng mẫu từng cặp ta làm xuất hiện 4 phân thức đều có tử là $x-100$.

Việc thêm vào không làm thay đổi giá trị của vế trái vì $-1-1-1+3=0$.

$$\text{Ta có } \left(\frac{x-50}{50} - 1 \right) + \left(\frac{x-51}{49} - 1 \right) + \left(\frac{x-52}{48} - 1 \right) + \left(\frac{x-175}{25} + 3 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-100) \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{49} + \frac{1}{48} + \frac{1}{25} \right) = 0. \text{ Tìm được } x=100.$$

d) Biến đổi thành: $\frac{4x-350}{15} + \frac{4x-100}{25} + \frac{4x-95}{35} + \frac{4x-110}{45} + \frac{4x-145}{55} = 0$

Ở vế trái của phương trình, phân thức thứ nhất nếu ta thêm 10, phân tử thứ hai thêm - 4; phân thức thứ ba thêm - 3; phân thức thứ tư thêm - 2; phân thức thứ năm thêm - 1 thì giá trị vế trái không đổi vì $10 - 4 - 3 - 2 - 1 = 0$; ta quy đồng mẫu từng cặp làm xuất hiện 4 phân thức đều có tử là $4x - 200$.

Từ đó, ta có:

$$\left(\frac{4x-350}{15} + 10 \right) + \left(\frac{4x-100}{25} - 4 \right) + \left(\frac{4x-95}{35} - 3 \right) + \left(\frac{4x-110}{45} - 2 \right) + \left(\frac{4x-145}{55} - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x - 200) \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{25} + \frac{1}{35} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} \right) = 0. \text{ Tìm được } x = 50.$$

Nhận xét: Ở các bài toán thuộc dạng trên các phương trình sau khi biến đổi ta không quy đồng tất cả các mẫu số, hướng giải là làm xuất hiện các tử thức giống nhau bằng cách thêm, bớt vào mỗi phân thức các số thích hợp thành một cặp, sao cho giá trị các vế của phương trình không thay đổi. Bằng cách quy đồng mẫu từng cặp ta sẽ làm xuất hiện các tử thức giống nhau. Khi đặt thành công tử chung, nhân tử còn lại sẽ là tổng, hiệu các phân số mà tính khác không của nó là điều dễ nhận ra. Từ đó ta tìm được nghiệm của phương trình.

16.6. Giải các phương trình:

a) $\frac{x-m}{m+2} + \frac{x-2}{m-2} = \frac{4m}{4-m^2}$ với m là hằng số (tham số);

b) $\frac{x-m}{np} + \frac{x-n}{pm} + \frac{x-p}{mn} = \frac{2}{m} + \frac{2}{n} + \frac{2}{p}.$

với m, n, p là các hằng số và $m.n.p \neq 0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Đây là các phương trình chứa tham số. Cần đặc biệt lưu ý điều kiện xác định của các phương trình và sau khi biến đổi về dạng $ax + b = 0$ hoặc $ax = -b, (a \neq 0)$, phải biện luận các giá trị của a để xác định nghiệm của phương trình.

a) ĐKXD: $m \neq \pm 2$. Biến đổi phương trình thành

$$(x-m)(m-2) + (x-2)(m+2) = -4m \Leftrightarrow 2mx = (m-2)^2$$

Nếu $m \neq 0$ và $m \neq \pm 2$ thì $x = \frac{(m-2)^2}{2m}.$

Nếu $m = 0$ thì phương trình trở thành $0x = 4$, phương trình vô nghiệm.

b) Do $m.n.p \neq 0$ nên $m \neq 0; n \neq 0; p \neq 0$.

Nhân hai vế của phương với $mnp \neq 0$ ta được phương trình tương đương:

$$m(x-m) + n(x-n) + p(x-p) = 2mn + 2np + 2pm$$

$$\Leftrightarrow x(m+n+p) - (m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2mp + 2np) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(m+n+p) - (m+n+p)^2 = 0 \Leftrightarrow (m+n+p)[x - (m+n+p)] = 0$$

- * Nếu $m + n + p \neq 0$ thì nghiệm của phương trình là $x = m + n + p$
- * Nếu $m + n + p = 0$ thì phương trình thành $0(x - 0) = 0$, vô số nghiệm.

16.7. Giải các phương trình với y là ẩn số; m, n, p là hằng số và $m.n.p \neq 0$

a) $\frac{y - m}{n - 3} + \frac{y - n}{m - 3} = 3 - \frac{y + 3}{m + n};$

b) $\frac{3y - n - p}{m} + \frac{3y - p - m}{n} + \frac{3y - m - n}{p} = 3.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta nhận thấy $\frac{y - m}{n - 3} - 1 = \frac{y - m - n + 3}{n - 3}$. Làm tương tự như vậy với các phân thức còn lại cũng làm xuất hiện tử thức $(y - m - n + 3)$.

Do đó ta chuyển vế rồi viết $-3 = -1 - 1 - 1$ và ghép mỗi số với một phân thức.

ĐKXĐ $m \neq 3; n \neq 3; m \neq -n$

Biến đổi phương trình thành $\left(\frac{y - m}{n - 3} - 1\right) + \left(\frac{y - n}{m - 3} - 1\right) + \left(\frac{y + 3}{m + n} - 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{y - m - n + 3}{n - 3} + \frac{y - n - m + 3}{m - 3} + \frac{y + 3 - m - n}{m + n} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - m - n + 3) \left(\frac{1}{n - 3} + \frac{1}{m - 3} + \frac{1}{m + n} \right) = 0$$

Nếu $\frac{1}{n - 3} + \frac{1}{m - 3} + \frac{1}{m + n} \neq 0$ thì phương trình có nghiệm $y = m + n - 3$.

Nếu $\frac{1}{n - 3} + \frac{1}{m - 3} + \frac{1}{m + n} = 0$ phương trình trở thành $0(y - m - n + 2) = 0$ thỏa mãn với mọi y .

Phương trình vô số nghiệm với $m \neq 3; n \neq 3; m \neq -n$.

b) Tương tự a). Biến đổi phương trình về dạng:

$$\left(\frac{3y - n - p}{m} - 1\right) + \left(\frac{3y - p - m}{n} - 1\right) + \left(\frac{3y - m - n}{p} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow [3y - (m + n + p)] \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \right) = 0$$

Nếu $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \neq 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}(m + n + p)$.

Nếu $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 0 \Rightarrow$ phương trình trở thành $0y = 0$ có vô số nghiệm với $m.n.p \neq 0$;

16.8. Giải phương trình :

a) $\left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{100} - 1\right) \cdot 200x - 18070 = \left(\frac{x}{100} - 1\right) (1 + 2 + 3 + \dots + 200);$

$$b) \frac{(x+3)^2 - (x-5)(x+5)}{2} = \left(\frac{7}{9}+1\right)\left(\frac{7}{20}+1\right)\left(\frac{7}{33}+1\right)\dots\left(\frac{7}{105}+1\right) \cdot \frac{15}{256}(x+2);$$

$$c) 92x - \left(\frac{0,6 + \frac{3}{7} - \frac{3}{11}}{2 + \frac{10}{7} - \frac{10}{11}} + \frac{\frac{14}{3} - 21}{\frac{20}{3} - 30}\right) = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) 2016x - 8(x-3).$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Các phương trình đều chứa những biểu thức về số, phân số, số thập phân, dãy số, phân số. Ta cần rút gọn chúng rồi thay vào phương trình để giải. Khi rút gọn cần lưu ý các quy luật của chúng.

$$a) \left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{4} - 1\right)\dots\left(\frac{1}{100} - 1\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)\dots\left(-\frac{99}{100}\right) = -\frac{1}{100}$$

$$\text{và } 1+2+3+\dots+199+200 = \frac{(1+200).200}{2} = 20100$$

$$\text{Phương trình trở thành } -\frac{1}{100}.200x - 18070 = \left(\frac{x}{100} - 1\right).20100$$

Giải phương trình tìm được $x=10$.

$$b) \left(\frac{7}{9}+1\right)\left(\frac{7}{20}+1\right)\left(\frac{7}{33}+1\right)\dots\left(\frac{7}{105}+1\right) = \frac{16}{9} \cdot \frac{27}{20} \cdot \frac{40}{33} \dots \frac{112}{105} = \frac{2.8}{1.9} \cdot \frac{3.9}{2.10} \cdot \frac{4.10}{3.11} \dots \frac{8.14}{7.15}$$

$$= \frac{2.3.4 \dots 8}{1.2.3 \dots 7} \cdot \frac{8.9.10 \dots 14}{9.10.11 \dots 15} = \frac{64}{15}. \text{ Phương trình trở thành:}$$

$$\frac{(x+3)^2 - (x-5)(x+5)}{2} = \frac{64}{15} \cdot \frac{15}{256}(x+2). \text{ Giải được } x = -6$$

$$c) \frac{0,6 + \frac{3}{7} - \frac{3}{11}}{2 + \frac{10}{7} - \frac{10}{11}} + \frac{\frac{14}{3} - 21}{\frac{20}{3} - 30} = \frac{3\left(0,2 + \frac{1}{7} - \frac{1}{11}\right)}{10\left(0,2 + \frac{1}{7} - \frac{1}{11}\right)} + \frac{14\left(\frac{1}{3} - 1,5\right)}{20\left(\frac{1}{3} - 1,5\right)} = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} = 1$$

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1+2+3-6}{12} = 0$$

Phương trình trở thành $92x - 1 = -8(x-3)$. Giải được $x=0,25$.

16.9. Tìm z nếu:

$$a) \left(\frac{9}{1.10} + \frac{9}{10.19} + \frac{9}{19.28} + \dots + \frac{9}{82.91}\right) + \frac{183}{91} + 3(z-1) = \frac{6z+5}{4} + \frac{5z-6}{5};$$

$$b) \left(10 + \frac{6060}{1212} + \frac{6060}{2020} + \dots + \frac{6060}{9090}\right) \cdot (z-1) = 76 - \frac{2015.2016 + 2017}{2016.2017 - 2015} \cdot z;$$

$$c) \left(\frac{2017}{1.11} + \frac{2017}{2.12} + \dots + \frac{2017}{100.110}\right) \cdot \frac{z}{10} = \frac{2018}{1.101} + \frac{2018}{2.102} + \dots + \frac{2018}{10.110}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Đây là một bài khó, hay, đòi hỏi linh hoạt và sáng tạo. Trong cả ba câu ta gặp các phân số dạng

$\frac{m}{a.(a+m)}$ với a, m là các số và $a \neq -m$. Ta biến đổi $\frac{m}{a.(a+m)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+m}$ để rút gọn các biểu thức.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{9}{1.10} + \frac{9}{10.19} + \frac{9}{19.28} + \dots + \frac{9}{82.91} = 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{28} - \dots + \frac{1}{82} - \frac{1}{91} \\ & = 1 - \frac{1}{91} = \frac{90}{91}. \text{ Do đó ta có } \frac{90}{91} + \frac{183}{91} + 3(z-1) = \frac{6z+5}{4} + \frac{5z-6}{5}. \end{aligned}$$

Giải phương trình tìm được $z=0,1$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } & 10 + \frac{6060}{1212} + \frac{6060}{2020} + \dots + \frac{6060}{9090} = 60 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{90} \right) \\ & = 60 \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{9.10} \right) \\ & = 60 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) = 60 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10} \right) = 24 \\ \text{và } & \frac{2015.2016 + 2017}{2016.2017 - 2015} = \frac{2015.2016 + 2017}{2016.(2015+2) - 2015} = \frac{2015.2016 + 2017}{2016.2015 + 2017} = 1 \end{aligned}$$

Phương trình trở thành $24(z-1) = 76 - z$. Tìm được $z=4$.

$$\begin{aligned} \text{c) Đặt } A &= \frac{2017}{1.11} + \frac{2017}{2.12} + \dots + \frac{2017}{100.100} = \frac{2017}{10} \left(\frac{10}{1.11} + \frac{10}{2.12} + \dots + \frac{10}{100.1000} \right) \\ &= \frac{2017}{10} \left(\frac{11-1}{1.11} + \frac{12-2}{2.12} + \dots + \frac{110-100}{100.110} \right) = \frac{2017}{10} \left(1 - \frac{1}{11} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{110} \right) \\ &= \frac{2017}{10} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{100} \right) - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{110} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } M &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{100} \right) - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{110} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{10} \right) - \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{110} \right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{100} \right) - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{100} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{10} \right) - \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{110} \right) \text{ nên } A = \frac{2017}{10} \cdot M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Xét } B &= \frac{2018}{1.101} + \frac{2018}{2.102} + \dots + \frac{2018}{10.110} = \frac{2018}{100} \left(\frac{101-1}{1.101} + \frac{102-2}{2.102} + \dots + \frac{110-10}{10.110} \right) \\ &= \frac{2018}{100} \left(1 - \frac{1}{101} + \frac{1}{2} - \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{10} - \frac{1}{110} \right) \\ &= \frac{2018}{100} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{10} \right) - \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{110} \right) \right] = \frac{2018}{100} \cdot M \end{aligned}$$

$$\text{Do đó ta có: } \frac{2017}{10} \cdot M \cdot \frac{z}{10} = \frac{2018}{100} \cdot M$$

$$\Rightarrow z = \frac{2018}{100} : \frac{2017}{100} = \frac{2018}{100} \cdot \frac{100}{2017} = \frac{2018}{2017}$$

16.10. Giải phương trình với ẩn t ; a, b, c là các số; $a \neq 0; b \neq 0$ và $c \neq 0$

$$\left(\frac{t-a}{bc} - \frac{1}{b} \right) + \left(\frac{t-b}{ca} - \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{t-c}{ab} - \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta thấy nếu chuyển vế rồi ghép $-\frac{1}{c}$ với $\left(\frac{t-a}{bc} - \frac{1}{b} \right)$ được

$$\left(\frac{t-a}{bc} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) = \frac{t-a-c-b}{bc}. \text{ Tương tự ta có cách giải: Chuyển vế và viết phương trình đã cho thành}$$

$$\left(\frac{t-a}{bc} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{t-b}{ca} - \frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) + \left(\frac{t-c}{ab} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{t-a-c-b}{bc} + \frac{t-b-a-c}{ca} + \frac{t-c-b-a}{ab} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-a-b-c) \left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} \right) = 0$$

Nếu $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} \neq 0$ phương trình có nghiệm $t = a + b + c$

Nếu $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} = 0$ phương trình nghiệm đúng với mọi t .

16.11. Giải phương trình $12 - 3(x-2)^2 = (x+2)(1-3x) + 2x$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 huyện Thường Tín – Hà Tây,
năm học 1996 – 1997)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$12 - 3(x-2)^2 = (x+2)(1-3x) + 2x$$

$$\Leftrightarrow 12 - 3(x^2 - 4x + 4) = (-3x^2 - 5x + 2) + 2x \Leftrightarrow 15x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{15}$$

16.12. Cho $169(157 - 77x)^2 + 100(201 - 100x)^2 = 26(77x - 157)(1000x - 2010)$.

Tính giá trị của x .

(Đề thi Olympic Toán Singapore (SMO) năm 2010)

Hướng dẫn giải – đáp số

Biến đổi phương trình thành:

$$(2041 - 1001x)^2 + (2010 - 1000x)^2 = 2(1001x - 2041)(1000x - 2010)$$

$$\Leftrightarrow (1001x - 2041)^2 + (1000x - 2010)^2 - 2(1001x - 2041)(1000x - 2010) = 0$$

Đặt $1001x - 2041 = a$ và $1000x - 2010 = b$, ta có:

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$$

Hay $1001x - 2041 = 1000x - 2010 \Leftrightarrow x = 31$.

16.13. Tìm ba số tự nhiên liên tiếp biết tổng 3 tích của từng cặp số khác nhau của chúng là 1727.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT năng khiếu ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, năm học 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

Gọi số tự nhiên nhỏ nhất là x . Ta giải phương trình:

$$x(x+1) + x(x+2) + (x+1)(x+2) = 1727 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 575$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 576 \Leftrightarrow x = 23$$

Vậy 3 số tự nhiên cần tìm là 23; 24; 25.