

CHỦ ĐỀ 2 : PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

LÍ THUYẾT

❖ Trong không gian $Oxyz$ phương trình dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng

- Phương trình mặt phẳng (P) : $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$
- Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_o(x_o; y_o; z_o)$ và nhận vectơ $\vec{n} = (A; B; C)$, $\vec{n} \neq \vec{0}$ làm vectơ pháp tuyến có dạng $(P): A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$
- Nếu (P) có cặp vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trên (P) thì vectơ pháp tuyến của (P) được xác định $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$

❖ Các trường hợp riêng của mặt phẳng:

Trong không gian $Oxyz$ cho mp $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Khi đó:

- $D = 0$ khi và chỉ khi (α) đi qua gốc tọa độ.
- $A = 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$ khi và chỉ khi (α) song song với trục Ox
- $A = 0, B = 0, C \neq 0, D \neq 0$ khi và chỉ khi (α) song song mp (Oxy)
- $A, B, C, D \neq 0$. Đặt $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$ Khi đó $(\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

❖ Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$ cho mp $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\alpha'): A'x + B'y + C'z + D' = 0$

- (α) cắt $(\alpha') \Leftrightarrow \begin{cases} AB' \neq A'B \\ BC' \neq B'C \\ CB' \neq C'B \end{cases} \quad (\alpha) // (\alpha') \Leftrightarrow \begin{cases} AB' = A'B \\ BC' = B'C \text{ và } AD' \neq A'D \\ CB' = C'B \end{cases}$
- $(\alpha) \equiv (\alpha') \Leftrightarrow \begin{cases} AB' = A'B \\ BC' = B'C \\ CB' = C'B \\ AD' = A'D \end{cases}$
- **Đặc biệt:** $(\alpha) \perp (\alpha') \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A.A' + B.B' + C.C' = 0$

❖ Góc giữa hai mặt phẳng:

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ)$

$(P): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$

- $\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q) \right| = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = \frac{|A.A' + B.B' + C.C'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(m;0;0)$, $N(0;n;0)$ và $P(0;0;p)$

Với m, n, p là các số dương thay đổi thỏa $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 3$. Mặt phẳng (MNP) luôn đi qua điểm:

- A. $F(3;3;3)$. B. $E\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. C. $H\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. D. $G(1;1;1)$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình mặt phẳng (MNP) là: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$.

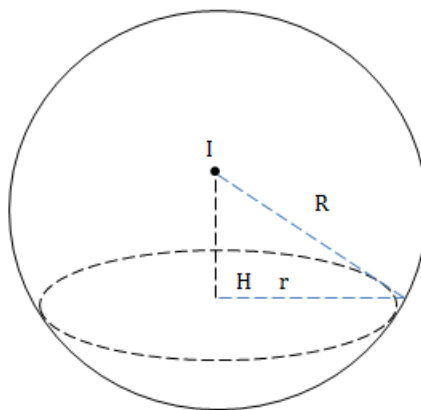
Mà: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 3 \Rightarrow \frac{1}{3m} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3p} = 1$. Vậy mặt phẳng (MNP) luôn đi qua $E\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

VÍ DỤ 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 12$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm của mặt cầu và đáy là hình tròn giới hạn bởi (C) có thể tích lớn nhất. Phương trình của mặt phẳng (Q) là

- A. $\begin{cases} 2x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x + 2y - z + 11 = 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} 2x + 2y - z - 6 = 0 \\ 2x + 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} 2x + 2y - z - 4 = 0 \\ 2x + 2y - z + 17 = 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} 2x + 2y - z + 2 = 0 \\ 2x + 2y - z + 8 = 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R = 2\sqrt{3}$.

Gọi r là bán kính đường tròn (C) và H là hình chiếu của I lên (Q) .

Đặt $IH = x$ ta có $r = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{12 - x^2}$

Vậy thể tích khối nón tạo được là $V = \frac{1}{3} \cdot IH \cdot S_{((C))} = \frac{1}{3} \cdot x \cdot \pi \left(\sqrt{12 - x^2} \right)^2 = \frac{1}{3} \pi (12x - x^3)$.

Gọi $f(x) = 12x - x^3$ với $x \in (0; 2\sqrt{3})$. Thử tính nón lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất

Ta có $f'(x) = 12 - 3x^2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên :

x	0	2	$2\sqrt{3}$		
f'		+	0	-	
f	0		16		0

Vậy $V_{\max} = \frac{1}{3}\pi 16 = \frac{16\pi}{3}$ khi $x = IH = 2$.

Mặt phẳng $(Q) \parallel (P)$ nên $(Q): 2x + 2y - z + a = 0$

Và $d(I; (Q)) = IH \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) - 3 + a|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 2 \Leftrightarrow |a - 5| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 11 \\ a = -1 \end{cases}$.

Vậy mặt phẳng (Q) có phương trình $2x + 2y - z - 1 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 11 = 0$.

VÍ DỤ 3: Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1; 2; 3)$ là trực tâm của ΔABC với A, B, C là ba điểm lần lượt nằm trên các trục Ox, Oy, Oz (khác gốc tọa độ). Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C là

A. $3x + y + 2z - 9 = 0$ B. $x + 2y + 3z - 14 = 0$ C. $3x + 2y + z - 10 = 0$ D. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$

Lời giải

Chọn B

Giả sử $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}(1-a; 2; 3); \overrightarrow{BH}(1; 2-b; 3); \overrightarrow{BC}(0; -b; c); \overrightarrow{AC}(-a; 0; c)$

Do H là trực tâm nên ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b + 3c = 0 \\ -a + 3c = 0 \end{cases}$

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Vì $H \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$.

Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} -2b + 3c = 0 \\ -a + 3c = 0 \\ \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = \frac{2b}{3} \\ \frac{1}{2b} + \frac{2}{b} + \frac{9}{2b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = 7 \\ c = \frac{14}{3} \end{cases}$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{14} + \frac{y}{7} + \frac{3z}{14} = 1 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0$.

VÍ DỤ 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - 2y - 2z - 5 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 4$. Tìm phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S)

A. $x - 2y - 2z + 1 = 0$.

B. $-x + 2y + 2z + 5 = 0$.

C. $x - 2y - 2z - 23 = 0$.

D. $-x + 2y + 2z + 17 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; -3)$ và bán kính $R = 2$.

Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S) .

Phương trình (Q) có dạng: $x - 2y - 2z + D = 0$ ($D \neq -5$).

$$(Q) \text{ tiếp xúc với } (S) \text{ khi và chỉ khi } d(I, (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{|1 - 2(-2) - 2(-3) + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow |D + 11| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} D + 11 = 6 \\ D + 11 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = -5 \\ D = -17 \end{cases}$$

Đổi chiều điều kiện suy ra $D = -17$.

Vậy phương trình của (Q) là $x - 2y - 2z - 17 = 0 \Leftrightarrow -x + 2y + 2z + 17 = 0$.

VÍ DỤ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2; -1; -2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ đường thẳng d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $x + 3y + 2z + 10 = 0$.

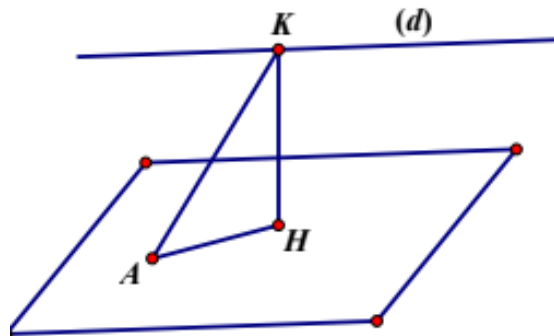
B. $x - 2y - 3z - 1 = 0$.

C. $3x + z + 2 = 0$.

D. $x - y - 6 = 0$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $K(x; y; z)$ là hình chiếu vuông góc của A lên d . Tọa độ của K là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} -x+1=y-1 \\ y-1=-z+1 \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow K(1;1;1).$$

Ta có $d((d), (P)) = d(K, (P)) = KH \leq KA = \sqrt{14}$. Nên khoảng cách từ d đến (P) đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{14}$ khi mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với $\overline{KA}$. Khi đó có thể chọn VTPT của (P) là $\overline{KA}$. Vậy (P) vuông góc với mặt phẳng $3x + z + 2 = 0$.

VÍ DỤ 6: Trong không gian $(Oxyz)$, cho hai điểm $A(0;8;2)$, $B(9;-7;23)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(S): (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 72$. Mặt phẳng $(P): x + by + cz + d = 0$ đi qua điểm A và tiếp xúc với mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ B đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Giá trị của $b + c + d$ khi đó là

A. $b + c + d = 2$. **B.** $b + c + d = 4$. **C.** $b + c + d = 3$. **D.** $b + c + d = 1$

Lời giải

Chọn C

Vì $A \in (P)$ nên ta $8b + 2c + d = 0 \Leftrightarrow d = -8b - 2c \Rightarrow (P): x + by + cz - (8b + 2c) = 0$.

Do (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên $d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|5 - 11b + 5c|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} = 6\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } d(B; (P)) &= \frac{|9 - 7b + 23c - 8b - 2c|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} = \frac{|(5 - 11b + 5c) + 4(1 - b + 4c)|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} \\ \Rightarrow d(B; (P)) &\leq \frac{|5 - 11b + 5c|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} + 4 \frac{|1 - b + 4c|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} \Leftrightarrow d(B; (P)) \leq 6\sqrt{2} + 4 \frac{|1 - b + 4c|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Cosi-Svac}}{\Leftrightarrow} d(B; (P)) \leq 6\sqrt{2} + 4 \frac{\sqrt{(1+1+16)(1+b^2+c^2)}}{\sqrt{1+b^2+c^2}} \Leftrightarrow d(B; (P)) \leq 18\sqrt{2}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} 1 = -b = \frac{c}{4} \\ \frac{|5 - 11b + 5c|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}} = 6\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = 4 \\ d = 0 \end{cases}.$$

Vậy $P_{\max} = 18\sqrt{2}$ khi $b + c + d = 3$.