

Bài 1: (5 điểm)

a/ Cho biểu thức $M = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5} \right)$

Rút gọn M và tìm x để $M > 1$

b/ Cho a, b, c > 0 thỏa mãn $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$. Tính $H = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+c} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{1+a} + \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{1+b}$

Bài 2: (4 điểm)

a/ Giải phương trình $\sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} = 6x^2$

b/ Tìm số thực x để 3 số $x - \sqrt{3}; x^2 + 2\sqrt{3}; x - \frac{2}{x}$ là số nguyên

Bài 3: (4 điểm)

a/ Tìm x nguyên dương để $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương

b/ Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$.

Chứng minh rằng: $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz$

Bài 4: (6 điểm)

Cho đoạn thẳng OA=R, vẽ đường tròn (O;R). Trên đường tròn (O;R) lấy H bất kỳ sao cho AH<R, qua H vẽ đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn (O;R). Trên đường thẳng a lấy B và C sao cho H nằm giữa B và C và AB=AC=R. Vẽ HM vuông góc với OB ($M \in OB$), vẽ HN vuông góc với OC ($N \in OC$)

a/ Chứng minh $OM \cdot OB = ON \cdot OC$ và MN luôn đi qua 1 điểm cố định

b/ Chứng minh $OB \cdot OC = 2R^2$

c/ Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN khi H thay đổi

(chú ý: dùng kiến thức học kỳ 1 lớp 9)

Bài 5: (1 điểm)

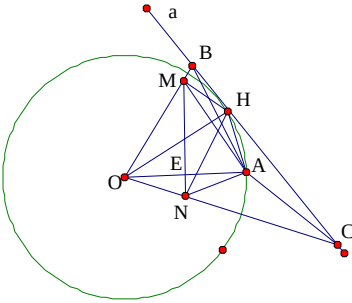
cho dãy số n, n+1, n+2, ..., 2n với n nguyên dương. Chứng minh trong dãy có ít nhất một lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên.

Họ tên thí sinh.....SBD:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM HSG CẤP THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2017-2018
MÔN: TOÁN LỚP 9 (BẢNG A)

Câu	Nội Dung	Điểm
Bài 1		5 đ
a/ 3đ	a/ Cho biểu thức $M = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5} \right)$ Rút gọn M và tìm x để $M > 1$ $*M = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} + \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+5)} \right)$ $= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right)$ $= \frac{\sqrt{x}-1+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{(3\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+1)+2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$ $= \frac{\sqrt{x}-1+x-2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-11)} : \frac{3x+3\sqrt{x}-5\sqrt{x}-5+2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$ $= \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-11)} : \frac{3x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{3(x-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}$ Vậy $M = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}$ với $x \geq 0; x \neq 1, 3, 4$ $*M < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{4-2\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} > 0$ Ta có $\Leftrightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x}-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 4$. Vậy $M > 1$ khi $1 < x < 4$ và $x \neq 3$	0,5 0,5 0,25 0,5 0,25 0,5 0,5
b/ 2 đ	b/Cho a, b, c >0 thỏa mãn $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$. Tính $H = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1+c} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{1+a} + \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{1+b}$ - Vì $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$ nên $1+c = \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} + c = \dots = (\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})$ - Tương tự ta có $1+a = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c}); 1+b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} + \sqrt{c})$ - Vậy $H = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{c})} + \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{c})}$ $= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{c})-(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} + \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{a}+\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{c})} + \frac{(\sqrt{b}+\sqrt{c})-(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$	0,5 0,5 1,0

	$= \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = 0$	
Bài 2		4,0đ
a/ 2,0đ	Giải phương trình $\sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} = 6x^2$ ĐK: $x^2 \geq \frac{5}{6}$	
	Vì $x^2 \geq \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{5}{x^2} > 0; 6x^2 - 1 > 0$, theo côsi ta có $\sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} = \sqrt{\frac{5}{x^2}(6x^2 - 1)} \leq \frac{\frac{5}{x^2} + (6x^2 - 1)}{2}$	0,5
	Dấu = có khi $\frac{5}{x^2} = 6x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$	
	Vì $x^2 \geq \frac{5}{6} \Rightarrow 6x^2 - \frac{5}{x^2} \geq 0$, theo côsi ta có $\sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} = \sqrt{(6x^2 - \frac{5}{x^2}) \cdot 1} \leq \frac{(6x^2 - \frac{5}{x^2}) + 1}{2}$	0,5
	Dấu = có khi $6x^2 - \frac{5}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$	
	Vậy ta có $\sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} \leq \frac{\frac{5}{x^2} + 6x^2 - 1 + 6x^2 - \frac{5}{x^2} + 1}{2}$	0,5
	$\Leftrightarrow \sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} \leq 6x^2$ Dấu = có khi $\Leftrightarrow x = \pm 1$	
	Vậy $x = \pm 1$ là nghiệm phương trình $\sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} = 6x^2$	0,5
b/ 2,0đ	Tìm số thực x để 3 số $x - \sqrt{3}; x^2 + 2\sqrt{3}; x - \frac{2}{x}$ là số nguyên	
	Đặt $a = x - \sqrt{3}; b = x^2 + 2\sqrt{3}; c = x - \frac{2}{x}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$	0,75
	Từ $a = x - \sqrt{3} \Rightarrow x = a + \sqrt{3}$; từ $b = x^2 + 2\sqrt{3} \Rightarrow x^2 = b - 2\sqrt{3}$, nên ta có $(a + \sqrt{3})^2 = b - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 + 2\sqrt{3}a + 3 = b - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}(a + 1) = b - a^2 - 3$	
	-Nếu $a + 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq -1 \Rightarrow 2\sqrt{3} = \frac{b - a^2 - 3}{a + 1}$, vì $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{b - a^2 - 3}{a + 1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ VL	0,5
	Vậy $a + 1 = 0$ nên ta có $\begin{cases} a + 1 = 0 \\ b - a^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{3} - 1$	0,5
	Với $x = \sqrt{3} - 1$ ta có $a = -1; b = 4$ và $c = -2$ nguyên, thỏa mãn đầu bài	0,25
Bài 3		4,0 đ
a/ 2,0đ	a/ Tìm x nguyên dương để $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương	
	Vì $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương, nên ta có $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6 = k^2$ với $k \in \mathbb{N}$	0,5
	Ta có $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6 = \dots = (x + 2)(4x^2 + 6x - 3)$ nên ta có $(x + 2)(4x^2 + 6x - 3) = k^2$	
	Đặt $(x + 2, 4x^2 + 6x - 3) = d$ với $d \in \mathbb{N}^*$	0,5
	Ta có $x + 2 : d \Rightarrow (x + 2)(4x - 2) : d \Rightarrow 4x + 6x - 4 : d$	
	Ta lại có $4x^2 + 6x - 3 : d \Rightarrow (4x^2 + 6x - 3) - (4x^2 + 6x - 4) = 1 : d \Rightarrow d = 1$	

	Vậy $(x+2, 4x^2+6x-3)=1$ mà $(x+2)(4x^2+6x-3)=k^2$ nên ta có $x+2$ và $4x^2+6x-3$ là số chính phương $\Rightarrow x+2=a^2$ và $4x^2+6x-3=b^2$ với $a,b \in \mathbb{N}^*$ Vì $x>0$ nên ta có $4x^2 < b^2 < 4x^2+12x+9 \Leftrightarrow (2x)^2 < b^2 < (2x+3)^2$ Vì b lẻ nên $b^2=(2x+1)^2 \Leftrightarrow 4x^2+6x-3=4x^2+4x+1 \Leftrightarrow x=2$ Với $x=2$ ta có $4x^3+14x^2+9x-6=100=10^2$ là số chính phương	0,75 0,25
b/ 2,0đ	b/ Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng: $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz$ Từ Gt suy ra: $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$. Nên ta có: $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}} = \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right); "=" \Leftrightarrow y=z$ Vậy $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$. Tương tự ta có $\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{1}{z}\right); \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z}\right)$ Vậy ta có $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right); "=" \Leftrightarrow x=y=z$ Ta có $(x+y+x)^2 - 3(xy+yz+xx) = \dots = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2] \geq 0$ Nên $(x+y+x)^2 \geq 3(xy+yz+xx)$ $\Rightarrow (xyz)^2 \geq 3(xy+yz+xz) \Rightarrow 3\frac{xy+yz+xz}{xyz} \leq xyz \Rightarrow 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leq xyz$ Vậy $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz; "=" \Leftrightarrow x=y=z$	0,5 0,5 0,25 0,5 0,25
Bài 4		6 đ
		
a/ 3đ	a/ Chứng minh $OM \cdot OB = ON \cdot OC$ và MN luôn đi qua 1 điểm cố định *Ta có $OH \perp HB$ (t/c tiếp tuyến) $\Rightarrow \triangle OHB$ vuông tại H, mà $HM \perp OB$ (gt) nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $OM \cdot OB = OH^2 = R^2$ Chứng minh tương tự ta có $ON \cdot OC = OH^2 = R^2$. Vậy ta có $OM \cdot OB = ON \cdot OC$	0,5 0,5

	* Ta có $OM \cdot OB = OH^2 = R^2$ mà $OA=R$ nên ta có $OM \cdot OB = OA^2 \Rightarrow \frac{OM}{OA} = \frac{OA}{OB}$ Xét $\triangle OMA$ và $\triangle OAB$ có $\hat{O}$ chung, có $\frac{OM}{OA} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \triangle OMA \sim \triangle OAB \Rightarrow \hat{O}_{AM} = \hat{O}_{BA}$. Ta có $AO=AB=R$ (gt) $\Rightarrow \triangle OAB$ cân $\Rightarrow \hat{A}_{OB} = \hat{O}_{BA} \Rightarrow \hat{A}_{OM} = \hat{O}_{BA}$, vậy $\hat{O}_{AM} = \hat{A}_{OM} \Rightarrow \triangle OMA$ cân $\Rightarrow MO = MA$ Chứng minh tương tự ta có $\triangle ONA$ cân $\Rightarrow NO = NA$ Ta có $MO = MA; NO = NA$, vậy MN là trung trực của OA, gọi E là giao điểm của MN với OA ta có $EO=EA=\frac{OA}{2}$ và $MN \perp OA$ tại E, mà O, A cố định nên E cố định. Vậy MN luôn đi qua 1 điểm cố định	0,5 0,5 0,5 0,5
b/ 1,5đ	b/ Chứng minh $OB \cdot OC = 2R^2$ Ta có $OM \cdot OB = ON \cdot OC \Rightarrow \frac{OM}{OC} = \frac{ON}{OB}$ Xét $\triangle OMN$ và $\triangle OCB$ có $\hat{O}$ chung, có $\frac{OM}{OC} = \frac{ON}{OB} \Rightarrow \triangle OMN \sim \triangle OCB$, mà $OE \perp MN$ và $OH \perp BC$ nên ta có $\frac{OM}{OC} = \frac{OE}{OH} \Rightarrow \frac{OM}{OC} = \frac{OE}{OA} = \frac{OE}{2OE} = \frac{1}{2} \Rightarrow OM = \frac{1}{2}OC$ (vì $OH=OA=2OE$) Ta có $OM \cdot OB = OH^2 = R^2$ (cm trên) $\Rightarrow \frac{1}{2}OC \cdot OB = R^2 \Rightarrow OC \cdot OB = 2R^2$	0,5 0,5 0,5
c/ 1,5đ	c/ Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN khi H thay đổi Ta có $\triangle OMN \sim \triangle OCB$ (cm trên) $\Rightarrow \frac{S_{OMN}}{S_{OCB}} = \frac{OE^2}{OH^2} = \frac{OE^2}{OA^2} = \frac{OE^2}{(2OE)^2} = \frac{1}{4}$ Nên $S_{OMN} = \frac{1}{4}S_{OCB} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot OH \cdot BC = \frac{1}{8}R \cdot BC \leq \frac{1}{8}R(AB + AC) = \frac{1}{8}R(R + R) = \frac{1}{4}R^2$ Dấu bằng có khi B, A, C thẳng hàng $\Leftrightarrow H \equiv A$ Vậy diện tích tam giác OMN lớn nhất là $S_{OMN} = \frac{1}{4}R^2$ khi $H \equiv A$	0,5 0,75 0,25
Bài 5		1đ
	-Nếu n là lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên bài toán chứng minh xong -Nếu n không là lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên, ta luôn tìm được 1 số nguyên dương k sao cho $k^2 < n < (k+1)^2$. Vì n nguyên dương và $n > k^2 \Rightarrow n \geq k^2 + 1$, vậy ta có: $2n - (k+1)^2 \geq 2(k^2 + 1) - (k+1)^2 = \dots = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2 \geq 0$ Vậy mọi k nguyên dương, nên ta có $k^2 < n < (k+1)^2 \leq 2n$ Vậy trong dãy luôn có ít nhất một lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên.	0,25 0,5 0,25