ĐỀ SỐ 23

A. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8,0 ĐIỂM)

Câu 1: Nếu a, b là các số tự nhiên sao cho $\sqrt{7+\sqrt{48}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ thì a^2+b^2 bằng

A. 25. B. 37. C. 29 D. 40.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để biểu thức $P=\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}:\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}$ nhận giá trị nguyên?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 3: Một chiếc xe khách khởi hành từ Hà Nội và một chiếc xe tải khởi hành từ Vinh cùng một lúc và đi ngược chiều nhau. Sau khi gặp nhau, xe khách chạy thêm 2 giờ thì đến Vinh, còn xe tải chạy thêm 4 giờ 30 phút thì đến Hà Nội. Biết Hà Nội cách Vinh là 300 km, hai xe đi cùng tuyến đường. Vận tốc của xe khách bằng

A. 60 Km/h. B. 40 Km/h. C. 50 Km/h . D. 80 Km/h.

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ 0xy, cho đa giác OABCDE có tọa độ các đỉnh A(3;0), B(3;3), C(1;3), D(1;5), E(0;5). Đường thẳng y = ax chia đa giác thành hai phần có diện tích bằng nhau. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $0 < a < 1$. B. $1 < a < 2$. C. $2 < a < 3$ D. $-1 < a < 0$.

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ 0xy, đường thẳng d : y = (m-3)x - 2m +1 cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A và B sao cho tam giác OAB cân. Khi đó, số giá trị của m thỏa mãn là

A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ 0xy, cho parabol $(P): y=\frac{-1}{2}x^2$. Có bao nhiêu điểm A thuộc (P) sao cho khoảng cách từ A đến trục hoành gấp 4 lần khoảng cách từ A đến trục tung?

A. 1. B. 2. C. 4 D. 3.

Câu 7: Cho phương trình $x^2-30x+a=0$ (a là tham số), có hai nghiệm đều dương và một nghiệm là bình phương của nghiệm kia. Gọi hai nghiệm của phương trình là u, v với u > v. Giá trị của u – v + a bằng

A. 100. B. 115. C. 130. D. 145.

Câu 8: Cho hai số a và b thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} a+b=2(m+1) \\ ab=m^2-m+2 \end{cases}$. Gọi m_0 là giá trị của m để tổng a^2+b^2 đạt giá trị nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $-2 < m_0 < 0$. B. $0 < m_0 < 1$. C. $-3 < m_0 < 2$. D. $1 < m_0 < 3$.

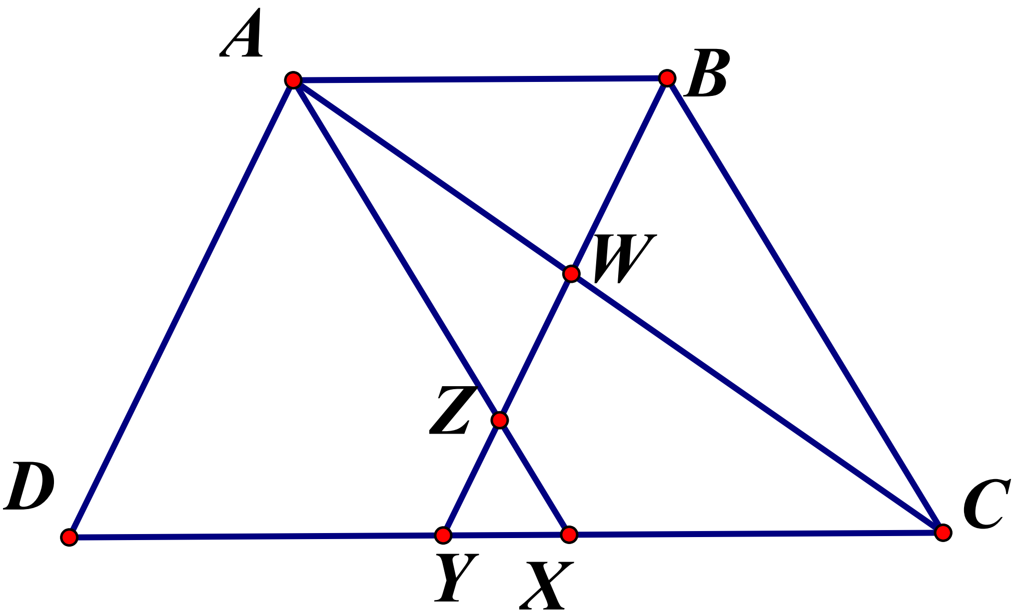
Câu 9: Khi tính toán thể tích căn phòng hình hộp chữ nhật, bạn An đã nhập sai chiều cao vào máy tính, An đã nhập số liệu lớn hơn $\frac{1}{3}$ chiều cao thật. Sau khi có kết quả, An nói: "mình đã nhầm, nhưng không sao, lại trừ bớt đi $\frac{1}{3}$ kết quả này thì sẽ cho kết quả đúng thôi". Bạn Bình, người đã tính đúng kết quả nói rằng: "Kết quả đó vẫn chưa đúng, An phải tiếp tục cộng thêm $8\,m^3$ nữa mới đúng". Thể tích căn phòng bằng

A. $8\,m^3$ B. $72\,m^3$ C. $48\,m^3$ D. $64\,m^3$

Câu 10: cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH, biết diện tích tam giác ABH = 15,36cm^2; diện tích tam giác AHC = $8,64\,cm^2$. Độ dài của AH bằng

A. 4,8cm. B. 9,6cm C. 2,4 cm. D. 6,4 cm.

Câu 11: Trong hình bên, ABCD là hình thang có hai đáy AB = 2; CD = 5; AX song song với BC, BY song song với AD; BY lần lượt cắt AX, AC tại Z, W. Khi đó tỉ số diện tích của tam giác AZW và hình thang ABCD bằng



A. $\frac{8}{105}$ B. $\frac{7}{105}$ C. $\frac{9}{105}$ D. $\frac{10}{105}$

Câu 12: Cho hình thang ABCD có AB song song với CD, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại 0. Qua 0 kẻ đường thẳng song song với hai đáy, cắt AD và BC lần lượt tại P và Q. Khi PQ = a thì giá trị của $\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$ bằng

A. $\frac{1}{a}$ B. $\frac{2}{a}$ C. $\frac{3}{a}$ D. $\frac{4}{a}$

Câu 13: Cho tam giác ABC đều, có cạnh bằng 6cm. Trên đoạn BC lấy điểm D sao cho BD = 2 cm. đường trung trực của đoạn AD cắt AB tại E. Độ dài của DE bằng

A. 2,8 cm B. 5,2 cm C. 3,6 cm D. 3 cm

Câu 14: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (0), đường thẳng AD cắt đường thẳng Bc tại Q, đường thẳng AB cắt đường thẳng CD tại P. Từ P, Q lần lượt kẻ các tiếp tuyến PM, QN với (0) (M, N là các tiếp điểm). Biết PM = u, QN = v. Độ dài của PQ bằng

A.$\frac{u+v}{2}$ B. $\frac{uv}{2}$ C. $\sqrt{u^2+v^2}$ D. $\sqrt{uv}$

Câu 15: Cho tam giác ABC đều, nội tiếp đường tròn tâm (0;R). D là điểm di động trên cạnh BC, đường thẳng AD cắt đường tròn (0) tại E, (E khác A). Gọi $R_1 R_2$ lần lượt là bán kính của đường tròn ngoại tiếp các tam giác EBD, ECD. Giá trị lớn nhất của $R_1 R_2$ bằng

A. . $\frac{\sqrt{3}R^2}{4}$ B. $\frac{R^2}{4}$ C. $\frac{3R^2}{4}$ D. $\frac{3R^2}{2}$

Câu 16: Một đoàn học sinh đi trải nghiệm ở công viên Văn Lang thành phố Việt Trì bằng ô tô. Nếu mỗi ô tô chở 22 học sinh thì thừa 1 học sinh. Nếu bớt đi 1 ô tô thì số học sinh được chia đều cho các ô tô còn lại. Biết mỗi ô tô chở không quá 30 học sinh, số học sinh của đoàn tham quan là

A. 506. B. 528. C. 507. D. 529.

II. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 ĐIỂM)

Bài 1 (3,0 điểm)

1, Tìm tất cả các cặp sô nguyên dương (x,y) thỏa mãn $3(x^2+y^2)+2(xy-1)=662$

2, Cho các số nguyên dương a, b, m, n thỏa mãn (a,b) = 1 và $\frac{m^2+n^2}{a}=\frac{mn}{b}$

Chứng minh rằng: $\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}$ là số nguyên.

Bài 2 (4,0 điểm)

1, cho a, b, x, y là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} \frac{x^4}{a}+\frac{y^4}{b}=\frac{1}{a+b} \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ Chứng minh rằng:

$\frac{x^{10}}{a^5}+\frac{y^{10}}{b^5}=\frac{2}{(a+b)^5}$

2, Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{5x^2+2x-3}=5x^2+4x-5$

3, Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x+y)+\sqrt{x+y}=\sqrt{2y}(\sqrt{2y^3}+1) \\ \sqrt{2x+3}.\sqrt[3]{y+5}=x^2+x-6 \end{cases}$

Bài 3 (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{BAC} < 90°$). Một đường tròn tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại B, C. Trên cung BC nằm trong tam giác ABC lấy điểm M (M khác B, C). Gọi I, H, K lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng MB và IK. Q là giao điểm của hai đường thẳng MC và IH, T là giao điểm của hai đường thẳng HK và MI.

a, Chứng minh TK.MH = MK.TH

b, Chứng minh PQ song song với BC.

c, Gọi (0_1) và (0_2) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác MPK và MQH, N là giao điểm thứ hai của (0_1) và (0_2) (N khác M). Chứng minh khi M di động trên cung nhỏ BC thì đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4 (1,0 điểm)

Cho x, y, z, t là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2+t^2=2023$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\frac{x}{2023\sqrt{2023}+yzt}+\frac{y}{2023\sqrt{2023}+xzt}+\frac{z}{2023\sqrt{2023}+txy}+\frac{t}{2023\sqrt{2023}+xyz}$$

ĐÁP ÁN

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu	Đáp án	Câu	Đáp án
1	**A**	9	**B**
2	**A**	10	**A**
3	**A**	11	**A**
4	**B**	12	**B**
5	**D**	13	**A**
6	**D**	14	**C**
7	**D**	15	**B**
8	**B**	16	**D**

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1 (3,0 điểm)

1, Xét phương trình:

$(x^2+y^2)+2(xy-1)=662.$

$\Leftrightarrow 3\left[(x+y)^2-2xy\right]+2xy=664$

$\Leftrightarrow 3(x+y)^2-4xy=664$

$\Leftrightarrow 3(x+y)^2=4xy+664$

Đặt S = x + y; P = xy, ($S^2 \geq 4P$) (*), ta được PT: $3S^2=4P+664$ (1)

Vì $S^2 \geq 4P$ nên $3S^2 \leq S^2+664 \Leftrightarrow S^2 \leq 332$.

Lại có: P > 0 nên $3S^2 > 664 \Leftrightarrow S^2 > \frac{664}{3}$ suy ra $\frac{664}{3} < S^2 \le 332$

Từ (1) suy ra: S chẵn nên S $\in \{16; 18\}$.

Với S = 16 suy ra P = 26, (t/m (*)). Khi đó x, y là 2 nghiệm của phương trình:

$x^2 - 16x + 26 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 + \sqrt{38} \\ x = 8 - \sqrt{38} \end{cases}$ (loại do x, y nguyên dương).

Với S = 18 suy ra P = 77, thỏa mãn (*). Khi đó x, y là hai nghiệm của phương trình:

$x^2 - 18x + 77 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 11 \end{cases} (t/m)$.

Vậy có 2 cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn là: (7;11) và (11;7).

2, Gọi d = (m, n) suy ra m = dx, n = dy, (x, y) = 1; d, x, y $\in Z^*$.

Thay vào (1), ta được: $b(x^2 + y^2) = axy$ (2)

Từ (2) suy ra: axy $\vdots (x^2 + y^2)$ mà (x,y) = 1 nên a $\vdots (x^2 + y^2)$.

Và $b(x^2 + y^2) \vdots a \text{ và } (a; b) = 1 \text{ nên } (x^2 + y^2) \vdots a$

Vậy ta phải có: $x^2 + y^2 = a$, kéo theo b = xy.

Suy ra: a +2b = $(x + y)^2$; x, y $\in Z^*$. Suy ra: $\sqrt{a + 2b} \in Z$.

Lại có: a – 2b = $(x - y)^2 \Rightarrow \sqrt{a - 2b} \in Z$.

Do đó: $\sqrt{a + 2b} + \sqrt{a - 2b}$ là số nguyên.

Bài 2 (4,0 điểm).

1, Từ giả thiết, ta có:

$$\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{a + b} = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{a + b}$$

$$\Rightarrow (a + b)\frac{x^4}{a} + (a + b)\frac{y^4}{b} = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \Leftrightarrow x^4 + \frac{b}{a}x^4 + y^4 + \frac{a}{b}y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{ab}x^4 + \frac{a^2}{ab}y^4 = 2x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow b^2x^4 + a^2y^4 = 2abx^2y^2$$

$$\Leftrightarrow (bx^2 - ay^2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow bx^2 = ay^2$$

Suy ra: $\frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a + b} = \frac{1}{a + b}$ (*).

Áp dụng kết quả (*), ta có:

$$\frac{x^{10}}{a^5}=\left(\frac{x^2}{a}\right)^5=\left(\frac{1}{a+b}\right)^5=\frac{1}{(a+b)^5}$$

$$\frac{y^{10}}{b^5}=\left(\frac{y^2}{b}\right)^5=\left(\frac{1}{a+b}\right)^5=\frac{1}{(a+b)^5}$$

Do đó: $\frac{x^{10}}{a^5}+\frac{y^{10}}{b^5}=\frac{1}{(a+b)^5}+\frac{1}{(a+b)^5}=\frac{2}{(a+b)^5}$

2, Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l} x\le -1 \\ x\ge \frac{3}{5} \end{array}\right.(*)$

Ta có:

$$(x+1)\sqrt{5x^2+2x-3}=5x^2+4x-5$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\sqrt{5x^2+2x-3}=5x^2+2x-3+2x-2 \ (1)$$

Đặt t = $\sqrt{5x^2+2x-3}$, (t≥ 0).

Khi đó phương trình (1) trở thành: $t^2-(x+1)t+2x-2=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=x-1 \end{array}\right.$$

Với t = 2 $\Rightarrow \sqrt{5x^2+2x-3}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{-7}{5} \end{array}\right.(t/m(*)$

Với t = x -1 $\Rightarrow \sqrt{5x^2+2x-3}=x-1$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+x-1=0 \\ x\ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.(vô\,nghiệm) \\ x\ge 1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm x = 1, $x=\frac{-7}{5}$

3, Điều kiện: $x\ge -\frac{3}{2}; y\ge 0; x+y\ge 0$.

Xét phương trình (1): $x(x+y)+\sqrt{x+y}=2\sqrt{2y}\left(\sqrt{2y^3}+1\right)$

$\Leftrightarrow x^2+xy+\sqrt{x+y}=2y^2+\sqrt{2y}$

$\Leftrightarrow x^2+xy-2y^2+(\sqrt{x+y}-\sqrt{2y})=0$ (3)

Xét $\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}=0 \Leftrightarrow x=y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}>0$, ta có: (3) $\Leftrightarrow (x+2y)(x-y)+\dfrac{x+y-2y}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}=0$

$\Leftrightarrow (x-y)\left(x+2y+\dfrac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=y \\ x+2y+\dfrac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}=0 \end{array}\right.$

Do x + y ≥ 0; $y>0$ *nên* $x+2y+\dfrac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{2y}}>0$

Với x = y, thay vào phương trình (2) của hệ, được phương trình:

$\sqrt{2x+3}.\sqrt[3]{x+5}=x^2+x-6$ (4)

Nhận xét VT (3)≥ 0, $\forall x\geq -\dfrac{3}{2}$ *nên* $x^2+x-6\geq 0 \Rightarrow x\geq 2$

(4) $\Leftrightarrow (\sqrt{2x+3}-3)\sqrt[3]{x+5}+3(\sqrt[3]{x+5}-2)=x^2+x-12$

$\sqrt[3]{x+5}.\dfrac{2x-6}{\sqrt{2x+3}+3}+3.\dfrac{x+5-8}{(\sqrt[3]{x+5})^2+2\sqrt[3]{x+5}+4}=(x-3)(x+4)$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{2\sqrt[3]{x+5}}{\sqrt{2x+3}+3}+\dfrac{3}{(\sqrt[3]{x+5})^2+2\sqrt[3]{x+5}+4}-(x+4)\right)=0$ (4)

Vì x $\geq 2 \Longrightarrow 2x+3=x+5+x-2\geq x+5 \Rightarrow \sqrt{2x+3}\geq \sqrt[3]{x+5}$

$\Rightarrow \sqrt{2x+3}>\sqrt[3]{x+5} \Rightarrow \dfrac{2\sqrt[3]{x+5}}{\sqrt{2x+3}+3}<2$

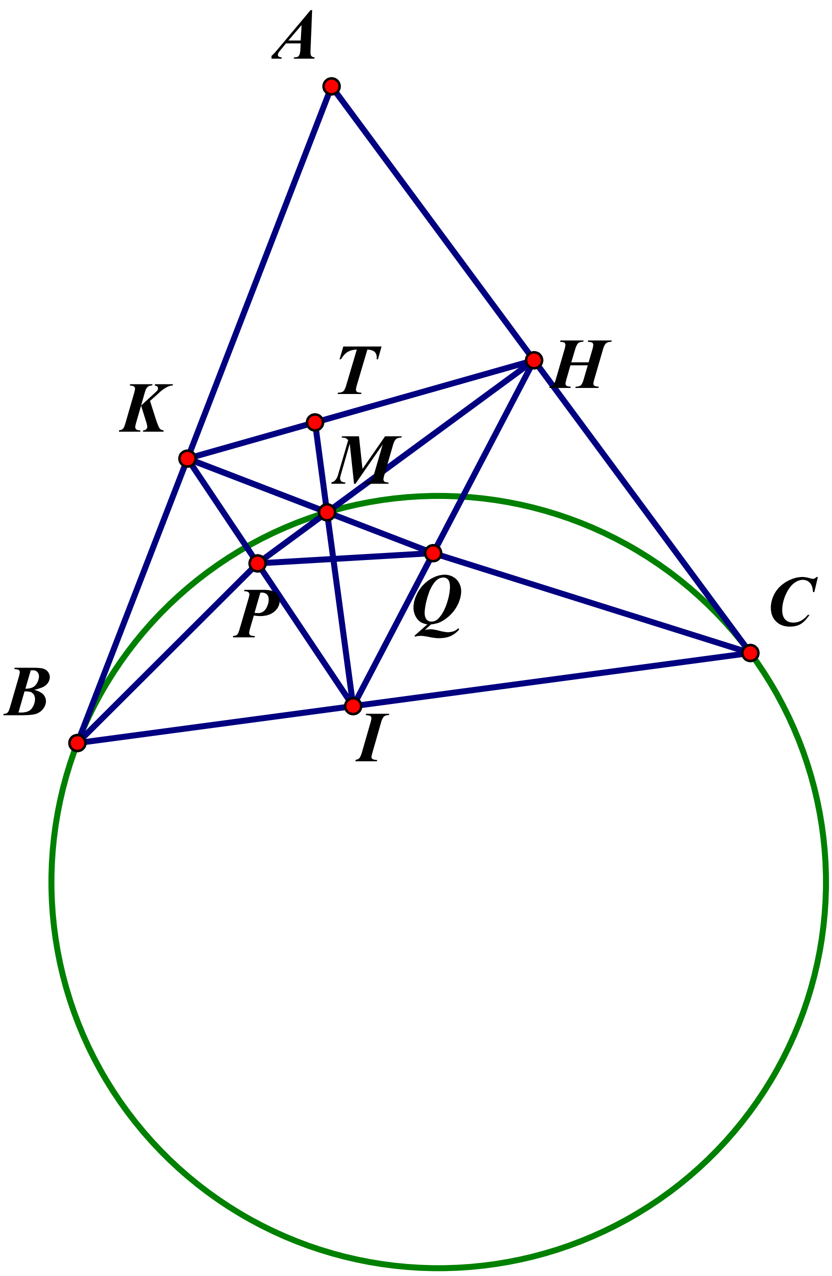
Lại có:

$\dfrac{3}{(\sqrt[3]{x+5})^2+2\sqrt[3]{x+5}+4}<\dfrac{3}{4}<1, \forall x\geq 2$

Suy ra: $\dfrac{2\sqrt[3]{x+5}}{\sqrt{2x+3}+3}+\dfrac{3}{(\sqrt[3]{x+5})^2+2\sqrt[3]{x+5}+4}-(x+4)<0, \forall x\geq 2$

PT (4) $\Leftrightarrow x=3$. Vậy hpt đã cho có nghiệm duy nhất (x;y) = (3;3).

Bài 3 (3,0 điểm):



a, Từ giả thiết có tứ giác BKMI nội tiếp suy ra $\widehat{KBI} = \widehat{KBI}$.

Tứ giác CHMI nội tiếp $\widehat{HCI} = \widehat{TMH}$.

Do tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

Hay $\widehat{KMI} = \widehat{HMI}$.

Vì thế có MT là đường phân giác trong $\widehat{KMH}$.

Từ đó ta có: $\dfrac{TH}{TK} = \dfrac{MH}{MK}$

Suy ra: TH.MK = MH.TK

b, Tứ giác CHMI nội tiếp suy ra $\widehat{MIH}=\widehat{MCH}$ mà $\widehat{MCH}=\widehat{MCB}$(góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung) nên $\widehat{MIH}=\widehat{MCB}$.

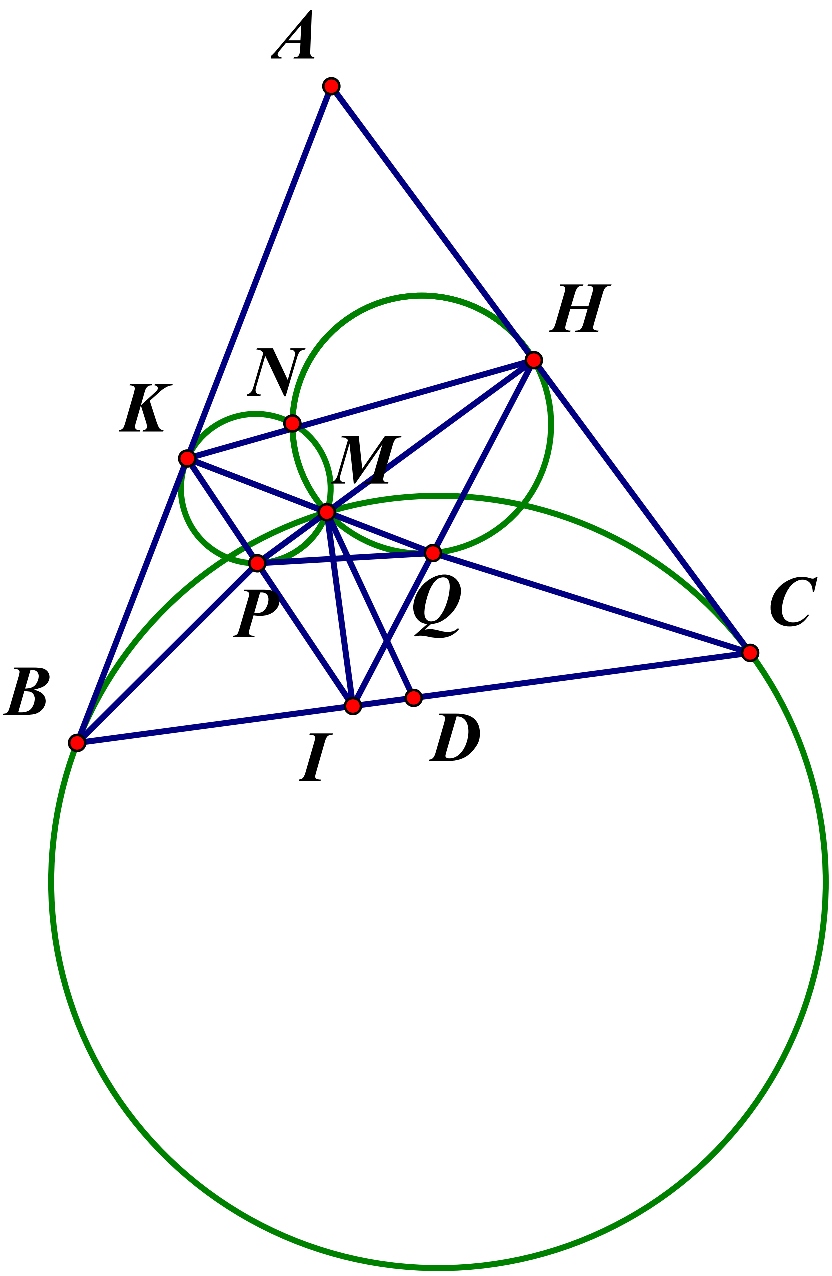
Tương tự: $\widehat{MIK}=\widehat{MCB}(*)$

Từ đó: $\widehat{PMQ}=\widehat{PIQ}=180°$. Suy ra tứ giác MPIQ nội tiếp.

Do tứ giác MPIQ nội tiếp nên $\widehat{MQP}=\widehat{MIK}$;

Theo (*) $\widehat{MIK}=\widehat{MCB}$nên $\widehat{MQP}=\widehat{MCB}$

Từ đó suy ra PQ song song với BC.



c, Do PQ//BC nên$\widehat{MPQ}=\widehat{MBC}$, $\widehat{MBC}=\widehat{IKM}$(tứ giác BKMI nội tiếp).

Suy ra $\widehat{PKM}=\widehat{MPQ}$.

Vì Q, K nằm khác phía đối v MP nên PQ là tiếp tuyến của đường tròn (0_1) tại P. tương tự PQ là tiếp tuyến của đường tròn (0_2) tại Q.

Gọi E là giao điểm cuả đường thẳng MN và PQ.

Chứng minh: $EP^2=EM.EN;EQ^2=EM.EN$ nên E là trung điểm của PQ. Suy ra MN đi qua trung điểm E của PQ.

Do PQ//BC nên MN đi qua trung điểm D của BC, D là điểm cố định.

Từ đó ta được đpcm.

Bài 4 (1,0 điểm)

Đặt $a=\frac{x}{\sqrt{2023}}$; $b=\frac{y}{\sqrt{2023}}$; $c=\frac{z}{\sqrt{2023}}$; $d=\frac{t}{\sqrt{2023}}$.

Khi đó có $\begin{cases} a,b,c,d\ge 0 \\ a^2+b^2+c^2+d^2=1 \end{cases}$. $F=\frac{1}{2023}\left(\frac{a}{1+bcd}+\frac{b}{1+acd}+\frac{c}{1+abd}+\frac{d}{1+abc}\right)$.

Chỉ ra được:

$$F\ge\frac{1}{2023}.\frac{(a+b+c+d)^2}{a+b+c+d+4abcd}$$

Nhận xét: $0\le a,b,c,d\le 1$ suy ra (1-a)(1-b)(1-c)(1-d) ≥ 0 . Hay

$$Q=1+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)-(a+b+c+d)-4abcd$$

$$\ge(ab+ac+ad+bc+bd+cd)-5abcd+(abc+abd+acd+bcd)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd\ge 6\sqrt[6]{(abcd)^3}=6\sqrt{abcd}$$

Ngoài ra $abc+abd+bcd+acd\ge 0$

Suy ra $Q\ge 6\sqrt{abcd}-5abcd=5(\sqrt{abcd}-abcd)+\sqrt{abcd}\ge 0,\forall a,b,c,d\in[0;1]$.

Do

$a^2+b^2+c^2+d^2=1\, nên\, Q=(a+b+c+d)^2-(a+b+c+d+4abcd)\ge 0\, suy\, ra\, (a+b+c+d)^2\ge(a+b+c+d+4abcd$

Từ đó $F\ge\frac{1}{2023}$

Dấu bằng xảy ra khi:

$\Leftrightarrow a=b=c=0;d=1$ và các hoán vị hay $x=y=z=0;t=\sqrt{2023}$ và các hoán vị. Vậy GTNN của F bằng $\frac{1}{2023}$.