

TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI – XUẤT SẮC MỨC 8-9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Tích phân Hàm ẩn

Dạng 1.1 Giải bằng phương pháp đổi biến

Thông thường nếu trong bài toán xuất hiện $\int_a^b f[u(x)]dx$ thì ta sẽ đặt $u(x) = t$

Câu 1. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\int_{-5}^1 f(x)dx = 9. \text{ Tích phân } \int_0^2 [f(1-3x)+9]dx \text{ bằng}$$

A. 15.

B. 27.

C. 75.

D. 21.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int_0^2 [f(1-3x)+9]dx = \int_0^2 f(1-3x)dx + \int_0^2 9dx = \int_0^2 f(1-3x)dx + 18.$$

$$\text{Xét } \int_0^2 f(1-3x)dx, \text{ đặt } t = 1-3x \Rightarrow dt = -3dx \Rightarrow dx = -\frac{dt}{3}.$$

$$\text{Đổi cận khi } x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 2 \Rightarrow t = -5. \text{ Suy ra } \int_0^2 f(1-3x)dx = -\frac{1}{3} \int_1^{-5} f(t)dt = \frac{1}{3} \int_{-5}^1 f(t)dt.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^2 [f(1-3x)+9]dx = \frac{1}{3} \int_{-5}^1 f(t)dt + 18 = \frac{1}{3} \int_{-5}^1 f(x)dx + 18 = 21.$$

Câu 2. (Chuyên Lam Sơn - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ thỏa mãn

$$\int_0^{10} f(x)dx = 7, \int_2^{10} f(x)dx = 1. \text{ Tính } P = \int_0^1 f(2x)dx.$$

A. $P = 6.$

B. $P = -6.$

C. $P = 3.$

D. $P = 12.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int_0^2 f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx - \int_2^{10} f(x)dx = 6.$$

$$\text{Xét } P = \int_0^1 f(2x)dx. \text{ Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt.$$

Đổi cận:

x	0	1
t	0	2

$$\text{Lúc đó: } P = \int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)dx = 3.$$

Câu 3. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho $I = \int_1^5 f(x)dx = 26$. Khi đó $J = \int_0^2 x[f(x^2+1)+1]dx$ bằng

A. 15.

B. 13.

C. 54.

D. 52.

Lời giải

Chọn A

$$+ \text{Ta có: } J = \int_0^2 x \left[f(x^2 + 1) + 1 \right] dx = \int_0^2 x dx + \int_0^2 x f(x^2 + 1) dx.$$

$$+ \text{Xét } A = \int_0^2 x dx.$$

$$A = \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2.$$

$$+ \text{Xét } B = \int_0^2 x f(x^2 + 1) dx.$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx.$$

Đổi cận:

Ta có:

x	0	2
t	1	5

$$B = \int_0^2 x f(x^2 + 1) dx = \frac{1}{2} \int_1^5 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_1^5 f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 26 = 13.$$

$$\text{Vậy } J = A + B = 15.$$

Câu 4. (Chuyên Lào Cai - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4$ và

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2. \text{ Tích phân } I = \int_0^3 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $I = 8$.

B. $I = 6$.

C. $I = 4$.

D. $I = 10$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx. \text{ Khi đó } x = 1 \Rightarrow t = 1; x = 9 \Rightarrow t = 3$$

$$\text{Suy ra } \int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^3 f(t) dt = 4 \Rightarrow \int_1^3 f(t) dt = 2.$$

$$\text{Đặt } t = \sin x; x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dt = \cos x dx. \text{ Khi đó. } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$$

$$\text{Suy ra } \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 2 + 2 = 4.$$

Câu 5. (THPT Cẩm Giàng 2019) Cho biết $\int_{-1}^5 f(x) dx = 15$. Tính giá trị của $P = \int_0^2 [f(5-3x) + 7] dx$.

A. $P = 15$.

B. $P = 37$.

C. $P = 27$.

D. $P = 19$.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = 5 - 3x \Rightarrow dt = -3dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{3} dt.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \text{ thì } t = 5; x = 2 \text{ thì } t = -1.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \int_0^2 [f(5-3x) + 7] dx = \int_0^2 f(5-3x) dx + \int_0^2 7 dx = \int_5^{-1} f(t) \frac{dt}{-3} + 7x \Big|_0^2 = \frac{1}{3} \int_{-1}^5 f(t) dt + 14 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 15 + 14 = 19. \end{aligned}$$

Câu 6. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho $\int_0^4 f(x) dx = 2018$. Tính tích phân

$$I = \int_0^2 [f(2x) + f(4-2x)] dx.$$

A. $I = 0$.

B. $I = 2018$.

C. $I = 4036$.

D. $I = 1009$.

Lời giải

$$\text{Ta có } I = \int_0^2 f(2x) dx + \int_0^2 f(4-2x) dx = H + K$$

$$\text{Tính } K = \int_0^2 f(2x) dx.$$

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx; \text{ đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 2 \Rightarrow t = 4. \text{ Nên } K = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t) dt = 1009$$

$$\text{Tính } H = \int_0^2 f(4-2x) dx,$$

$$\text{Đặt } t = 4-2x \Rightarrow dt = -2dx; \text{ đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 4; x = 2 \Rightarrow t = 0. \text{ Nên } H = \frac{1}{2} \int_4^0 f(t) dt = 1009$$

$$\text{Suy ra } I = K + H = 2018.$$

Câu 7. Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-6; 6]$. Biết rằng $\int_{-1}^2 f(x) dx = 8$; $\int_1^3 f(-2x) dx = 3$.

$$\text{Giá trị của } I = \int_{-1}^6 f(x) dx \text{ là}$$

A. $I = 5$.

B. $I = 2$.

C. $I = 14$.

D. $I = 11$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = f(x) \text{ là hàm số chẵn, suy ra } f(-2x) = f(2x). \text{ Khi đó: } \int_1^3 f(-2x) dx = \int_1^3 f(2x) dx = 3.$$

$$\text{Xét tích phân: } I_1 = \int_1^3 f(2x) dx.$$

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} dt = dx. \text{ Đổi cận: } x = 1 \Rightarrow t = 2; x = 3 \Rightarrow t = 6.$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_2^6 f(t) \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_2^6 f(t) dt = 3 \Rightarrow \int_2^6 f(t) dt = 6 \Rightarrow \int_2^6 f(x) dx = 6.$$

$$\text{Vậy } I = \int_{-1}^6 f(x) dx = \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx = 8 + 6 = 14.$$

Câu 8. (THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$\int_0^{\pi^2} f(x) dx = 2018, \text{ tính } I = \int_0^{\pi} x f(x^2) dx.$$

A. $I = 1008$.

B. $I = 2019$.

C. $I = 2017$.

D. $I = 1009$.

Lời giải

$$\text{Xét } I = \int_0^{\pi} x f(x^2) dx.$$

$$\text{Đặt } t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dt.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \pi \Rightarrow t = \pi^2.$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi^2} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi^2} f(x) dx = 1009.$$

- Câu 9.** (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019) Cho $\int_1^2 f(x) dx = 2$. Khi đó $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ bằng
- A. 1. B. 4. C. 2. D. 8.

Lời giải

$$\text{Đặt } \sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2dt. \text{ Khi } x = 1 \text{ thì } t = 1; x = 4 \text{ thì } t = 2.$$

$$\text{Suy ra } \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 f(t) \cdot 2dt = 2 \int_1^2 f(t) dt = 2 \cdot 2 = 4.$$

$$\text{Vậy } \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4.$$

- Câu 10.** (Sở Hà Nội 2019) Cho $\int_1^2 f(x^2 + 1) x dx = 2$. Khi đó $I = \int_2^5 f(x) dx$ bằng
- A. 2. B. 1. C. 4. D. -1.

Lời giải

$$\text{Đặt } x^2 + 1 = t \Rightarrow 2x dx = dt \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2}.$$

$$\text{Đổi cận } x = 1 \Rightarrow t = 2; x = 2 \Rightarrow t = 5.$$

$$\text{Suy ra: } 2 = \int_1^2 f(x^2 + 1) x dx = \frac{1}{2} \int_2^5 f(t) dt \Rightarrow \int_2^5 f(t) dt = 4 \Rightarrow I = \int_2^5 f(x) dx = 4.$$

- Câu 11.** Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $[1; 3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$ đồng thời

$$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6. \text{ Tính } \int_1^3 f(4-x) dx + 2 \int_1^2 g(2x-1) dx$$

- A. 9. B. 6. C. 7. D. 8.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx + 3 \int_1^3 g(x) dx = 10.$$

$$\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6 \Leftrightarrow 2 \int_1^3 f(x) dx - \int_1^3 g(x) dx = 6.$$

Đặt $u = \int_1^3 f(x)dx$; $v = \int_1^3 g(x)dx$.

Ta được hệ phương trình:
$$\begin{cases} u + 3v = 10 \\ 2u - v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_1^3 f(x)dx = 4 \\ \int_1^3 g(x)dx = 2 \end{cases}$$

+ Tính $\int_1^3 f(4-x)dx$

Đặt $t = 4 - x \Rightarrow dt = -dx$; $x = 1 \Rightarrow t = 3$; $x = 3 \Rightarrow t = 1$.

$$\int_1^3 f(4-x)dx = \int_3^1 f(t)(-dt) = \int_1^3 f(t)dt = \int_1^3 f(x)dx = 4.$$

+ Tính $\int_1^2 g(2x-1)dx$

Đặt $z = 2x - 1 \Rightarrow dz = 2dx$; $x = 1 \Rightarrow z = 1$; $x = 2 \Rightarrow z = 3$.

$$\int_1^2 g(2x-1)dx = \frac{1}{2} \int_1^3 g(z)dz = \frac{1}{2} \int_1^3 g(x)dx = 1.$$

Vậy $\int_1^3 f(4-x)dx + 2 \int_1^2 g(2x-1)dx = 6$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^2 f(3x+1)dx = 6$. Tính $I = \int_0^7 f(x)dx$.

A. $I = 16$.

B. $I = 18$.

C. $I = 8$.

D. $I = 20$.

Lời giải

$A = \int_0^1 f(x)dx = 2$, $B = \int_0^2 f(3x+1)dx = 6$ đặt $t = 3x+1 \Rightarrow dt = 3dx$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=2 \Rightarrow t=7 \end{cases}$

Ta có: $B = \frac{1}{3} \int_1^7 f(t)dt = 6 \Rightarrow \int_1^7 f(t)dt = 18 \Rightarrow \int_1^7 f(x)dx = 18$.

Vậy $I = \int_0^7 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^7 f(x)dx = 20$.

Câu 13. (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019) Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = f(10-x)$ và $\int_3^7 f(x)dx = 4$. Tính $I = \int_3^7 xf(x)dx$.

A. 80.

B. 60.

C. 40.

D. 20.

Lời giải

Đặt $t = 10 - x$. Khi đó $dt = -dx$.

Đổi cận: $x = 3 \Rightarrow t = 7$.

$x = 7 \Rightarrow t = 3$.

Khi đó $I = -\int_7^3 (10-t)f(10-t)dt = \int_3^7 (10-t)f(10-t)dt = \int_3^7 (10-x)f(10-x)dx$

$$= \int_3^7 (10-x)f(x)dx = 10 \int_3^7 f(x)dx - \int_3^7 xf(x)dx = 10 \int_3^7 f(x)dx - I.$$

Suy ra $2I = 10 \int_3^7 f(x)dx = 10.4 = 40$. Do đó $I = 20$.

Câu 14. (THPT Quang Trung Đồng Đa Hà Nội 2019) Cho $\int_0^1 f(x)dx = 9$. Tính

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin 3x) \cos 3x dx.$$

A. $I = 5$.

B. $I = 9$.

C. $I = 3$.

D. $I = 2$.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \sin 3x \Rightarrow dt = 3 \cos 3x dx$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin 3x) \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$$

Câu 15. (Chuyên Quốc Học Huế -2019) Cho tích phân $I = \int_0^4 f(x)dx = 32$. Tính tích phân

$$J = \int_0^2 f(2x)dx.$$

A. $J = 32$

B. $J = 64$

C. $J = 8$

D. $J = 16$

Lời giải

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow \frac{dt}{2} = dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 2 \Rightarrow t = 4.$$

$$J = \int_0^2 f(2x)dx = \int_0^4 \frac{1}{2} f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^4 f(t)dt = \frac{1}{2} I = 16.$$

Câu 16. (Việt Đức Hà Nội 2019) Biết $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^9 f(x)dx = 9$. Khi đó giá trị của

$$\int_1^4 f(3x-3)dx \text{ là}$$

A. 0.

B. 24.

C. 27.

D. 3.

Lời giải

$$\text{Xét } I = \int_1^4 f(3x-3)dx.$$

$$\text{Đặt } t = 3x-3 \Rightarrow dt = 3dx.$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x = 4 \Rightarrow t = 9 \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \end{cases}. \text{ Vậy } I = \int_0^9 f(t) \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int_0^9 f(x)dx = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3.$$

Câu 17. (Đề Thi Công Bằng KHTN 2019) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 f(2x)dx = 2$. Tích phân $\int_0^2 f(x)dx$ bằng

A. 8.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2},$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow t = 2$$

$$\text{Ta có } 2 = \int_0^1 f(2x)dx = \int_0^2 \frac{f(t)dt}{2} = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)dt \Rightarrow \int_0^2 f(t)dt = 4$$

$$\text{Theo tính chất tích phân } \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 f(t)dt = 4$$

$$\text{Vậy } \int_0^2 f(x)dx = 4$$

Câu 18. Cho hàm $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{2017} f(x)dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(2017x)dx$.

A. $I = \frac{1}{2017}$.

B. $I = 0$.

C. $I = 2017$.

D. $I = 1$.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = 2017x \Rightarrow dt = 2017dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2017}dt$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 0 ; x = 1 \Rightarrow t = 2017$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^{2017} f(t) \cdot \frac{1}{2017}dt = \frac{1}{2017} \int_0^{2017} f(t)dt = \frac{1}{2017}.$$

Câu 19. Cho tích phân $\int_1^2 f(x)dx = a$. Hãy tính tích phân $I = \int_0^1 xf(x^2 + 1)dx$ theo a .

A. $I = 4a$.

B. $I = \frac{a}{4}$.

C. $I = \frac{a}{2}$.

D. $I = 2a$.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2xdx.$$

Đổi cận

x	0	1
t	1	2

$$I = \int_0^1 xf(x^2 + 1)dx = \int_1^2 f(t) \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_1^2 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x)dx = \frac{a}{2}.$$

Câu 20. (Thpt Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x)dx = 2 \text{ và } \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x}dx = 2. \text{ Tính } \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x}dx.$$

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

$$* I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\cos^2 x)}{\cos^2 x} \cdot \sin 2x dx.$$

$$\text{Đặt } \cos^2 x = t \Rightarrow \sin 2x dx = -dt.$$

Đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	1	$\frac{1}{2}$

$$\text{Khi đó } I_1 = -\frac{1}{2} \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t} dt \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = 4.$$

$$* I_2 = \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = \frac{1}{2} \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{\ln^2 x} \cdot \frac{2 \ln x}{x} dx.$$

$$\text{Đặt } \ln^2 x = t \Rightarrow \frac{2 \ln x}{x} dx = dt.$$

Đổi cận

x	e	e^2
t	1	4

$$\text{Khi đó } I_2 = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt \Rightarrow \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 4.$$

$$* \text{ Tính } I = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx. \text{ Đặt } 2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt.$$

Đổi cận

x	$\frac{1}{4}$	2
t	$\frac{1}{2}$	4

$$\text{Khi đó } I = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(t)}{t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt + \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 4 + 4 = 8.$$

Câu 21. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x^2; & x \geq 1 \\ 5 - x; & x < 1 \end{cases}$. Tính

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx + 3 \int_0^1 f(3-2x) dx.$$

A. $I = \frac{71}{6}.$

B. $I = 31.$

C. $I = 32.$

D. $I = \frac{32}{3}.$

Lời giải

$$\text{Xét tích phân } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx. \text{ Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$$

Đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

$$\text{Ta có } I_1 = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (5-x) dx = \left(5x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{9}{2}$$

$$\text{Xét tích phân } I_2 = \int_0^1 f(3-2x) dx. \text{ Đặt } t = 3-2x \Rightarrow dt = -2dx \Rightarrow dx = \frac{-dt}{2}$$

Đổi cận

x	0	1
t	3	1

Ta có

$$I_2 = \int_0^1 f(3-2x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 (x^2 + 3) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} + 3x \right) \Big|_1^3 = \frac{1}{2} \left(18 - \frac{10}{3} \right) = \frac{22}{3}$$

$$\text{Vậy } I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx + 3 \int_0^1 f(3-2x) dx = 9 + 22 = 31.$$

Câu 22. (THPT Yên Khánh - Ninh Bình- 2019) Cho $I = \int_1^2 f(x) dx = 2$. Giá trị của

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x f(\sqrt{3 \cos x + 1})}{\sqrt{3 \cos x + 1}} dx \text{ bằng}$$

- A. 2. B. $-\frac{4}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. -2.

Lời giải

$$\text{Đặt } u = \sqrt{3 \cos x + 1} \Rightarrow u^2 = 3 \cos x + 1 \Rightarrow -\frac{2}{3} u du = \sin x dx. \text{ Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1 \\ x = 0 \Rightarrow u = 2 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x f(\sqrt{3 \cos x + 1})}{\sqrt{3 \cos x + 1}} dx = \int_2^1 \frac{-2uf(u)}{3u} du = \frac{2}{3} \int_1^2 f(u) du = \frac{2}{3} \int_1^2 f(x) dx = \frac{4}{3}.$$

Câu 23. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Biết $\int_1^4 f(x) dx = 5$ và $\int_4^5 f(x) dx = 20$. Tính

$$\int_1^2 f(4x-3) dx - \int_0^{\ln 2} f(e^{2x}) e^{2x} dx.$$

- A. $I = \frac{15}{4}$. B. $I = 15$. C. $I = \frac{5}{2}$. D. $I = 25$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 4x - 3 \Rightarrow dt = 4dx$ thì

$$\int_1^2 f(4x-3) dx = \frac{1}{4} \int_1^5 f(t) dt = \frac{1}{4} \left(\int_1^4 f(t) dt + \int_4^5 f(t) dt \right) = \frac{1}{4} (5 + 20) = \frac{25}{4}.$$

Đặt $u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x} dx$ thì

$$\int_0^{\ln 2} f(e^{2x}) e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 f(u) du = \frac{5}{2}.$$

Vậy $I = \frac{25}{4} - \frac{5}{2} = \frac{15}{4}.$

Câu 24. (Chuyên Thái Bình 2019) Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) + f(2-x) = x.e^{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^2 f(x) dx.$$

A. $I = \frac{e^4 - 1}{4}.$

B. $I = \frac{2e - 1}{2}.$

C. $I = e^4 - 2.$

D. $I = e^4 - 1.$

Lời giải

Đặt $x = 2 - t \Rightarrow dx = -dt.$

$$\Rightarrow I = \int_2^0 f(2-t)(-dt) = \int_0^2 f(2-t)(dt) = \int_0^2 f(2-x) dx.$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^2 [f(x) + f(2-x)] dx = \int_0^2 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^2 = \frac{e^4 - 1}{2}.$$

Vậy $I = \frac{e^4 - 1}{4}.$

Câu 25. (Chuyên Vĩnh Phúc Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x) = 3f(x),$

$\forall x \in \mathbb{R}.$ Biết rằng $\int_0^1 f(x) dx = 1.$ Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x) dx.$

A. $I = 5$

B. $I = 6$

C. $I = 3$

D. $I = 2$

Lời giải.

Ta có: $3 = 3.1 = 3. \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 3f(x) dx = \int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) d(2x), \forall x \in \mathbb{R}.$

Đặt $2x = t \Rightarrow d(2x) = dt, \text{ với } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 2.$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) d(2x) = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (do hàm số } f(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R}).$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 6, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 6, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow 1 + \int_1^2 f(x) dx = 6, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = 5, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 2$ và $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 2$.

Tính $\int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx$.

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} \cdot f(\cos^2 x) dx = 2$.

Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -2 \sin x \cos x dx \Rightarrow -\frac{1}{2} dt = \sin x \cos x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$ và $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.

$\Leftrightarrow \int_1^0 \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} \cdot f(\cos^2 x) dx = 2 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = 4$.

Ta có $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 2 \Leftrightarrow \int_e^{e^2} \frac{\ln x \cdot f(\ln^2 x)}{x \ln^2 x} dx = 2$.

Tương tự trên ta có $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 2 \Leftrightarrow \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 4$.

* Tính $\int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx$.

Đặt $t = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$.

Đổi cận: $x = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ và $x = 2 \Rightarrow t = 4$.

Khi đó $\int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(t)}{t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt + \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 4 + 4 = 8$.

Câu 27. (Chuyên KHTN 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = \int_1^8 \frac{f(\sqrt[3]{x})}{x} dx = 6$. Tính tích phân $\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f(x^2)}{x} dx$

A. 4

B. 6

C. 7

D. 10

Lời giải

+) Đặt $t = \sqrt[3]{x} \Rightarrow t^3 = x \Rightarrow 3t^2 dt = dx$

Đổi cận $x=1 \Rightarrow t=1$ và $x=8 \Rightarrow t=2$.

$$\text{Khi đó } \int_1^8 \frac{f(\sqrt[3]{x})}{x} dx = \int_1^2 \frac{f(t)}{t^3} 3t^2 dt = 3 \int_1^2 \frac{f(t)}{t} dt = 6 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f(t)}{t} dt = 2$$

$$+) \text{ Đặt } t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -2 \cos x \sin x dx \Rightarrow dt = -2 \cos^2 x \tan x dx \Rightarrow \tan x dx = -\frac{1}{2t} dt$$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$ và $x=\frac{\pi}{3} \Rightarrow t=\frac{1}{4}$.

$$\text{Khi đó } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = -\frac{1}{2} \int_1^{\frac{1}{4}} \frac{f(t)}{t} dt = 6 \Rightarrow \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = 12$$

$$+) \text{ Đặt } t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow dt = 2x^2 \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \frac{dt}{t}$$

Đổi cận: $x=\frac{1}{2} \Rightarrow t=\frac{1}{4}$ và $x=\sqrt{2} \Rightarrow t=2$ Khi đó

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f(x^2)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(t)}{t} dt + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{f(t)}{t} dt = \frac{2+12}{2} = 7$$

Câu 28. (Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa

$$\int_0^{2018} f(x) dx = 2. \text{ Khi đó tích phân } \int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f(\ln(x^2+1)) dx \text{ bằng}$$

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

$$\text{Đặt } I = \int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f(\ln(x^2+1)) dx.$$

$$\text{Đặt } t = \ln(x^2+1) \Rightarrow dt = \frac{2x}{x^2+1} dx.$$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=\sqrt{e^{2018}-1} \Rightarrow t=2018$.

$$\text{Vậy } I = \int_0^{2018} f(t) dt = \int_0^{2018} f(x) dx = 2.$$

Câu 29. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 3$ và

$$\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1} dx = 1. \text{ Tính } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $I = 2$.

B. $I = 6$.

C. $I = 3$.

D. $I = 4$.

Lời giải

$$\text{Ta có } K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 3. \text{ Đặt } \tan x = t \Rightarrow dt = d \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (t^2 + 1) dx.$$

$$\text{Vậy } K = \int_0^1 f(t) \cdot \frac{1}{t^2+1} dt = \int_0^1 f(x) \cdot \frac{1}{x^2+1} dx = 3.$$

$$\text{Lại có } \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left[f(x) - \frac{1}{x^2+1} f(x) \right] dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} f(x) dx.$$

$$\text{Vậy suy ra } I = \int_0^1 f(x) dx = 4.$$

Câu 30. (SGD Thanh Hóa - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1. \text{ Tính tích phân } \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x} dx.$$

A. $I = 3.$ B. $I = \frac{3}{2}.$ C. $I = 2.$ D. $I = \frac{5}{2}.$

Lời giải

$$\text{Đặt } I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = 1, \quad I_2 = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = 1.$$

$$\square \text{ Đặt } t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x \cdot \cos x dx = 2 \sin^2 x \cdot \cot x dx = 2t \cdot \cot x dx.$$

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{1}{2}$	1

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \cdot f(\sin^2 x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) \cdot \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{4x} d(4x) = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x} dx.$$

$$\text{Suy ra } \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x} dx = 2I_1 = 2$$

$$\square \text{ Đặt } t = \sqrt{x} \Rightarrow 2t dt = dx.$$

x	1	16
t	1	4

$$I_2 = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x} dx = \int_1^4 \frac{f(t)}{t^2} 2t dt = 2 \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 2 \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(4x)}{4x} d(4x) = 2 \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx.$$

$$\text{Suy ra } \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx = \frac{1}{2} I_2 = \frac{1}{2}$$

Khi đó, ta có:

$$\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x} dx + \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(4x)}{x} dx = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Câu 31. (SGD - Nam Định - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn

$$f(x) = \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}. \text{ Tính tích phân } I = \int_3^4 f(x) dx.$$

- A. $I = 3 + 2\ln^2 2$. B. $I = 2\ln^2 2$. C. $I = \ln^2 2$. D. $I = 2\ln 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \left[\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x} \right] dx = \int_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} dx + \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$\text{Xét } K = \int_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\text{Đặt } 2\sqrt{x}-1=t \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{t+1}{2} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = dt.$$

$$\Rightarrow K = \int_1^3 f(t) dt = \int_1^3 f(x) dx.$$

$$\text{Xét } M = \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^4 \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^4 = 2\ln^2 2.$$

$$\text{Do đó } \int_1^4 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + 2\ln^2 2 \Rightarrow \int_3^4 f(x) dx = 2\ln^2 2.$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow I = -\frac{4}{7}I + \frac{2018}{7} \cdot \frac{98}{3} \Leftrightarrow \frac{11}{7}I = \frac{2018 \cdot 98}{7 \cdot 3} \Leftrightarrow I = \frac{197764}{33}.$$

Câu 32. (Nam Định - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[1; 4]$ và thỏa mãn

$$f(x) = \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}. \text{ Tính tích phân } I = \int_3^4 f(x) dx.$$

- A. $I = 3 + 2\ln^2 2$. B. $I = 2\ln^2 2$. C. $I = \ln^2 2$. D. $I = 2\ln 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \left(\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x} \right) dx = \int_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} dx + \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx = A + B.$$

$$\text{Xét } B = \int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^4 \ln x d(\ln x) = \frac{(\ln x)^2}{2} \Big|_1^4 = \frac{(\ln 4)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = 2\ln^2 2.$$

$$\text{Xét } A = \int_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\text{Đặt } t = 2\sqrt{x}-1 \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{x}} dx. \text{ Khi đó } A = \int_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} dx = \int_1^3 f(t) dt = \int_1^3 f(x) dx$$

$$\text{Vậy } \int_1^4 f(x) dx = \left(\int_1^3 f(x) dx \right) + 2\ln^2 2 \Rightarrow \int_1^4 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx = 2\ln^2 2 \Rightarrow I = 2\ln^2 2.$$

Câu 33. (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và là hàm số lẻ trên đoạn

$[-2; 2]$. Biết rằng $\int_{-1}^0 f(x) dx = -1, \int_{\frac{1}{2}}^1 f(-2x) dx = 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx$.

B. $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = -4$.

C. $\int_0^1 f(x) dx = -1$.

D. $\int_0^2 f(x) dx = -3$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = -x \Rightarrow \int_{-1}^0 f(x) dx = - \int_1^0 f(-t) dt = \int_0^1 -f(t) dt$ (vì $f(x)$ là hàm lẻ)

$\Rightarrow \int_0^1 f(t) dt = 1$.

Đặt $t = 2x \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 f(-2x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 -f(2x) dx = -\frac{1}{2} \int_1^2 f(t) dt$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \int_1^2 f(t) dt = 2 \Rightarrow \int_1^2 f(t) dt = -4$.

Vậy $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 1 - 4 = -3$.

Câu 34. (Chuyên Sơn La - 2020) Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(1) = 1$ và $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3}$.

Tính

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx$

A. $I = \frac{4}{3}$.

B. $I = \frac{2}{3}$.

C. $I = -\frac{2}{3}$

D. $I = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sin x, dt = \cos x dx$.

Đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx = \int_0^1 2t \cdot f'(t) dt$.

Đặt $\begin{cases} u = 2t \\ dv = f'(t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dt \\ v = f(t) \end{cases}$

$I = (2t \cdot f(t)) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 f(t) dt = 2 \cdot f(1) - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

Câu 35. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4, \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^3 f(x) dx.$$

A. $I = 6$.

B. $I = 4$.

C. $I = 10$.

D. $I = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^9 f(\sqrt{x}) d(\sqrt{x}) = 2 \int_1^3 f(t) dt.$

Mà $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4$ nên $2 \int_1^3 f(t) dt = 4 \Leftrightarrow \int_1^3 f(t) dt = 2$

Vì tích phân không phụ thuộc vào biến số nên $\int_1^3 f(t) dt = 2 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx = 2.$

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) d(\sin x) = \int_0^1 f(t) dt.$

Mà $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx = 2$ nên $\int_0^1 f(t) dt = 2.$

Vì tích phân không phụ thuộc vào biến số nên $\int_0^1 f(t) dt = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 2.$

Khi đó $I = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 2 + 2 = 4.$

Câu 36. (Sở Hưng Yên - 2020) Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = f(2020 - x)$ và

$$\int_3^{2017} f(x) dx = 4. \text{ Khi đó } \int_3^{2017} xf(x) dx \text{ bằng}$$

A. 16160.

B. 4040.

C. 2020.

D. 8080.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u = 2020 - x \Rightarrow x = 2020 - u$. Ta có $dx = -du$.

Với $x = 3$ thì $u = 2017$.

Với $x = 2017$ thì $u = 3$.

Khi đó $\int_3^{2017} xf(x) dx = \int_3^{2017} (2020 - u) f(2020 - u) du = \int_3^{2017} (2020 - x) f(x) dx$

Suy ra $2 \int_3^{2017} xf(x) dx = \int_3^{2017} 2020 f(x) dx = 8080$. Do đó $\int_3^{2017} xf(x) dx = 4040$.

Câu 37. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1) = 2$ và

$$\int_0^1 x^2 f'(x) dx = \int_1^4 \frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} f(2-\sqrt{x}) dx = 4. \text{ Giá trị của } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. 1. B. $\frac{5}{7}$. C. $\frac{3}{7}$. D. $\frac{1}{7}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$4 = \int_0^1 x^2 f'(x) dx = \left(x^2 f(x) \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 2xf(x) dx = 2 - 2 \int_0^1 xf(x) dx \Rightarrow \int_0^1 xf(x) dx = -1$$

$$\text{Đặt } t = 2 - \sqrt{x} \Rightarrow dt = -\frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

Khi đó

$$\int_1^4 \frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} f(2-\sqrt{x}) dx = 4 \Leftrightarrow -\int_1^0 (1+3(2-t)) f(t) dt = 4 \Leftrightarrow \int_0^1 7f(t) dt - 3 \int_0^1 tf(t) dt = 4$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f(t) dt = \frac{4+3 \int_0^1 tf(t) dt}{7} = \frac{4+3 \cdot (-1)}{7} = \frac{1}{7}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{7}.$$

Câu 38. (Sở Yên Bái - 2020) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$4xf(x^2) + 6f(2x) = \frac{3}{5}x^3 + 4. \text{ Giá trị } \int_0^4 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{52}{25}$. B. 52. C. $\frac{48}{25}$. D. 48.

Lời giải

Chọn A

$$4xf(x^2) + 6f(2x) = \frac{3}{5}x^3 + 4 \Rightarrow \int_0^2 [4xf(x^2) + 6f(2x)] dx = \int_0^2 \left[\frac{3}{5}x^3 + 4 \right] dx$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^2 f(x^2) d(x^2) + 3 \int_0^2 f(2x) d(2x) = \frac{52}{5} \Rightarrow 2 \int_0^4 f(t) dt + 3 \int_0^4 f(u) du = \frac{52}{5}$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^4 f(x) dx + 3 \int_0^4 f(x) dx = \frac{52}{5} \Rightarrow 5 \int_0^4 f(x) dx = \frac{52}{5} \Rightarrow \int_0^4 f(x) dx = \frac{52}{25}$$

Câu 39. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(2) = 16, \int_0^1 f(2x) dx = 2. \text{ Tích phân } \int_0^2 xf'(x) dx \text{ bằng}$$

- A. 30. B. 28. C. 36. D. 16.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \int_0^1 f(2x) dx = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) d(2x) = 2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = 4.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^2 xf'(x) dx = xf(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(x) dx = 2f(2) - 4 = 32 - 4 = 28.$$

Câu 40. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = 5$. Tính

$$I = \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx$$

A. $I = \frac{5}{2}\pi$.

B. $I = 10\pi$.

C. $I = 5$.

D. $I = 5\pi$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } I = \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x) dx,$$

$$\text{Tính } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x) dx$$

$$\text{Đặt } x = \pi - t$$

$$dx = -dt$$

$$xf(\sin x) dx = (\pi - t)f[\sin(\pi - t)](-dt) = (t - \pi)f(\sin t) dt$$

$$\text{Đổi cận } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \pi \Rightarrow t = 0$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (t - \pi)f(\sin t) dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} tf(\sin t) dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x) dx$$

$$\text{Do đó } I = \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = 5\pi$$

Vậy chọn **D**.

Câu 41. (THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 2 \text{ và } \int_e^{e^2} \frac{f(\ln x^2)}{x \ln x} dx = 2. \text{ Tính } \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx.$$

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Chọn D

- Đặt $t = \cos^2 x$ suy ra $dt = -2 \sin x \cdot \cos x dx$.

Suy ra

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot f(\cos^2 x) dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-2 \sin x \cos x}{\cos^2 x} \cdot f(\cos^2 x) dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt$$

$$\text{Đặt } t = \ln^2 x \text{ suy ra } dt = 2 \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$\text{Suy ra } I_2 = \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = \frac{1}{2} \int_e^{e^2} \frac{2 \ln x \cdot f(\ln^2 x)}{x \ln^2 x} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt.$$

- Đặt $t = 2x$ suy ra $dt = 2 dx$.

Ta có

$$I = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{2x} d(2x) = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(t)}{t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt + \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 2(I_1 + I_2) = 2(2 + 2) = 8.$$

Câu 42. (Hùng Vương Gia Lai 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$ thỏa mãn

$$f(x) + x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - x. \text{ Giá trị tích phân } I = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(x)}{x^2 + x} dx \text{ bằng:}$$

A. $\frac{8}{9}.$

B. $\frac{16}{9}.$

C. $\frac{2}{3}.$

D. $\frac{3}{4}.$

Lời giải

Chọn A

$$f(x) + x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - x \Rightarrow \frac{f(x)}{x^2 + x} + \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1} = x - 1 \Rightarrow \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(x)}{x^2 + x} dx + \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1} dx = \int_{\frac{1}{3}}^3 (x-1) dx = \frac{16}{9}.$$

$$\text{Xét } I' = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1} dx.$$

$$\text{Đặt } \frac{1}{x} = t \Rightarrow \frac{-1}{x^2} dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{-t^2}.$$

$$I' = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1} dx = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(t)}{\frac{1}{t} + 1} \cdot \frac{dt}{-t^2} = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(t)}{t^2 + t} dt = \int_{\frac{1}{3}}^3 \frac{f(x)}{x^2 + x} dx = I.$$

$$\text{Suy ra } 2I = \frac{16}{9} \Rightarrow I = \frac{8}{9}.$$

Câu 43. (THPT Hồ Nghinh – Quảng Nam – 2022) Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ sao cho $f(1) = 1$ và $f(x) \cdot f(1-x) = e^{x^2-x}, \forall x \in [0; 1]$. Tính $I = \int_0^1 \frac{(2x^3 - 3x^2) f'(x)}{f(x)} dx$.

A. $I = -\frac{1}{10}.$

B. $I = \frac{2}{5}.$

C. $I = -\frac{1}{60}$.

D. $I = \frac{1}{10}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) \cdot f(1-x) = e^{x^2-x} \Leftrightarrow \ln f(x) + \ln f(1-x) = x^2 - x$

$\Leftrightarrow (x^2 - x) \ln f(x) + (x^2 - x) \ln f(1-x) = (x^2 - x)^2$

$\Rightarrow \int_0^1 (x^2 - x) \ln f(x) dx + \int_0^1 (x^2 - x) \ln f(1-x) dx = \int_0^1 (x^2 - x)^2 dx$

$\Leftrightarrow \int_0^1 (x^2 - x) \ln f(x) dx + \int_0^1 x(x-1) \ln f(1-x) dx = \int_0^1 (x^2 - x)^2 dx$

Đặt $t = 1-x \Leftrightarrow x = 1-t \Rightarrow \begin{cases} dx = -dt \\ x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=0 \end{cases}$

$\Rightarrow I = \int_0^1 x(x-1) \ln f(1-x) dx = \int_1^0 (1-t)t \ln f(t) dt = \int_0^1 x(x-1) \ln f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - x) \ln f(x) dx$

$\Rightarrow 2 \int_0^1 (x^2 - x) \ln f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - x)^2 dx = \frac{1}{30} \Leftrightarrow \int_0^1 (x^2 - x) \ln f(x) dx = \frac{1}{60}$

$I = \int_0^1 \frac{(2x^3 - 3x^2) f'(x)}{f(x)} dx = \int_0^1 (2x^3 - 3x^2) d \ln f(x)$

$= (2x^3 - 3x^2) \ln f(x) \Big|_0^1 - 6 \int_0^1 (x^2 - x) \ln f(x) dx = -6 \int_0^1 (x^2 - x) \ln f(x) dx = \frac{-1}{10}$

Câu 44. (Chuyên Lam Sơn 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn

$2 \cos x \cdot f(1 + 4 \sin x) - \sin 2x \cdot f(3 - 2 \cos 2x) = \sin 4x + 4 \sin 2x - 4 \cos x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Khi đó $I = \int_1^5 f(x) dx$ bằng

A. 2.

B. 0.

C. 8.

D. 16.

Lời giải

Ta có: $2 \cos x \cdot f(1 + 4 \sin x) - \sin 2x \cdot f(3 - 2 \cos 2x) = \sin 4x + 4 \sin 2x - 4 \cos x \quad (*)$

Lấy tích phân từ 0 đến $\frac{\pi}{2}$ hai vế của $(*)$ ta được:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x \cdot f(1 + 4 \sin x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f(3 - 2 \cos 2x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 4x + 4 \sin 2x - 4 \cos x) dx$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(1 + 4 \sin x) d(1 + 4 \sin x) - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(3 - 2 \cos 2x) d(3 - 2 \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_1^5 f(t) dt - \frac{1}{4} \int_1^5 f(t) dt = 0$

$\Leftrightarrow \int_1^5 f(t) dt = 0 \Leftrightarrow \int_1^5 f(x) dx = 0$

Vậy $I = \int_1^5 f(x) dx = 0$.

Câu 45. (THPT Đô Lương – Nghệ An – 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1, 1]$ và thỏa mãn

$$f(x) + 2 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 (x+t)f(t)dt, \text{ với } \forall x \in [-1; 1] \text{ Tính tích phân } I = \int_{-1}^1 f(x)dx$$

- A. $I = 3$
 B. $I = 4$
C. $I = 2$
 D. $I = 1$

Lời giải

$$\int_{-1}^1 (x+t)f(t)dt = \int_{-1}^1 xf(t)dt + \int_{-1}^1 tf(t)dt = ax + b. \text{ Với } \begin{cases} a = \int_{-1}^1 f(t)dt \\ b = \int_{-1}^1 tf(t)dt \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f(x) + 2 = \frac{3}{2}(ax + b) \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}(ax + b) - 2.$$

$$I = \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{3}{2}(ax + b) - 2 \right] dx = \left[\frac{3}{2} \left(\frac{ax^2}{2} + bx \right) - 2x \right]_{-1}^1 = 3b - 4 \Rightarrow a - 3b = -4(1)$$

$$b = \int_{-1}^1 t \left[\frac{3}{2}(at + b) - 2 \right] dt = a \Rightarrow a = b(2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ } \begin{cases} a - 3b = -4 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}. \text{ Vậy } I = \int_{-1}^1 f(x)dx = 2$$

Câu 46. (THPT Hoàng Hoa Thám - Đà Nẵng 2022) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

$$xf^2(x)[2f(x) - 1] = -2f^2(x)[f(x) + 1] + x - 2, \forall x \neq -1.$$

$$\text{Biết } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 6 \ln 2 \left(\frac{1}{4^x + 1} - \frac{1}{(4^x + 1)^2} \right) f(4^x) dx = -a \ln b; \text{ (với } a, b \text{ nguyên dương). Giá trị } T = 2a + b$$

là

- A. $T = 5$. B. $T = 6$. C. $T = 4$. D. $T = 0$.

Lời giải

Chọn C

$$\diamond \text{ Xét } I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 6 \ln 2 \left(\frac{1}{4^x + 1} - \frac{1}{(4^x + 1)^2} \right) f(4^x) dx$$

$$\text{Đặt } t = 4^x \Rightarrow dt = 4^x \cdot \ln 4 \cdot dx = 2t \ln 2 \cdot dx \Rightarrow \ln 2 \cdot dx = \frac{dt}{2t}$$

$$\text{Với } x = -\frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \text{ và } x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 2.$$

$$\text{Khi đó, } I = 3 \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} \right) \frac{f(t)}{t} dt = 3 \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(t)}{(t+1)^2} dt = 3 \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx.$$

$$\diamond \text{ Ta có: } xf^2(x)[2f(x) - 1] = -2f^2(x)[f(x) + 1] + x - 2, \forall x \neq -1.$$

$$\Leftrightarrow 2xf^3(x) - xf^2(x) + 2f^3(x) + 2f^2(x) - x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(2f^3(x) - f^2(x) - 1) + 3f^2(x) + 3 = 0 (*)$$

Để thấy, $f(x) = 1, \forall x \neq -1$ không thỏa mãn (*). Do đó,

$$(*) \Leftrightarrow x+1 = -\frac{3f^2(x)+3}{2f^3(x)-f^2(x)-1}$$

$$\blacklozenge \text{ Đặt } u = f(x) \Rightarrow x+1 = -\frac{3u^2+3}{2u^3-u^2-1} \Rightarrow dx = \frac{6(u^4+3u^2)}{(2u^3-u^2-1)^2} du$$

$$\text{Với } x = \frac{1}{2} \Rightarrow u = -1 \text{ và } x = 2 \Rightarrow u = 0.$$

$$\blacklozenge \text{ Suy ra } I = 3 \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = 3 \int_{-1}^0 u \cdot \frac{(2u^3-u^2-1)^2}{9(u^2+1)^2} \cdot \frac{6(u^4+3u^2)}{(2u^3-u^2-1)^2} du = 2 \int_{-1}^0 \frac{u^5+3u^3}{(u^2+1)^2} du = -\ln 2.$$

$$\blacklozenge \text{ Do đó, } a=1, b=2. \text{ Vậy } T = 2a+b = 2.1+2 = 4.$$

Câu 47. (Sở Vĩnh Phúc 2022) Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) + f(2-x) = xe^{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^2 f(x) dx.$$

A. $I = e^4 - 1.$ B. $I = e^4 - 2.$ C. $I = \frac{2e-1}{2}.$ **D. $I = \frac{e^4-1}{4}.$**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } f(x) + f(2-x) = xe^{x^2}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f(2-x) dx = \int_0^2 xe^{x^2} dx.$$

$$\text{Đặt } t = 2-x \Rightarrow dt = -dx. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=2 \\ x=2 \Rightarrow t=0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(2-x) dx = -\int_2^0 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 f(x) dx$$

$$\Rightarrow 2I = 2 \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 xe^{x^2} dx \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \int_0^2 xe^{x^2} dx \Rightarrow I = \frac{1}{4} \int_0^2 e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{4} e^{x^2} \Big|_0^2 = \frac{e^4-1}{4}.$$

Câu 48. (THPT Nguyễn Viết Xuân – Vĩnh Phúc 2022) Cho $\int_{-2}^2 f(\sqrt{x^2+5}-x) dx = 1, \int_1^5 \frac{f(x)}{x^2} dx = 3.$ Giá

trị của $\int_1^5 f(x) dx$ bằng:

- A. 13.
B. -13.
 C. 16.
 D. -16.

Lời giải

Chọn B

$$\text{- Xét } I = \int_{-2}^2 f(\sqrt{x^2+5}-x) dx = 1$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2+5}-x$$

$$\Leftrightarrow t+x = \sqrt{x^2+5} \Rightarrow (t+x)^2 = x^2+5 \Leftrightarrow t^2+2xt+x^2 = x^2+5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5-t^2}{2t} \Rightarrow dx = -\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2t^2}\right) dt$$

$$\text{Khi } x = -2 \Rightarrow t = 5, x = 2 \Rightarrow t = 1$$

$$\text{Ta có } I = \int_1^5 f(t) \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2t^2}\right) dt = \int_1^5 f(x) \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2x^2}\right) dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_1^5 f(x) dx + \frac{5}{2} \int_1^5 \frac{f(x)}{x^2} dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_1^5 f(x) dx = 1 - \frac{5}{2} \cdot 3 = -\frac{13}{2}$$

$$\Rightarrow \int_1^5 f(x) dx = -13$$

Câu 49. (THPT Lương Bắc Bằng - Thanh Hóa 2022) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$f(2) = 16, \int_0^2 f(x) dx = 4. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 x \cdot f'(2x) dx$$

A. $I = 13$.

B. $I = 7$.

C. $I = 12$.

D. $I = 20$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét } I = \int_0^1 x \cdot f'(2x) dx :$$

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2 \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

$$\text{Với } x = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ và } x = 1 \Rightarrow t = 2.$$

$$\text{Khi đó, } I = \int_0^2 \frac{t}{2} \cdot f'(t) \frac{dt}{2} = \frac{1}{4} \int_0^2 x \cdot f'(x) dx = \frac{1}{4} \left[x \cdot f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(x) dx \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[2 \cdot f(2) - \int_0^2 f(x) dx \right] = \frac{1}{4} \cdot [2 \cdot 16 - 4] = 7.$$

Câu 50. (THPT Nguyễn Cảnh Quân - Nghệ An 2022) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Biết } f(6) = 1 \text{ và } \int_0^1 xf'(6x) dx = 1, \text{ khi đó } \int_0^6 x^2 f'(x) dx \text{ bằng}$$

A. -36 .

B. 34 .

C. 24 .

D. 36 .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_0^6 x^2 f'(x) dx = x^2 f(x) \Big|_0^6 - \int_0^6 2xf(x) dx = 36f(6) - \int_0^6 2xf(x) dx = 36 - \int_0^6 2xf(x) dx.$$

$$\text{Xét } I = \int_0^6 2xf(x) dx. \text{ Đặt } x = 6t \Rightarrow dx = 6dt.$$

$$\text{Đổi cận: Khi } x = 0 \Rightarrow t = 0. \text{ Khi } x = 6 \Rightarrow t = 1.$$

$$\text{Suy ra } I = \int_0^1 72t \cdot f(6t) dt = 72 \int_0^1 t \cdot f(6t) dt = 72.$$

$$\text{Vậy } \int_0^6 x^2 f'(x) dx = 36 - 72 = -36.$$

Câu 51. (Sở Thái Bình 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và

$$f(2x) - xf(x^2) = 5x - 2x^3 - 1 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \text{ Tính } I = \int_1^2 xf'(x) dx.$$

A. $I = 5$.

B. $I = -1$.

C. $I = 2$.

D. $I = 3$.

Lời giải**Chọn D**

$$+ \text{Ta có } I = \int_1^2 xf'(x)dx = \left[xf(x) \right]_1^2 - \int_1^2 f(x)dx = 2f(2) - f(1) - \int_1^2 f(x)dx.$$

$$+ \text{Do } f(2x) - xf(x^2) = 5x - 2x^3 - 1 \Rightarrow f(2) - f(1) = 2 \Rightarrow f(2) = 3.$$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 xf'(x)dx = 5 - \int_1^2 f(x)dx$$

$$f(2x) - xf(x^2) = 5x - 2x^3 - 1 \Rightarrow \int_0^1 f(2x)dx - \int_0^1 xf(x^2)dx = \int_0^1 (5x - 2x^3 - 1)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(2x)dx - \int_0^1 xf(x^2)dx = 1 \quad (1)$$

$$+ \text{Đặt } t = 2x \Rightarrow \int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)dx$$

$$+ \text{Đặt } u = x^2 \Rightarrow \int_0^1 xf(x^2)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(u)du = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(2x)dx - \int_0^1 xf(x^2)dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)dx - \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{2} \int_1^2 f(x)dx - \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(2x)dx - \int_0^1 xf(x^2)dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x)dx \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx = 2 \Rightarrow I = 3.$$

Câu 52. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội 2022) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa điều kiện

$$f(x) + f(-x) = 2\sin^2 x. \text{ Tính } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx.$$

A. $\frac{\pi}{2}.$

B. $\frac{\pi}{4}.$

C. 0.

D. $\pi.$

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Đặt } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx.$$

$$\text{Đặt } x = -t \Rightarrow dx = -dt.$$

$$\text{Đổi cận } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Suy ra } I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(-t)(-dt) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx.$$

Ta có:

$$2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x) + f(-x))dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 x dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x)dx = \left(x - \frac{1}{2}\sin 2x \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}.$$

Câu 53. (Cụm trường Bắc Ninh 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng các tiếp tuyến với đồ thị $y = f(x)$ tại các điểm có hoành độ $x = -1, x = 0, x = 1$ lần lượt tạo với chiều dương của trục Ox các góc $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$. Giá trị tích phân

$$I = 2 \int_{-1}^0 f'(x) f''(x) dx + 4 \int_0^1 [f'(x)]^3 f''(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $I = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1$. B. $I = \frac{1}{3}$. C. $I = 0$. **D. $I = \frac{26}{3}$.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Theo bài ra: } f'(-1) = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, f'(0) = \tan 45^\circ = 1, f'(1) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

$$\text{Ta có: } 2 \int_{-1}^0 f'(x) f''(x) dx = 2 \int_{-1}^0 f'(x) d(f'(x)) = (f'(x))^2 \Big|_{-1}^0 = (f'(0))^2 - (f'(-1))^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$4 \int_0^1 [f'(x)]^3 f''(x) dx = 4 \int_0^1 [f'(x)]^3 d(f'(x)) = (f'(x))^4 \Big|_0^1 = (f'(1))^4 - (f'(0))^4 = 9 - 1 = 8.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{2}{3} + 8 = \frac{26}{3}.$$

Câu 54. (Cụm trường Bắc Ninh 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\ln 2} f(e^{2x}) dx = 8$. Giá trị

$$\text{tích phân } I = \int_1^4 \frac{f(x)}{x} dx \text{ là}$$

- A. $I = 8$. B. $I = 4$. C. $I = 32$. **D. $I = 16$.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = e^{2x} \Rightarrow dt = 2e^{2x} dx = 2t dx$$

Đổi cận:

$$x = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$x = \ln 2 \Rightarrow t = 4$$

$$\text{Ta có: } 8 = \int_0^{\ln 2} f(e^{2x}) dx = \int_1^4 f(t) \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{f(x)}{x} dx.$$

$$\text{Suy ra } I = \int_1^4 \frac{f(x)}{x} dx = 16.$$

Câu 55. (Sở Hà Nội 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và

$$e^x f'(e^x) = 1 + e^x. \text{ Khi đó } \int_1^e f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{e^2 - 1}{2}$
 B. $\frac{3e^2 - 2}{2}$.
C. $\frac{e^2 + 1}{2}$
 D. $\frac{e^2}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } e^x f'(e^x) = 1 + e^x \Rightarrow \int e^x f'(e^x) dx = \int (1 + e^x) dx.$$

$$\text{Đặt } t = e^x \Rightarrow \int f'(t) dt = x + e^x + C \Rightarrow f(t) = x + e^x + C \Rightarrow f(e^x) = x + e^x + C$$

$$\text{Vì } f(1) = 1 \Rightarrow f(e^0) = e^0 + C = 1 \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Đặt } u = e^x \Rightarrow x = \ln u \Rightarrow f(u) = \ln u + u \text{ hay } f(x) = \ln x + x.$$

$$\Rightarrow \int_1^e f(x) dx = \int_1^e (\ln x + x) dx = \int_1^e \ln x dx + \int_1^e x dx = x \cdot \ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e + \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^e = \frac{e^2 + 1}{2}.$$

Câu 56. (Sở Đắk Nông 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của

$$f(x) \text{ trên } \mathbb{R} \text{ thỏa mãn } F(8) + G(8) = 8 \text{ và } F(0) + G(0) = -2. \text{ Khi đó } \int_{-2}^0 f(-4x) dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{5}{4}$.
 B. 5.
 C. -5.
 D. $-\frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } I = \int_{-2}^0 f(-4x) dx. \quad \text{Đặt } -4x = t \Rightarrow dx = -\frac{1}{4} dt.$$

Đổi cận:

x	-2	0
t	8	0

$$\text{Khi đó: } I = -\frac{1}{4} \int_8^0 f(t) dt = \frac{1}{4} \int_0^8 f(t) dt = \frac{1}{4} \int_0^8 f(x) dx.$$

Do $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên có:

$$I = \frac{1}{4} G(x) \Big|_0^8 = \frac{1}{4} [G(8) - G(0)] \Rightarrow G(8) - G(0) = 4I. \text{ Tương tự cũng có: } F(8) - F(0) = 4I$$

$$\text{Suy ra: } 8I = F(8) + G(8) - F(0) - G(0) = 8 - (-2) = 10 \Rightarrow I = \frac{5}{4}.$$

Câu 57. (Chuyên Thái Bình 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ và thỏa mãn

$$f(x^2 + 3x + 1) = x + 2, \forall x \geq 0. \text{ Tính } \int_1^5 f(x) dx.$$

- A. $\frac{37}{6}$
- B. $\frac{527}{3}$
- C. $\frac{61}{6}$
- D. $\frac{464}{3}$

Lời giải

Đổi biến $x = t^2 + 3t + 1 \Rightarrow dx = (2t + 3)dt; f(x) = f(t^2 + 3t + 1) = t + 2; t \geq 0$

$$x = 1 \Rightarrow t = 0; x = 5 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \int_1^5 f(x) dx = \int_0^1 (t + 2)(2t + 3) dt = \frac{61}{6}.$$

Chọn đáp án

C.

Câu 58. (Sở Phú Thọ 2023) Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và

$$f(4x) - x^3 f(x^4) = 3x^2 + 2x + 1 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \text{ Khi đó } I = \int_1^4 x f'(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $I = 15$
- B. $I = -1$
- C. $I = 14$
- D. $I = 6$

Lời giải

$$\text{Từng phần } I = \int_1^4 x f'(x) dx = \int_1^4 x d(f(x)) = x f(x) \Big|_1^4 - \int_1^4 f(x) dx = 4f(4) - f(1) - \int_1^4 f(x) dx$$

$$\text{Thay } x = 1 \Rightarrow f(4) - f(1) = 6 \Rightarrow f(4) = f(1) + 6 = 7 \Rightarrow I = 27 - \int_1^4 f(x) dx$$

$$\text{Từ } f(4x) - x^3 f(x^4) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \int_0^1 f(4x) dx - \int_0^1 x^3 f(x^4) dx = \int_0^1 (3x^2 + 2x + 1) dx = 3$$

$$\text{Đổi biến } u = 4x; v = x^4 \Rightarrow \int_0^4 f(u) \cdot \frac{1}{4} du - \int_0^1 f(v) \cdot \frac{1}{4} dv = 3 \Leftrightarrow \int_1^4 f(x) dx = 12 \Rightarrow I = 27 - 12 = 15.$$

Câu 59. (THPT huyện Mỹ Lộc – Vụ Bản – Nam Định 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 8]$

$$\text{thỏa mãn } \int_1^2 [f(x^3)]^2 dx + 2 \int_1^2 f(x^3) dx - \frac{4}{3} \int_1^8 f(x) dx = -\frac{247}{15}. \text{ Khi đó } \int_0^1 x f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{257 \ln 2}{2}$
- B. $\frac{257 \ln 2}{4}$
- C. 160.
- D. $\frac{639}{4}$

Lời giải

Chọn D

Thực hiện đổi biến $x = t^3 \Rightarrow dx = 3t^2 dt$ và $\int_1^8 f(x) dx = \int_1^2 f(t^3) \cdot 3t^2 dt$

Vậy đẳng thức đã cho trở thành: $\int_1^2 \left(\left[f(x^3) \right]^2 + 2f(x^3) - 4x^2 f(x^3) \right) dx = -\frac{247}{15}$.

Đặt $t = f(x^3)$ cho gọn ta được $\int_1^2 \left(t^2 + (2 - 4x^2)t \right) dx = -\frac{247}{15}$

$\Leftrightarrow \int_1^2 \left(t + (1 - 2x^2) \right)^2 dx - \int_1^2 \left(1 - 2x^2 \right)^2 dx = -\frac{247}{15} \Leftrightarrow \int_1^2 \left(t + (1 - 2x^2) \right)^2 dx = 0$

Do đó $t = f(x^3) = 2x^2 - 1, \forall x \in [1; 2] \Rightarrow f(x) = 2\sqrt[3]{x^2} - 1, \forall x \in [1; 8]$

$\Rightarrow \int_1^8 x f(x) dx = \int_1^8 x \left(2\sqrt[3]{x^2} - 1 \right) dx = \frac{639}{4}$

Câu 60. (Sở Bắc Ninh 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết

$\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = 7, \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) \sin x dx = 3$. Giá trị của $\int_1^3 [f(x) + 2x] dx$ bằng

- A. 10.
- B. 15.
- C. -10.
- D. 12.**

Lời giải

Ta có $I = \int_1^3 [f(x) + 2x] dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_1^3 2x dx = \int_1^3 f(x) dx + 8$

Đổi biến $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx \Rightarrow 7 = \int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^1 f(t) dt$

Và $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Rightarrow 3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) \sin x dx = \int_1^0 f(t) \cdot (-dt) = \int_0^1 f(t) dt$

Vậy $\int_1^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = 7 - 3 = 4 \Rightarrow I = 4 + 8 = 12$.

Chọn đáp án **D.**

Câu 61. (Sở Hà Nam 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(x) = 4x^3 + k$ với

$k = \int_0^1 x^2 f(x^2) dx$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$

- A. $\frac{3}{2}$
- B. $\frac{5}{3}$.**
- C. 2.
- D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = 4x^3 + k \Rightarrow f(x^2) = 4(x^2)^3 + k = 4x^6 + k$

$$\text{Khi đó } k = \int_0^1 x^2 f(x^2) dx = \int_0^1 x^2 (4x^6 + k) dx = \int_0^1 (4x^8 + kx^2) dx = \left(\frac{4x^9}{9} + \frac{kx^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{9} + \frac{k}{3}$$

$$\text{Suy ra } k = \frac{2}{3} \Rightarrow f(x) = 4x^3 + \frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(4x^3 + \frac{2}{3} \right) dx = \left(x^4 + \frac{2}{3}x \right) \Big|_0^1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Câu 62. (Sở Nam Định 2023) Biết rằng tồn tại duy nhất bộ số $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản sao

cho $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x + 2}{\sqrt{1 + e^x}} dx = a + 2 \ln \frac{b}{c}$. Giá trị của biểu thức $a + b + c$ thuộc khoảng

- A. (6;10).
- B. (16;20).
- C. (11;15).
- D. (1;5).

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } I = \int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x + 2}{\sqrt{1 + e^x}} dx = \int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x + 2}{e^x \sqrt{1 + e^x}} d(e^x).$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{e^x + 1}. \text{ Suy ra } e^x = t^2 - 1; d(e^x) = 2t dt; x = \ln 3 \Rightarrow t = 2, x = \ln 8 \Rightarrow t = 3.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 \frac{t^2 + 1}{(t^2 - 1)t} 2t dt = 2 \int_2^3 \left(1 + \frac{2}{t^2 - 1} \right) dt = 2 \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= 2 \left(t + \ln \left(\frac{t-1}{t+1} \right) \right) \Big|_2^3 = 2 + 2 \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } a = 2, b = 3, c = 2 \Rightarrow a + b + c = 7.$$

Câu 63. (Chuyên Thái Bình 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(9) + G(9) = 5$ và $F(0) + G(0) = 2$. Khi đó $\int_0^3 f(3x) dx$ bằng

- A. 3.
- B. $\frac{1}{2}$.
- C. 7.
- D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $G(x) = F(x) + C$

$$\text{Từ giả thiết ta có: } \begin{cases} F(9) + G(9) = 5 \\ F(0) + G(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2F(9) + C = 5 \\ 2F(0) + C = 2 \end{cases} \Rightarrow F(9) - F(0) = \frac{3}{2}$$

$$\int_0^3 f(3x) dx = \frac{1}{3} \int_0^9 f(x) dx = \frac{1}{3} (F(9) - F(0)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Câu 64. (Sở Nghệ An 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_1^e \frac{1+f(\ln x)}{x} dx = 2$ và

$f(1) = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 x f'(x) dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. $\frac{2e}{3}$.

D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Có } 2 = \int_1^e \frac{1+f(\ln x)}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx + \int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = \ln \|x\|_1^e + K = 1 + K \Rightarrow K = 1.$$

$$\text{Xét } K = \int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx. \quad \text{Đặt } \ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt, \quad \text{đổi cận: } \begin{cases} x = e \rightarrow t = 1 \\ x = 1 \rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow K = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = 1.$$

$$\text{Xét } I = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx. \quad \text{Đặt } \begin{cases} x = u \\ f'(x) dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = du \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = x : f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}.$$

Câu 65. (Sở Hải Dương 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x); G(x)$ là hai nguyên

hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2) + 2023 \cdot G(0) = 5$ và $F(0) + 2023G(2) = 2$. Khi đó $\int_3^5 f(5-x) dx$

bằng

A. 2023.

B. $-\frac{3}{2022}$.

C. 3.

D. $\frac{3}{2022}$.

Lời giải

Chọn B

Vì $F(x); G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên ta có:

$$\int_0^2 f(x) dx = F(x) \Big|_0^2 = F(2) - F(0) \text{ và } \int_0^2 f(x) dx = G(x) \Big|_0^2 = G(2) - G(0)$$

$$\Rightarrow F(2) - F(0) = G(2) - G(0)$$

$$\text{Theo giả thiết ta có: } \begin{cases} F(2) + 2023 \cdot G(0) = 5 \\ F(0) + 2023G(2) = 2 \end{cases}$$

$$\text{Lấy vế trừ vế ta được: } F(2) - F(0) = -\frac{3}{2022}$$

Xét $I = \int_3^5 f(5-x)dx$. Đặt $t = 5-x \Rightarrow dt = -dx$

$$\Rightarrow I = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 f(x)dx = F(2) - F(0) = -\frac{3}{2022}$$

Câu 66. (Sở Kon Tum 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)-x$ $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)+x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(4)+G(4)=5$ và

$F(1)+G(1)=-1$. Giá trị của $\int_0^1 f(3x+1)dx$ là:

A. $\frac{1}{3}$.

B. 6.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_1^4 (f(x)-x)dx = F(4) - F(1)$.

$$\int_1^4 (f(x)+x)dx = G(4) - G(1)$$

$$\int_1^4 (f(x)-x + f(x)+x)dx = \int_1^4 (f(x)-x)dx + \int_1^4 (f(x)+x)dx = F(x)\Big|_1^4 + G(x)\Big|_1^4$$

$$= F(4) - F(1) + G(4) - G(1) = F(4) + G(4) - F(1) - G(1) = 5 + 1 = 6$$

$$\Rightarrow \int_1^4 2f(x)dx = 6 \Rightarrow \int_1^4 f(x)dx = 3$$

Mà $I = \int_0^1 f(3x+1)dx$

Đặt $t = 3x+1 \Rightarrow dt = 3dx$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1, x=1 \Rightarrow t=4$. $I = \frac{1}{3} \int_1^4 f(t)dt = \frac{1}{3} \int_1^4 f(x)dx = 1$

Câu 67. (Sở Cà Mau 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x) = 6f(3x-1)$. Gọi $F(x)$

là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(2) - F(3) = -24$. Khi đó $\int_5^8 f(x)dx$ bằng

A. -12.

B. -24.

C. 24.

D. 12.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x)dx = 6 \int_{\frac{1}{2}}^2 f(3x-1)dx$.

Đặt $t = 3x-1 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^2 f(3x-1)dx = \int_{\frac{1}{2}}^5 f(t) \frac{dt}{3} = \int_{\frac{1}{2}}^5 f(x) \frac{dx}{3}$.

Do đó $F(x)\Big|_{\frac{1}{2}}^2 = 2F(x)\Big|_{\frac{1}{2}}^5 \Leftrightarrow F(2) + F\left(\frac{1}{2}\right) = 2F(5)$. (1)

Tương tự $\int_{\frac{1}{2}}^3 f(x)dx = 6\int_{\frac{1}{2}}^3 f(3x-1)dx$, $F(x)\Big|_{\frac{1}{2}}^3 = 2F(x)\Big|_{\frac{1}{2}}^8 \Leftrightarrow F(3) + F\left(\frac{1}{2}\right) = 2F(8)$. (2)

Trừ từng vế (1) và (2) được $F(2) - F(3) = 2[F(5) - F(8)] \Leftrightarrow F(8) - F(5) = 12$.

Suy ra $\int_5^8 f(x)dx = 12$.

Câu 68. (Sở Bà Rịa - Vũng Tàu 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$f(4) = 2023, \int_0^4 f(x)dx = 2024$. Biểu thức $\int_0^2 x \cdot f'(2x)dx$ bằng

A. 2024.

B. 1517.

C. 2023.

D. 1012.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I = \int_0^2 x \cdot f'(2x)dx$

Đặt $t = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}t \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$ và $x = 2 \Rightarrow t = 4$.

Khi đó $I = \int_0^4 \frac{1}{2}t \cdot f'(t) \cdot \frac{1}{2}dt = \int_0^4 \frac{1}{4}t \cdot f'(t)dt$.

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{4}t \\ dv = f'(t)dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{4}dt \\ v = f(t) \end{cases}$

Vậy $I = \frac{1}{4}tf(t)\Big|_0^4 - \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)dt = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot f(4) - \frac{1}{4} \cdot 2024 = 2023 - 506 = 1517$.

Câu 69. (THPT Kim Liên - Hà Nội 2023) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai

nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(6) + G(6) = 8; F(0) + G(0) = -2$. Khi đó $\int_0^2 f(3x)dx$ bằng.

A. 1.

B. $\frac{5}{4}$.

C. 5.

D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_0^2 f(3x)dx = \frac{1}{3}\int_0^6 f(x)dx$.

$F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x) \Rightarrow F(x) = G(x) + C$.

$\Rightarrow F(6) = G(6) + C; F(0) = G(0) + C$.

Mà $F(6) + G(6) = 8; F(0) + G(0) = -2$ (1) $\Rightarrow G(6) = F(6) - C; G(0) = F(0) - C$

Thay vào (1) ta được: $\begin{cases} F(6) + F(6) - C = 8 \\ F(0) + F(0) - C = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2F(6) - C = 8 \\ 2F(0) - C = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow 2F(6) - 2F(0) = 10 \Leftrightarrow F(6) - F(0) = 5$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_0^6 f(x)dx = \frac{1}{3}[F(6) - F(0)] = \frac{5}{3}$.

Dạng 1.2 Giải bằng phương pháp từng phần

Thông thường nếu bài toán xuất hiện $\int_a^b g(x)f'(x)dx$ ta sẽ đặt $\begin{cases} u = g(x) \\ dv = f'(x)dx \end{cases}$

Câu 1. (Đề tham khảo 2017) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$.

Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I = -12$

B. $I = 8$

C. $I = 1$

D. $I = -8$

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$. Khi đó $I = (x+1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx$

Suy ra $10 = 2f(1) - f(0) - \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = -10 + 2 = -8$

Vậy $\int_0^1 f(x)dx = -8$.

Câu 2. (Mã 104 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(3) = 1$ và

$\int_0^1 xf(3x)dx = 1$, khi đó $\int_0^3 x^2 f'(x)dx$ bằng

A. $\frac{25}{3}$.

B. 3.

C. 7.

D. -9.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 3x \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dt$.

Suy ra $1 = \int_0^1 xf(3x)dx = \frac{1}{9} \int_0^3 tf(t)dt \Leftrightarrow \int_0^3 tf(t)dt = 9$.

Đặt $\begin{cases} u = f(t) \\ dv = tdt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(t)dt \\ v = \frac{t^2}{2} \end{cases}$.

$\Rightarrow \int_0^3 tf(t)dt = \frac{t^2}{2}f(t)\Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{t^2}{2}f'(t)dt = \frac{9}{2}f(3) - \frac{1}{2} \int_0^3 t^2 f'(t)dt$.

$\Leftrightarrow 9 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \int_0^3 t^2 f'(t)dt \Leftrightarrow \int_0^3 t^2 f'(t)dt = -9$.

Vậy $\int_0^3 x^2 f'(x)dx = -9$.

Câu 3. (Mã 101 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4) = 1$ và

$$\int_0^1 xf(4x)dx = 1, \text{ khi đó } \int_0^4 x^2 f'(x)dx \text{ bằng}$$

- A. 8. B. 14. C. $\frac{31}{2}$. D. -16.

Lời giải

Chọn D

Xét $\int_0^1 xf(4x)dx = 1$. Đặt:

$$t = 4x \Rightarrow \int_0^4 \frac{1}{4}t.f(t) \cdot \frac{1}{4}dt = 1 \Rightarrow \int_0^4 t.f(t)dt = 16 \Rightarrow \int_0^4 x.f(x)dx = 16.$$

$$\text{Xét } I = \int_0^4 x^2 f'(x)dx = \int_0^4 x^2 df(x)$$

$$\text{Suy ra: } I = x^2.f(x)\Big|_0^4 - \int_0^4 2x.f(x)dx = 4^2 f(4) - 2.16 = -16.$$

Câu 4. (Mã 103 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(6) = 1$ và $\int_0^1 xf(6x)dx = 1$,

khi đó $\int_0^6 x^2 f'(x)dx$ bằng

- A. $\frac{107}{3}$. B. 34. C. 24. D. -36.

Lời giải

Chọn D

Theo bài ra: $\int_0^1 xf(6x)dx = 1$.

Đặt $t = 6x \Rightarrow dt = 6dx$.

Đổi cận:

x	0	1
t	0	6

$$\text{Do đó: } \int_0^1 xf(6x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^6 \frac{1}{6}t.f(t) \frac{dt}{6} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{36} \int_0^6 t.f(t)dt = 1 \Leftrightarrow \int_0^6 t.f(t)dt = 36.$$

$$\text{Tính } I = \int_0^6 x^2 f'(x)dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = x^2 f(x)\Big|_0^6 - \int_0^6 2xf(x)dx = 36f(6) - 2 \int_0^6 xf(x)dx = 36.1 - 2.36 = -36.$$

Câu 5. (Mã 102 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5) = 1$ và

$$\int_0^1 xf(5x)dx = 1, \text{ khi đó } \int_0^5 x^2 f'(x)dx \text{ bằng}$$

A. 15

B. 23

C. $\frac{123}{5}$

D. -25

Lời giải**Chọn D**

$$+) I = \int_0^5 x^2 f'(x) dx = \int_0^5 x^2 df(x) = x^2 \cdot f(x) \Big|_0^5 - \int_0^5 f(x) dx^2$$

$$= 25 \cdot f(5) - 0 \cdot f(x) - \int_0^5 f(x) \cdot 2x dx$$

$$= 25 - 2 \int_0^5 xf(x) dx$$

$$+) \text{ Ta có: } \int_0^1 xf(5x) dx = 1$$

$$\text{Đặt } 5x = t \Rightarrow \int_0^5 \frac{t}{5} f(t) d\frac{t}{5} = 1 \Leftrightarrow \int_0^5 tf(t) dt = 25$$

$$\text{Vậy } I = 25 - 2 \times 25 = -25.$$

Câu 6. (Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020) Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và

$$f(1) = -\frac{1}{18}, \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = \frac{1}{36}. \text{ Giá trị của } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $-\frac{1}{12}.$

B. $\frac{1}{36}.$

C. $\frac{1}{12}.$

D. $-\frac{1}{36}.$

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}, \text{ khi đó ta có}$$

$$\int_0^1 x \cdot f'(x) dx = x \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) - \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{36} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = f(1) - \frac{1}{36} = -\frac{1}{12}.$$

Câu 7. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có $f(1) = e^2$ và $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2} e^{2x}$ với mọi x khác 0.

Khi đó $\int_1^{\ln 3} xf(x) dx$ bằng

A. $6 - e^2.$

B. $\frac{6 - e^2}{2}.$

C. $9 - e^2.$

D. $\frac{9 - e^2}{2}.$

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Xét tích phân } \int f'(x) dx = \int \frac{2x-1}{x^2} e^{2x} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = (2x-1)e^{2x} \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 4xe^{2x} dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}, \text{ khi đó}$$

$$\int f'(x) dx = \int \frac{2x-1}{x^2} e^{2x} dx = -\frac{1}{x}(2x-1)e^{2x} + 4 \int e^{2x} dx = -\frac{1}{x}(2x-1)e^{2x} + 2e^{2x} + C.$$

Do $f(1) = e^2 \Rightarrow C = 0$. Vậy $f(x) = -\frac{1}{x}(2x-1)e^{2x} + 2e^{2x}$.

Khi đó, ta có $\int_1^{\ln 3} xf'(x) dx = \int_1^{\ln 3} [(1-2x)e^{2x} + 2xe^{2x}] dx = \int_1^{\ln 3} e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} \Big|_1^{\ln 3} = \frac{1}{2}(9 - e^2)$.

Câu 8. (HSG Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$f(2) = 16, \int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính $I = \int_0^1 xf'(2x) dx$.

A. $I = 20$

B. $I = 7$

C. $I = 12$

D. $I = 13$

Lời giải

Ta có: $I = \int_0^1 xf'(2x) dx = \frac{1}{2} xf(2x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} f(2x) dx = \frac{1}{2} f(2) - \frac{1}{4} \int_0^1 f(2x) d(2x)$

$I = \frac{1}{2} f(2) - \frac{1}{4} \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 16 - \frac{1}{4} \cdot 4 = 7$.

Câu 9. (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa

mãn $\int_0^1 x^2 f(x) dx = -\frac{1}{21}$, $f(1) = 0$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{7}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{5}{12}$.

B. $-\frac{1}{5}$.

C. $\frac{4}{5}$.

D. $-\frac{7}{10}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$.

$\bullet -\frac{1}{21} = \int_0^1 x^2 f(x) dx = \int_0^1 u dv = uv \Big|_0^1 - \int_0^1 v du = \frac{x^3}{3} f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx$

$\Rightarrow \int_0^1 x^3 f'(x) dx = \frac{1}{7}$.

$\bullet \int_0^1 (x^3 - f'(x))^2 dx = \int_0^1 x^6 dx - 2 \int_0^1 x^3 f'(x) dx + \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{7} - 2 \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = 0$

$\Rightarrow (f'(x) - x^3)^2 = 0, \forall x \in [0;1] \Rightarrow f'(x) = x^3, \forall x \in [0;1]$.

Kết hợp điều kiện $f(1) = 0$ ta có $f(x) = \frac{1}{4}(x^4 - 1); \forall x \in [0;1]$

Vậy $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{4}(x^4 - 1) dx = \frac{1}{4} \int_0^1 (x^4 - 1) dx = -\frac{1}{5}$.

Câu 10. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị -2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$\int_0^1 f(x) dx = 1, f(1) = \cot 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 [f(x) \tan^2 x + f'(x) \tan x] dx$.

A. -1 .

B. $1 - \ln(\cos 1)$.

C. 0 .

D. $1 - \cot 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_0^1 [f(x) \tan^2 x + f'(x) \tan x] dx = \int_0^1 f(x) \tan^2 x dx + \int_0^1 f'(x) \tan x dx.$$

Lại có:

$$\int_0^1 f(x) \tan^2 x dx = \int_0^1 f(x) \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{\cos^2 x} dx - \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{\cos^2 x} dx - 1.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f'(x) \tan x dx &= \int_0^1 \tan x d(f(x)) = f(x) \cdot \tan x \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) d(\tan x) \\ &= f(1) \cdot \tan 1 - \int_0^1 \frac{f(x)}{\cos^2 x} dx = \cot 1 \cdot \tan 1 - \int_0^1 \frac{f(x)}{\cos^2 x} dx = 1 - \int_0^1 \frac{f(x)}{\cos^2 x} dx. \end{aligned}$$

Vậy $I = 0$.

Câu 11. (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$

thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$ Tính $\int_0^1 x^3 f'(x) dx$.

A. -1

B. 1

C. 3

D. -3

Lời giải

Chọn A

$$\begin{cases} u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx \\ dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$I = \frac{x^3}{3} f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx = \frac{1^3}{3} f(1) - 0 \cdot f(0) - \int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx$$

$$\frac{1}{3} = \frac{-1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1$$

Câu 12. Biết m là số thực thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x + 2m) dx = 2\pi^2 + \frac{\pi}{2} - 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m \leq 0$.

B. $0 < m \leq 3$.

C. $3 < m \leq 6$.

D. $m > 6$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x + 2m) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx + \frac{m\pi^2}{4}.$$

$$\text{Gọi } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}.$$

$$I = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$\text{Khi đó: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x + 2m) dx = \frac{m\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} - 1.$$

Suy ra $\frac{m}{4} = 2 \Leftrightarrow m = 8$.

Câu 13. (Đề Tham Khảo 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn

$$f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7 \text{ và } \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}. \text{ Tính tích phân } \int_0^1 f(x) dx$$

A. 4

B. $\frac{7}{5}$

C. 1

D. $\frac{7}{4}$

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Đặt $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$, $dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$.

Ta có $\frac{1}{3} = \frac{x^3}{3} f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1$

Ta có $\int_0^1 49x^6 dx = 7$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$, $\int_0^1 2.7x^3 \cdot f'(x) dx = -14 \Rightarrow \int_0^1 [7x^3 + f'(x)]^2 dx = 0$

$\Rightarrow 7x^3 + f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{7x^4}{4} + C$, mà $f(1) = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4}$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4} \right) dx = \frac{7}{5}$.

Cách 2: Nhắc lại bất đẳng thức Holder tích phân như sau:

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$$

Dấu bằng xảy ra khi $f(x) = k \cdot g(x)$, ($\forall x \in [a; b], k \in \mathbb{R}$)

Ta có $\frac{1}{9} = \left(\int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 \frac{x^6}{9} dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{9}$. Dấu bằng xảy ra khi $f'(x) = k \cdot \frac{x^3}{3}$.

Mặt khác $\int_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x) dx = \frac{-1}{3} \Rightarrow k = 21 \Rightarrow f'(x) = -7x^3$ suy ra $f(x) = -\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}$.

Từ đó $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4} \right) dx = \frac{7}{5}$.

Câu 14. (THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn

$[0;1]$ và $f(0) + f(1) = 0$. Biết $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x) \cos(\pi x) dx = \frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

A. π .

B. $\frac{3\pi}{2}$.

C. $\frac{2}{\pi}$.

D. $\frac{1}{\pi}$.

Lời giải

Xét tích phân $I = \int_0^1 f'(x) \cos(\pi x) dx = \frac{\pi}{2}$

Đặt $\begin{cases} u = \cos(\pi x) \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\pi \sin(\pi x) dx \\ v = f(x) \end{cases}$, ta có

$$I = f(x) \cos(\pi x) \Big|_0^1 + \pi \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx = -f(1) - f(0) + \pi \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx = \pi \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx$$

$$\text{Mà } I = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx = \frac{1}{2}$$

$$\text{Mặt khác: } \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [1 - \cos(2\pi x)] dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x) \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [f^2(x) - 2.f(x) \sin(\pi x) + \sin^2(\pi x)] dx = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 [f(x) - \sin(\pi x)]^2 dx = 0$$

Vì $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $[f(x) - \sin(\pi x)]^2 \geq 0, \forall x \in [0;1]$ nên ta suy ra $f(x) - \sin(\pi x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \sin(\pi x)$.

$$\text{Do đó } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sin(\pi x) dx = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

Câu 15. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7 \text{ và } \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{7}{5}$

B. 1

C. $\frac{7}{4}$

D. 4

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết: } \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 3x^2 f(x) dx = 1.$$

$$\text{Tính: } I = \int_0^1 3x^2 f(x) dx.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = 3x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x^3 \end{cases}.$$

Ta có:

$$I = \int_0^1 3x^2 f(x) dx = x^3 f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = 1 \cdot f(1) - 0 \cdot f(0) - \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = -\int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx.$$

$$\text{Mà: } \int_0^1 3x^2 f(x) dx = 1 \Rightarrow 1 = -\int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = -1 \Leftrightarrow 7 \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = -7 \Leftrightarrow \int_0^1 7x^3 \cdot f'(x) dx = -\int_0^1 [f'(x)]^2 dx, \text{ (theo giả thiết:}$$

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7).$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (7x^3 \cdot f'(x) + [f'(x)]^2) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x) [7x^3 + f'(x)] dx = 0$$

$$\Rightarrow 7x^3 + f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C.$$

$$\text{Với } f(1) = 0 \Rightarrow -\frac{7}{4} \cdot 1^4 + C = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Khi đó: } f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}.$$

$$\text{Vậy: } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4} \right) dx = -\frac{7}{4} \left(\frac{x^5}{5} - x \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{5}.$$

Câu 16. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$f(1) = 4, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 36 \text{ và } \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{1}{5}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{5}{6}$

B. $\frac{3}{2}$

C. 4

D. $\frac{2}{3}$

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết: } \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{1}{5} \Rightarrow \int_0^1 5x \cdot f(x) dx = 1.$$

$$\text{Tính: } I = \int_0^1 5x \cdot f(x) dx.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = 5x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{5}{2}x^2 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 5x \cdot f(x) dx = \frac{5}{2}x^2 \cdot f(x) \Big|_0^1 - \frac{5}{2} \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx$$

$$= \frac{5}{2} \cdot f(1) - \frac{5}{2} \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx = 10 - \frac{5}{2} \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx, \text{ (vì } f(1) = 4)$$

$$\text{Mà: } I = \int_0^1 5x \cdot f(x) dx = 1 \Rightarrow 1 = 10 - \frac{5}{2} \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx = \frac{18}{5}$$

$$\Leftrightarrow 10 \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx = 36 \Leftrightarrow 10 \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx, \text{ (theo giả thiết: } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 36)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [10x^2 \cdot f'(x) - [f'(x)]^2] dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x) [10x^2 - f'(x)] dx = 0$$

$$\Rightarrow 10x^2 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 10x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{10x^3}{3} + C$$

$$\text{Với } f(1) = 4 \Rightarrow 4 = \frac{10 \cdot 1}{3} + C \Rightarrow C = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Khi đó: } f(x) = \frac{10x^3}{3} + \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy: } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{10x^3}{3} + \frac{2}{3} \right) dx = \left(\frac{5x^4}{6} + \frac{2}{3}x \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Câu 17. (Chuyên Vĩnh Phúc Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$ thỏa

mãn $f(2) = 3$, $\int_0^2 [f'(x)]^2 dx = 4$ và $\int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^2 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{2}{115}$

B. $\frac{297}{115}$

C. $\frac{562}{115}$

D. $\frac{266}{115}$

Lời giải

Từ giả thiết: $\int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^2 3x^2 f(x) dx = 1$.

Tính: $I = \int_0^2 3x^2 f(x) dx$.

Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = 3x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x^3 \end{cases}$.

Ta có: $I = \int_0^2 3x^2 f(x) dx = x^3 \cdot f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx = 24 - \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx$, (vì $f(2) = 3$)

Mà: $I = \int_0^2 3x^2 f(x) dx = 1 \Rightarrow 1 = 24 - \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx = 23 \Leftrightarrow \frac{4}{23} \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{23} \int_0^2 x^3 \cdot f'(x) dx = \int_0^2 [f'(x)]^2 dx, \text{ (theo giả thiết: } \int_0^2 [f'(x)]^2 dx = 4 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 \left[\frac{4}{23} x^3 \cdot f'(x) - [f'(x)]^2 \right] dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 f'(x) \left[\frac{4}{23} x^3 - f'(x) \right] dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{23} x^3 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{4}{23} x^3 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{23} x^4 + C$$

$$\text{Với } f(2) = 3 \Rightarrow 3 = \frac{16}{23} + C \Rightarrow C = \frac{53}{23}.$$

$$\text{Khi đó: } f(x) = \frac{1}{23} x^4 + \frac{53}{23}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{23} x^4 + \frac{53}{23} \right) dx = \left(\frac{1}{115} x^5 + \frac{53}{23} x \right) \Big|_0^2 = \frac{562}{115}.$$

Câu 18. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn

$f(1) = 4$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 5$ và $\int_0^1 x \cdot f(x) dx = -\frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{15}{19}$

B. $\frac{17}{4}$

C. $\frac{17}{18}$

D. $\frac{15}{4}$

Lời giải

Tính: $I = \int_0^1 x \cdot f(x) dx$. Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}$

Ta có: $I = \frac{1}{2} x^2 \cdot f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f'(x) dx = 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f'(x) dx$, (vì $f(1) = 4$).

$$\text{Mà: } \int_0^1 x \cdot f(x) dx = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 x^2 f'(x) dx = 5, (\text{theo giả thiết: } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 5) \Leftrightarrow \int_0^1 x^2 f'(x) dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (x^2 f'(x) - [f'(x)]^2) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x) \cdot [x^2 - f'(x)] dx = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

$$\text{Với } f(1) = 4 \Rightarrow C = \frac{11}{3}.$$

$$\text{Khi đó: } f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{3}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{3} \right) dx = \left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{11}{3}x \right) \Big|_0^1 = \frac{15}{4}.$$

Câu 19. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$ thỏa mãn

$$f(2) = 6, \int_0^2 [f'(x)]^2 dx = 7 \text{ và } \int_0^2 x \cdot f(x) dx = \frac{17}{2}. \text{ Tích phân } \int_0^2 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. 8

B. 6

C. 7

D. 5

Lời giải

$$\text{Tính: } I = \int_0^2 x \cdot f(x) dx.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } I = \frac{1}{2}x^2 \cdot f(x) \Big|_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 f'(x) dx = 12 - \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 f'(x) dx, (\text{vì } f(2) = 6).$$

$$\text{Theo giả thiết: } \int_0^2 x \cdot f(x) dx = \frac{17}{2} \Rightarrow \frac{17}{2} = 12 - \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 f'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 x^2 f'(x) dx = 7$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 x^2 f'(x) dx = \int_0^2 [f'(x)]^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 (x^2 f'(x) - [f'(x)]^2) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f'(x) \cdot [x^2 - f'(x)] dx = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

$$\text{Với } f(2) = 6 \Rightarrow C = \frac{10}{3}.$$

Khi đó: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{10}{3}$.

Vậy $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{10}{3} \right) dx = \left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{10}{3}x \right) \Big|_0^2 = 8$.

Câu 20. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;3]$ thỏa mãn

$f(3) = 6$, $\int_0^3 [f'(x)]^2 dx = 2$ và $\int_0^3 x^2 \cdot f(x) dx = \frac{154}{3}$. Tích phân $\int_0^3 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{53}{5}$

B. $\frac{117}{20}$

C. $\frac{153}{5}$

D. $\frac{13}{5}$

Lời giải

Tính $I = \int_0^3 x^2 \cdot f(x) dx$.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{1}{3}x^3 \end{cases}$.

Ta có $I = \frac{1}{3}x^3 \cdot f(x) \Big|_0^3 - \frac{1}{3} \int_0^3 x^3 f'(x) dx = 54 - \frac{1}{3} \int_0^3 x^3 f'(x) dx$, (vì $f(3) = 6$).

Theo giả thiết: $\int_0^3 x^2 \cdot f(x) dx = \frac{154}{3} \Rightarrow \frac{154}{3} = 54 - \frac{1}{3} \int_0^3 x^3 f'(x) dx$

$\Leftrightarrow \int_0^3 x^3 f'(x) dx = 8 \Leftrightarrow \int_0^3 x^3 f'(x) dx = 4 \int_0^3 [f'(x)]^2 dx \Leftrightarrow \int_0^3 (x^3 f'(x) - 4[f'(x)]^2) dx = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^3 f'(x) [x^3 - 4f'(x)] dx = 0$.

$\Rightarrow x^3 - 4f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x^3}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{16} + C$.

Với $f(3) = 6 \Rightarrow C = \frac{15}{16}$.

Khi đó: $f(x) = \frac{x^4}{16} + \frac{15}{16}$.

Vậy $\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 \left(\frac{1}{16}x^4 + \frac{15}{16} \right) dx = \left(\frac{1}{80}x^5 + \frac{15}{16}x \right) \Big|_0^3 = \frac{117}{20}$.

Câu 21. (Chuyên Vĩnh Phúc Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa

mãn $f(1) = 2$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 8$ và $\int_0^1 x^3 \cdot f(x) dx = 10$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $-\frac{2}{285}$

B. $\frac{194}{95}$

C. $\frac{116}{57}$

D. $\frac{584}{285}$

Lời giải

Tính: $I = \int_0^1 x^3 \cdot f(x) dx$.

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^3 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{1}{4}x^4 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } I = \frac{1}{4}x^4 \cdot f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 f'(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 f'(x) dx, (\text{vì } f(1) = 2).$$

$$\text{Theo giả thiết: } \int_0^1 x^3 \cdot f(x) dx = 10 \Rightarrow \int_0^1 x^4 f'(x) dx = -38$$

$$\Leftrightarrow 8 \cdot \int_0^1 x^4 f'(x) dx = -38 \cdot 8 \Leftrightarrow 8 \cdot \int_0^1 x^4 f'(x) dx = -38 \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (8x^4 f'(x) + 38[f'(x)]^2) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x) \cdot [8x^4 + 38f'(x)] dx = 0$$

$$\Rightarrow 8x^4 + 38f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{4}{19}x^4 \Rightarrow f(x) = -\frac{4}{95}x^5 + C.$$

$$\text{Với } f(1) = 2 \Rightarrow C = \frac{194}{95}.$$

$$\text{Khi đó: } f(x) = -\frac{4}{95}x^5 + \frac{194}{95}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{4}{95}x^5 + \frac{194}{95} \right) dx = \left(-\frac{2}{285}x^6 + \frac{194}{95}x \right) \Big|_0^1 = \frac{116}{57}.$$

Câu 22. (Bắc Giang - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$ và

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2 - 1}{4}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $I = 2 - e.$

B. $I = e - 2.$

C. $I = \frac{e}{2}.$

D. $I = \frac{e-1}{2}.$

Lời giải

$$\text{Xét } A = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = (x+1)e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = xe^x \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } A = xe^x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 xe^x f'(x) dx = - \int_0^1 xe^x f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 xe^x f'(x) dx = \frac{1-e^2}{4}$$

$$\text{Xét } \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = e^{2x} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{e^2 - 1}{4}$$

$$\text{Ta có: } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 2 \int_0^1 xe^x f'(x) dx + \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) + xe^x)^2 dx = 0$$

$$\text{Suy ra } f'(x) + xe^x = 0, \forall x \in [0;1] \text{ (do } (f'(x) + xe^x)^2 \geq 0, \forall x \in [0;1])$$

$$\Rightarrow f'(x) = -xe^x \Rightarrow f(x) = (1-x)e^x + C$$

Do $f(1) = 0$ nên $f(x) = (1-x)e^x$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx = (2-x)e^x \Big|_0^1 = e - 2.$$

Câu 23. (Nam Định - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx = \frac{\pi}{8}$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}$. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x) dx$

A. $I = 1$.

B. $I = \frac{1}{2}$.

C. $I = 2$.

D. $I = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}$. Đặt $\begin{cases} \sin 2x = u \\ f'(x) dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cos 2x dx = du \\ f(x) = v \end{cases}$, khi đó

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx &= \sin 2x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx = \sin \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin 0 \cdot f(0) - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx. \end{aligned}$$

Theo đề bài ta có $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx = \frac{\pi}{8}$.

Mặt khác ta lại có $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx = \frac{\pi}{8}$.

Do $\int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x) - \cos 2x]^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f^2(x) - 2f(x) \cdot \cos 2x + \cos^2 2x] dx = \left(\frac{\pi}{8} - 2 \cdot \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$ nên $f(x) = \cos 2x$.

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{4}$.

Câu 24. (Chuyên Vinh - 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và

$f(0) + f(1) = 0$. Biết $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x) \cos(\pi x) dx = \frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

A. π .

B. $\frac{1}{\pi}$.

C. $\frac{2}{\pi}$.

D. $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = \cos(\pi x) \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = -\pi \sin(\pi x) dx \\ v = f(x) \end{cases}$. Khi đó:

$$\int_0^1 f'(x) \cos(\pi x) dx = \cos(\pi x) f(x) \Big|_0^1 + \pi \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx$$

$$= -(f(1) + f(0)) + \pi \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx = \pi \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx \Rightarrow \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx = \frac{1}{2}.$$

Cách 1: Ta có $\int_0^1 [f(x) - k \sin(\pi x)]^2 dx = \int_0^1 f^2(x) dx - 2k \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx + k^2 \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx$

$$= \frac{1}{2} - k + \frac{k^2}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

Do đó $\int_0^1 [f(x) - \sin(\pi x)]^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = \sin(\pi x)$. Vậy $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi}$.

Cách 2: Sử dụng BĐT Holder.

$$\left[\int_a^b f(x) g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow f(x) = kg(x), \forall x \in [a; b]$.

Áp dụng vào bài ta có $\frac{1}{4} = \left[\int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx \right]^2 \leq \int_0^1 f^2(x) dx \cdot \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx = \frac{1}{4},$

suy ra $f(x) = k \sin(\pi x)$.

Mà $\int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow f(x) = \sin(\pi x)$.

Vậy $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sin(\pi x) dx = \frac{2}{\pi}$.

Câu 25. (THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3, \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos x} dx = 1$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin x \cdot \tan x \cdot f(x)] dx = 2$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot f'(x) dx$ bằng:

- A. 4. B. $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$. D. 6.

Lời giải

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot f'(x) dx$. Đặt $\begin{cases} u = \sin x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

$$I = \sin x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot f(x) dx = \frac{3\sqrt{2}}{2} - I_1.$$

$$2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin x \cdot \tan x \cdot f(x)] dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\sin^2 x \cdot \frac{f(x)}{\cos x} \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[(1 - \cos^2 x) \cdot \frac{f(x)}{\cos x} \right] dx.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{f(x)}{\cos x} \right] dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cdot f(x) dx = 1 - I_1.$$

$$\Rightarrow I_1 = -1 \Rightarrow I = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{3\sqrt{2} + 2}{2}.$$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa $f(1) = 0$, $\int_0^1 (f'(x))^2 dx = \frac{\pi^2}{8}$

và $\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) f(x) dx = \frac{1}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $\frac{\pi}{2}$.

B. π .

C. $\frac{1}{\pi}$.

D. $\frac{2}{\pi}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = \cos \frac{\pi x}{2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) f(x) dx = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} f(x) \Big|_0^1 - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) f'(x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) f'(x) dx = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Lại có: } \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi} f'(x) \right)^2 dx - 2 \left(-\frac{2}{\pi} \right) \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) f'(x) dx + \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi} f'(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right)^2 dx = \frac{4}{\pi^2} \frac{\pi^2}{8} - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{Vì } \left(-\frac{2}{\pi} f'(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right)^2 \geq 0 \text{ trên đoạn } [0;1] \text{ nên}$$

$$\int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi} f'(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\pi} f'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + C \text{ mà } f(1) = 0 \text{ do đó } f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{2}{\pi}.$$

Câu 27. (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$

thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$ và $\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng:

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{7}{4}$. D. $\frac{6}{5}$.

Lời giải

Ta có: $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$ (1)

- Tính $\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}$.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^3 \cdot dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \int_0^1 x^3 f(x) dx = \left(\frac{x^4}{4} \cdot f(x) \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 \cdot f'(x) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 \cdot f'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^4 \cdot f'(x) dx = -1 \Rightarrow 18 \int_0^1 x^4 \cdot f'(x) dx = -18 \quad (2)$$

$$\text{- Lại có: } \int_0^1 x^8 dx = \frac{x^9}{9} \Big|_0^1 = \frac{1}{9} \Rightarrow 81 \int_0^1 x^8 dx = 9 \quad (3)$$

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 + 18x^4 \cdot f'(x) + 81x^8 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x) + 9x^4] dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \pi \cdot \int_0^1 [f'(x) + 9x^4] dx = 0$$

Hay thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x) + 9x^4$, trục hoành Ox , các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ khi quay quanh Ox bằng 0

$$\Rightarrow f'(x) + 9x^4 = 0 \Rightarrow f'(x) = -9x^4 \Rightarrow f(x) = \int f'(x) \cdot dx = -\frac{9}{5}x^5 + C.$$

$$\text{Lại do } f(1)=1 \Rightarrow C = \frac{14}{5} \Rightarrow f(x) = -\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5} \right) dx = \left(-\frac{3}{10}x^6 + \frac{14}{5}x \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{2}.$$

Câu 28. (THPT Phan Chu Trinh - Đắk Lắk - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn

$[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2-1}{4}$ và $f(1)=0$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$

- A. $\frac{e-1}{2}$. B. $\frac{e^2}{4}$. C. $e-2$. D. $\frac{e}{2}$.

Lời giải

$$\text{- Tính : } I = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \int_0^1 xe^x f(x) dx + \int_0^1 e^x f(x) dx = J + K.$$

$$\text{Tính } K = \int_0^1 e^x f(x) dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^x f(x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = [e^x f(x) + e^x f'(x)] dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow K = (xe^x f(x)) \Big|_0^1 - \int_0^1 [xe^x f(x) + xe^x f'(x)] dx = - \int_0^1 xe^x f(x) dx - \int_0^1 xe^x f'(x) dx \quad (\text{do } f(1) = 0)$$

$$\Rightarrow K = -J - \int_0^1 xe^x f'(x) dx \Rightarrow I = J + K = - \int_0^1 xe^x f'(x) dx.$$

- Kết hợp giả thiết ta được :

$$\begin{cases} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{e^2 - 1}{4} \\ - \int_0^1 xe^x f'(x) dx = \frac{e^2 - 1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{e^2 - 1}{4} \quad (1) \\ 2 \int_0^1 xe^x f'(x) dx = - \frac{e^2 - 1}{2} \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{- Mặt khác, ta tính được : } \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = \frac{e^2 - 1}{4} \quad (3).$$

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$$\int_0^1 ([f'(x)]^2 + 2xe^x f'(x) + x^2 e^{2x}) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f'(x) + xe^x)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \pi \int_0^1 (f'(x) + xe^x)^2 dx = 0$$

hay thể tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x) + xe^x$, trục Ox , các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$ khi quay quanh trục Ox bằng 0

$$\Rightarrow f'(x) + xe^x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -xe^x$$

$$\Rightarrow f(x) = - \int xe^x dx = (1-x)e^x + C.$$

$$\text{- Lại do } f(1) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = (1-x)e^x$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx = ((1-x)e^x) \Big|_0^1 + \int_0^1 e^x dx = -1 + e^x \Big|_0^1 = e - 2$$

Câu 29. (Sở Phú Thọ - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn

$$\int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = -\frac{1}{3}, \quad f(2) = 0 \quad \text{và} \quad \int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 7. \quad \text{Tính tích phân } I = \int_1^2 f(x) dx.$$

$$\text{A. } I = \frac{7}{5}.$$

$$\text{B. } I = -\frac{7}{5}.$$

$$\text{C. } I = -\frac{7}{20}.$$

$$\text{D. } I = \frac{7}{20}.$$

Lời giải

$$\text{Đặt } u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx, \quad dv = (x-1)^2 dx \Rightarrow v = \frac{(x-1)^3}{3}$$

$$\text{Ta có } -\frac{1}{3} = \int_1^2 (x-1)^2 f(x) dx = \frac{(x-1)^3}{3} \cdot f(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^3}{3} f'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx \Leftrightarrow \int_1^2 (x-1)^3 f'(x) dx = 1 \Rightarrow - \int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x) dx = -14$$

$$\text{Tính được } \int_1^2 49(x-1)^6 dx = 7 \Rightarrow \int_1^2 [f'(x)]^2 dx - \int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x) dx + \int_1^2 49(x-1)^6 dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_1^2 [7(x-1)^3 - f'(x)]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 7(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \frac{7(x-1)^4}{4} + C.$$

$$\text{Do } f(2) = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{7(x-1)^4}{4} - \frac{7}{4}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left[\frac{7(x-1)^4}{4} - \frac{7}{4} \right] dx = -\frac{7}{5}.$$

Câu 30. (THPT Quảng Yên - Quảng Ninh - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$

thỏa mãn: $f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx = \frac{1}{3}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = 1$.

B. $I = \frac{7}{5}$.

C. $I = 4$.

D. $I = \frac{7}{4}$.

Lời giải

Xét tích phân $\int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx = \frac{x^3}{3} f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -1$$

$$\int_0^1 x^6 dx = \frac{1}{7}.$$

$$\text{Ta có: } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 14 \int_0^1 x^3 f'(x) dx + 49 \int_0^1 x^6 dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 (f'(x) + 7x^3)^2 dx = 0$$

$$\text{Mà } \int_0^1 (f'(x) + 7x^3)^2 dx \geq 0. \quad \text{Dấu “=” xảy ra khi } f'(x) + 7x^3 = 0 \Rightarrow f'(x) = -7x^3$$

$$\Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = -\int 7x^3 dx = -\frac{7x^4}{4} + C.$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}.$$

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4} \right) dx = -\frac{7x^5}{20} \Big|_0^1 + \frac{7x}{4} \Big|_0^1 = -\frac{7}{20} + \frac{7}{4} = \frac{7}{5}.$$

Câu 31. (Yên Phong 1 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn

$f(1) = 3, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{11}$ và $\int_0^1 x^4 f(x) dx = \frac{7}{11}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ là

A. $\frac{35}{11}$.

B. $\frac{65}{21}$.

C. $\frac{23}{7}$.

D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

$$\text{Xét } \int_0^1 x^4 f(x) dx = \frac{7}{11}$$

$$\begin{aligned} \text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^4 dx \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^5}{5} \end{cases} \\ \Rightarrow \int_0^1 x^4 f(x) dx &= \frac{1}{5} x^5 f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{5} \int_0^1 x^5 f'(x) dx = \frac{3}{5} - \frac{1}{5} \int_0^1 x^5 f'(x) dx \quad (\text{vì } f(1) = 3) \\ \Rightarrow \int_0^1 x^5 f'(x) dx &= 5 \left(\frac{3}{5} - \frac{7}{11} \right) = -\frac{2}{11}. \\ \text{Xét } \begin{cases} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{11} \\ \int_0^1 x^5 f'(x) dx = -\frac{2}{11} \\ \int_0^1 x^{10} dx = \frac{1}{11} x^{11} \Big|_0^1 = \frac{1}{11} \end{cases} \\ \Rightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 4 \int_0^1 x^5 f'(x) dx + 4 \int_0^1 x^{10} dx &= 0 \Rightarrow \int_0^1 [(f'(x) + 2x^5)]^2 dx = 0 \\ \Rightarrow f'(x) = -2x^5 \Rightarrow f(x) &= \frac{-x^6}{6} + C. \text{ Do } f(1) = 3 \Rightarrow C = \frac{19}{6} \text{ nên} \\ \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \left(\frac{-x^6}{6} + \frac{19}{6} \right) dx = \frac{23}{6} \end{aligned}$$

Câu 32. (THPT Bình Giang - Hải Dương - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 2]$ và thỏa mãn $f(2) = 0$, $\int_1^2 (f'(x))^2 dx = \frac{5}{12} + \ln \frac{2}{3}$ và $\int_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = -\frac{5}{12} + \ln \frac{3}{2}$. Tính tích phân $\int_1^2 f(x) dx$.

A. $\frac{3}{4} + 2 \ln \frac{2}{3}$. B. $\ln \frac{3}{2}$. C. $\frac{3}{4} - 2 \ln \frac{3}{2}$. D. $\frac{3}{4} + 2 \ln \frac{3}{2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx &= -\frac{5}{12} + \ln \frac{3}{2}. \\ \text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = -\frac{1}{x+1} \end{cases} \\ \int_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx &= -\frac{f(x)}{x+1} \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{f'(x)}{x+1} dx = \frac{f(1)}{2} - \frac{f(2)}{3} + \int_1^2 \frac{f'(x)}{x+1} dx = \frac{f(1)}{2} + \int_1^2 \frac{f'(x)}{x+1} dx \\ \Rightarrow \int_1^2 (f'(x))^2 dx + \int_1^2 \frac{f'(x)}{2} dx + \int_1^2 \frac{f'(x)}{x+1} dx &= 0 \\ \Rightarrow \int_1^2 (f'(x))^2 dx - \int_1^2 \frac{f'(x)}{2} dx + \int_1^2 \frac{f'(x)}{x+1} dx &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 \left[(f'(x))^2 + \frac{f'(x)}{x+1} - \frac{f'(x)}{2} \right] dx = 0$$

$$\Leftrightarrow (f'(x))^2 + \frac{f'(x)}{x+1} - \frac{f'(x)}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(x) + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = C \\ f(x) = \frac{x}{2} - \ln|x+1| + C \end{cases}$$

TH1: $f(x) = C, f(2) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ (loại)

TH2: $f(x) = \frac{x}{2} - \ln|x+1| + C, f(2) = 0 \Leftrightarrow C = \ln 3 - 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{2} - \ln|x+1| + \ln 3 - 1$

$$\int_1^2 f(x) dx = \frac{3}{4} - 2 \ln \frac{3}{2}.$$

Câu 33. (Sở Bạc Liêu - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$,

$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{3} - \ln 3$ và $\int_0^1 \frac{4f(x)}{(2x+1)^2} dx = 2 \ln 3 - \frac{8}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1 \frac{f(x)}{4} dx$ bằng.

A. $\frac{1-3\ln 3}{3}$.

B. $\frac{4-\ln 3}{3}$.

C. $\frac{-\ln 3}{16}$.

D. $-\ln \frac{3}{16}$.

Lời giải

Ta tính. $\int_0^1 \frac{4f(x)}{(2x+1)^2} dx = 2 \ln 3 - \frac{8}{3} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{f(x)}{(2x+1)^2} dx = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{2}{3}$

Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \frac{1}{(2x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2} = \frac{x}{2x+1} \end{cases}$

$$\frac{1}{2} \ln 3 - \frac{2}{3} = \int_0^1 \frac{f(x)}{(2x+1)^2} dx = -\frac{xf(x)}{2x+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xf'(x)}{2x+1} dx = -\int_0^1 \frac{x}{2x+1} f'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{2x+1} f'(x) dx = -\frac{1}{2} \ln 3 + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 4 \int_0^1 \frac{x}{2x+1} f'(x) dx = -2 \ln 3 + \frac{8}{3}$$

Tính tích phân: $\int_0^1 \left(\frac{x}{2x+1} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{2x}{2x+1} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2x+1} \right)^2 dx$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{2x+1} + \frac{1}{(2x+1)^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \left(x - \ln|2x+1| - \frac{1}{2(2x+1)} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ln 3$$

$$\Rightarrow 4 \int_0^1 \left(\frac{x}{2x+1} \right)^2 dx = \frac{4}{3} - \ln 3$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx - 4 \int_0^1 \frac{x}{2x+1} f'(x) dx + 4 \int_0^1 \left(\frac{x}{2x+1} \right)^2 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(f'(x) - \frac{2x}{2x+1} \right)^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{2x+1} = 1 - \frac{1}{2x+1}$$

$$\Rightarrow f(x) = x - \frac{1}{2} \ln(2x+1) + C \text{ vì } x \in (0;1)$$

$$\text{Vì } f(1) = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2} \ln 3 - 1$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{f(x)}{4} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \ln(2x+1) + \frac{1}{2} \ln 3 - 1 \right) dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} \ln 3 - 1 \right) dx - \frac{1}{8} \int_0^1 \ln(2x+1) dx$$

$$A = \frac{1}{4} \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} \ln 3 - 1 \right) dx = \frac{1}{4} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \ln 3 - x \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \ln 3$$

$$B = \int_0^1 \ln(2x+1) dx \text{ đặt } \begin{cases} u = \ln(2x+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{2x+1} dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = x \ln(2x+1) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{2x+1} dx = \ln 3 - \left(x - \frac{1}{2} \ln(2x+1) \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} \ln 3 - 1$$

$$\Rightarrow I = A - \frac{1}{8} B = -\frac{1}{16} \ln 3$$

Câu 34. (Sở Hưng Yên - 2018) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$;

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{30} \text{ và } \int_0^1 (2x-1) f(x) dx = -\frac{1}{30}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{11}{30}.$

B. $\frac{11}{12}.$

C. $\frac{11}{4}.$

D. $\frac{1}{30}.$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = (2x-1) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x^2 - x \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 (2x-1) f(x) dx = (x^2 - x) f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (x^2 - x) f'(x) dx = -\int_0^1 (x^2 - x) f'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (x^2 - x) f'(x) dx = \frac{1}{30}$$

$$\text{Ta có: } \int_0^1 (x^2 - x)^2 dx = \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2) dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{30}.$$

$$\text{Do đó, } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx - 2 \int_0^1 (x^2 - x) f'(x) dx + \int_0^1 (x^2 - x)^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x) - (x^2 - x)]^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^2 - x \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C.$$

$$\text{Vì } f(0) = 1 \text{ nên } C = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1 \right) dx = \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{11}{12}.$$

Câu 35. (Sở Nam Định - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ và

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0. \text{ Biết } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx = \frac{\pi}{8}, \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x) dx.$$

- A. $I = 1$. B. $I = \frac{1}{2}$. C. $I = 2$. D. $I = \frac{1}{4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x df(x) = \left[f(x) \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) d \sin 2x$$

$$= f\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - f(0) \sin(2 \cdot 0) - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx$$

$$= f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx = -2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx.$$

$$\text{Do đó } 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Mặt khác: } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4x) dx = \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}.$$

Bởi vậy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \cos 2x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[f^2(x) - 2f(x) \cos 2x + \cos^2 2x \right] dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[f(x) - \cos 2x \right]^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = \cos 2x.$$

Nên:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{4}.$$

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(2) = 16$ và $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tích phân

$$\int_0^4 x f'\left(\frac{x}{2}\right) dx \text{ bằng}$$

- A. 112. B. 12. C. 56. D. 144.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2t \Rightarrow dx = 2dt.$$

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=4 \Rightarrow t=2 \end{cases}$. Do đó $\int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int_0^2 4tf'(t)dt = \int_0^2 4xf'(x)dx$.

Đặt $\begin{cases} u=4x \\ dv=f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=4dx \\ v=f(x) \end{cases}$.

Suy ra $\int_0^2 4xf'(x)dx = [4xf(x)]_0^2 - \int_0^2 4f(x)dx = 8f(2) - 4\int_0^2 f(x)dx = 8.16 - 4.4 = 112$.

Câu 37. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$f(2)=16, \int_0^2 f(x)dx=4$. Tính $I = \int_0^1 x.f'(2x)dx$.

A. 7.

B. 12.

C. 20.

D. 13.

Lời giải

Đặt $t=2x \Rightarrow dt=2dx$. Với $x=0 \Rightarrow t=0$; Với $x=1 \Rightarrow t=2$.

Suy ra: $I = \int_0^2 \frac{t}{2} f'(t) \frac{dt}{2} = \frac{1}{4} \int_0^2 t f'(t) dt = \frac{1}{4} \int_0^2 x f'(x) dx$.

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=f(x) \end{cases}$.

Ta có $I = \frac{1}{4} \left[x f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(x) dx \right] = \frac{1}{4} [2f(2) - 0f(0) - 4] = \frac{1}{4} (2.16 - 4) = 7$.

Câu 38. (Chuyên Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$\int_0^1 f(x)dx=10, f(1)=\cot 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 [f(x)\tan^2 x + f'(x)\tan x]dx$.

A. $1 - \ln(\cos 1)$.

B. -1.

C. -9.

D. $1 - \cot 1$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

$+ I = \int_0^1 [f(x)\tan^2 x + f'(x)\tan x]dx = \int_0^1 f(x)\tan^2 x dx + \int_0^1 f'(x)\tan x dx \quad (1)$.

+ Tính $J = \int_0^1 f'(x)\tan x dx$.

Đặt $\begin{cases} u=\tan x \\ dv=f'(x)dx \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du=(1+\tan^2 x)dx \\ v=f(x) \end{cases}$.

$\Rightarrow J = f(x).\tan x \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x).(1+\tan^2 x)dx$

$= f(1).\tan 1 - f(0).\tan 0 - \int_0^1 f(x).\tan^2 x dx - \int_0^1 f(x)dx$

$= \cot 1.\tan 1 - \int_0^1 f(x).\tan^2 x dx - 10$

$= 1 - \int_0^1 f(x).\tan^2 x dx - 10 = -9 - \int_0^1 f(x).\tan^2 x dx$.

Thay J vào (1) ta được:

$$I = \int_0^1 f(x) \tan^2 x dx + \left(-9 - \int_0^1 f(x) \cdot \tan^2 x dx \right) = -9.$$

Cách 2:

Ta có: $(f(x) \tan x)' = f'(x) \tan x + f(x)(\tan^2 x + 1) = f'(x) \tan x + f(x) \tan^2 x + f(x)$

$$\Rightarrow f'(x) \tan x + f(x) \tan^2 x = [f(x) \tan x]' - f(x).$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 [f(x) \tan^2 x + f'(x) \tan x] dx = \int_0^1 \left\{ [f(x) \tan x]' - f(x) \right\} dx$$

$$= f(x) \tan x \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) \tan 1 - 10 = \cot 1 \cdot \tan 1 - 10 = -9.$$

Câu 39. (Chuyên Lào Cai - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 3]$ thỏa mãn $f(3) = 0$,

$$\int_0^3 [f'(x)]^2 dx = \frac{7}{6} \text{ và } \int_0^3 \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}} dx = -\frac{7}{3}. \text{ Tích phân } \int_0^3 f(x) dx \text{ bằng:}$$

A. $-\frac{7}{3}.$

B. $-\frac{97}{30}.$

C. $\frac{7}{6}.$

D. $\frac{-7}{6}.$

Lời giải

Chọn B

Xét: $\int_0^3 \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}} dx = -\frac{7}{3}$

Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = 2(\sqrt{x+1} - 1) \end{cases}$

Khi đó: $\int_0^3 \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}} dx = \left[2(\sqrt{x+1} - 1) f(x) \right]_0^3 - 2 \int_0^3 (\sqrt{x+1} - 1) f'(x) dx$

$$\Rightarrow \int_0^3 (\sqrt{x+1} - 1) \cdot f'(x) dx = \frac{7}{6} \quad (1)$$

Mặt khác: $\int_0^3 (\sqrt{x+1} - 1)^2 dx = \int_0^3 (x + 2 - 2\sqrt{x+1}) dx = \frac{7}{6} \quad (2)$

$$\int_0^3 [f'(x)]^2 dx = \frac{7}{6} \quad (3)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(x) = \sqrt{x+1} - 1 \end{cases}$

+) $f'(x) = 0 \Rightarrow (3)$ vô lý

+) $f'(x) = \sqrt{x+1} - 1 \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - x + C$, mà $f(3) = 0 \Rightarrow C = -\frac{7}{3}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - x - \frac{7}{3}$$

$$\text{Vậy: } \int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 \left[\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - x - \frac{7}{3} \right] dx = -\frac{97}{30}.$$

Câu 40. (Chuyên - Vĩnh Phúc - lần 3 - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; 1)$ thỏa mãn $f(0) = 0$ và $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{9}{2}$; $\int_0^1 f'(x) \cdot \cos \frac{\pi x}{2} dx = \frac{3\pi}{4}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$ bằng:

- A. $\frac{2}{\pi}$. B. $\frac{1}{\pi}$. C. $\frac{6}{\pi}$. D. $\frac{4}{\pi}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int_0^1 f'(x) \cdot \cos \frac{\pi x}{2} dx = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} = u \\ f'(x) dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2} dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{3\pi}{4} = \cos \frac{\pi x}{2} \cdot f(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\pi}{2} \cdot f(x) \cdot \sin \frac{\pi x}{2} dx.$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{2} \cdot f(1) - \cos 0 \cdot f(0) + \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 f(x) \cdot \sin \frac{\pi x}{2} dx.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) \cdot \sin \frac{\pi x}{2} dx = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Theo đề: } \int_0^1 f^2(x) dx = \frac{9}{2}.$$

$$\text{Mặt khác: } \int_0^1 \sin^2 \frac{\pi x}{2} dx = \int_0^1 \frac{1 - \cos \pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Nên ta có } \int_0^1 \left[f^2(x) - 6f(x) \cdot \sin \frac{\pi x}{2} + 9 \sin^2 \frac{\pi x}{2} \right] dx = \frac{9}{2} - 6 \cdot \frac{3}{2} + 9 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(f(x) - 3 \sin \frac{\pi x}{2} \right)^2 dx = 0.$$

$$\text{Do hàm số } y = f(x) \text{ có đạo hàm liên tục trên } (0; 1) \text{ nên } f(x) = 3 \sin \frac{\pi x}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 3 \sin \frac{\pi x}{2} dx = -3 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \cos \frac{\pi x}{2} \Big|_0^1 = \frac{6}{\pi}.$$

Câu 41. (Hậu Lộc 2-Thanh Hóa- 2019) Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ sao cho $f(1) = 1$ và $f(x) \cdot f(1-x) = e^{x^2-x}$, $\forall x \in [0; 1]$. Tính $I = \int_0^1 \frac{(2x^3 - 3x^2) f'(x)}{f(x)} dx$.

- A. $I = -\frac{1}{60}$. B. $I = \frac{1}{10}$. C. $I = -\frac{1}{10}$. D. $I = \frac{1}{10}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x^3 - 3x^2 \\ dv = \frac{f'(x)}{f(x)} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (6x^2 - 6x) dx \\ v = \ln f(x) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } I = \left(2x^3 - 3x^2\right) \ln f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (6x^2 - 6x) \ln f(x) dx$$

$$= \ln 1 - \int_0^1 (6x^2 - 6x) \ln f(x) dx = - \int_0^1 (6x^2 - 6x) \ln f(x) dx.$$

$$\text{Đặt } t = 1 - x \Rightarrow dt = -dx.$$

$$\text{Ta có } I = \int_1^0 \left[6(1-t^2) - 6(1-t)\right] \ln f(1-t) dt = - \int_0^1 (6t^2 - 6t) \ln f(1-t) dt$$

$$= - \int_0^1 (6x^2 - 6x) \ln f(1-x) dx.$$

$$\text{Suy ra, } 2I = - \int_0^1 (6x^2 - 6x) \ln f(x) dx - \int_0^1 (6x^2 - 6x) \ln f(1-x) dx$$

$$= - \int_0^1 (6x^2 - 6x) [\ln f(x) + \ln f(1-x)] dx$$

$$= - \int_0^1 (6x^2 - 6x) \ln f(x) \cdot f(1-x) dx = - \int_0^1 (6x^2 - 6x) \ln e^{x^2-x} dx$$

$$= -6 \int_0^1 (x^2 - x)^2 dx = -6 \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2) dx = -\frac{1}{5}.$$

$$\text{Nhu vậy, } 2I = -\frac{1}{5} \Rightarrow I = -\frac{1}{10}$$

Câu 42. (Sở Nam Định-2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 2]$ và thỏa mãn:

$$f(2) = 0, \int_1^2 (f'(x))^2 dx = \frac{5}{12} + \ln \frac{2}{3} \text{ và } \int_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = -\frac{5}{12} + \ln \frac{3}{2}. \text{ Tính tích phân } \int_1^2 f(x) dx.$$

A. $\frac{3}{4} + 2 \ln \frac{3}{2}.$

B. $\ln \frac{2}{3}.$

C. $\frac{3}{4} - 2 \ln \frac{2}{3}.$

D. $\frac{3}{4} + 2 \ln \frac{2}{3}.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1} f(x) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{f'(x)}{x+1} dx = -\frac{1}{3} f(2) + \frac{1}{2} f(1) + \int_1^2 \frac{f'(x)}{x+1} dx$$

$$\text{Do } f(2) = 0 \text{ nên } \int_1^2 \frac{f'(x)}{x+1} dx + \frac{1}{2} f(1) = -\frac{5}{12} + \ln \frac{3}{2}$$

$$\text{Lại có } \int_1^2 f'(x) dx = f(2) - f(1) \Rightarrow f(1) = - \int_1^2 f'(x) dx$$

$$\text{Suy ra } \int_1^2 \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right] f'(x) dx = -\frac{5}{12} + \ln \frac{3}{2}$$

$$\text{Mặt khác } \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right)^2 dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4} \right) dx = \left(-\frac{1}{x+1} - \ln|x+1| + \frac{1}{4}x \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{12} + \ln \frac{2}{3}$$

Vậy:

$$\begin{aligned} & \int_1^2 (f'(x))^2 dx + 2 \int_1^2 \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right] f'(x) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{5}{12} + \ln \frac{2}{3} + 2 \left(-\frac{5}{12} - \ln \frac{2}{3} \right) + \frac{5}{12} + \ln \frac{2}{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow \int_1^2 \left(f'(x) + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right)^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \Rightarrow f(x) = -\ln|x+1| + \frac{1}{2}x + \ln 3 - 1 \end{aligned}$$

$$\text{do } f(2) = 0 \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx = \left[\frac{1}{4}x^2 - x + x \ln 3 - ((x+1) \ln(x+1) - (x+1)) \right]_1^2 = \frac{3}{4} + 2 \ln \frac{2}{3}.$$

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 3, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{4}{11}$ và

$$\int_0^1 x^4 f(x) dx = \frac{7}{11}. \text{ Giá trị của } \int_0^1 f(x) dx \text{ là:}$$

A. $\frac{35}{11}.$

B. $\frac{65}{21}.$

C. $\frac{23}{7}.$

D. $\frac{9}{4}.$

Lời giải

Chọn C

• Xét $\int_0^1 x^4 f(x) dx = \frac{7}{11}$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^4 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^5}{5} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 x^4 f(x) dx = \left(\frac{x^5}{5} \cdot f(x) \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^5}{5} \cdot f'(x) dx = \frac{7}{11}$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 \frac{x^5}{5} \cdot f'(x) dx = \frac{f(1)}{5} - \frac{7}{11} = \frac{-2}{55}$$

• Mặt khác $\int_0^1 \left(\frac{x^5}{5} \right)^2 dx = \frac{1}{275}$

• Ta có:

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 2 \cdot 10 \cdot \int_0^1 \frac{x^5}{5} \cdot f'(x) dx + 10^2 \cdot \int_0^1 \left(\frac{x^5}{5} \right)^2 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x) + 2x^5]^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = -2x^5$$

• Do đó $f(x) = \frac{-x^6}{3} + C$. Mà $f(1) = 3$ nên $f(x) = \frac{-x^6}{3} + \frac{10}{3}$

• Khi đó $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (-x^6 + 10)dx = \frac{23}{7}$

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và thỏa mãn $\int_1^2 (x-2)^2 f(x)dx = -\frac{1}{21}$,

$f(1) = 0$, $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{7}$. Tính $\int_1^2 xf(x)dx$.

A. $\frac{-19}{60}$.

B. $\frac{7}{120}$.

C. $\frac{-1}{5}$.

D. $\frac{13}{30}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\int_1^2 (x-2)^2 f(x)dx = -\frac{1}{21}.$$

Đặt: $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$; $dv = (x-2)^2 dx \Rightarrow v = \frac{(x-2)^3}{3}$.

$$\int_1^2 (x-2)^2 f(x)dx = \left(\frac{(x-2)^3}{3} f(x) \right) \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{(x-2)^3}{3} f'(x)dx$$

$$= -\int_1^2 \frac{(x-2)^3}{3} f'(x)dx.$$

$$\Rightarrow \int_1^2 (x-2)^3 f'(x)dx = \frac{1}{7}.$$

Do đó, $\int_1^2 (x-2)^3 f'(x)dx = \int_1^2 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{7}$

Mà $\int_1^2 (x-2)^6 dx = \left(\frac{(x-2)^7}{7} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{7}$.

Vậy, $\int_1^2 \left((x-2)^6 - 2(x-2)^3 f'(x) + [f'(x)]^2 \right) dx = \frac{1}{7} - \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = 0$

$$\Rightarrow \int_1^2 \left((x-2)^3 - f'(x) \right)^2 dx = 0 \Rightarrow (x-2)^3 - f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(x-2)^4}{4} + C.$$

Mà $f(1) = 0 \Rightarrow C = \frac{-1}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{(x-2)^4}{4} - \frac{1}{4}$.

$$\int_1^2 xf(x)dx = \frac{1}{4} \int_1^2 (x(x-2)^4 - x)dx = \frac{1}{4} \int_1^2 ((x-2)^5 + 2(x-2)^4 - x)dx$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{(x-2)^6}{6} + \frac{2(x-2)^5}{5} - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{4} \left(-2 - \frac{1}{6} + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{19}{60}.$$

Câu 45. (Chuyên ĐH Vinh- 2019) Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f(1) = f'(1) = 1$ và $f(1-x) + x^2 \cdot f''(x) = 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 xf'(x)dx$.

- A. $I = 1$. B. $I = 2$. C. $I = \frac{1}{3}$. D. $I = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f'(x) \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f''(x)dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } I = \int_0^1 xf'(x)dx = \frac{x^2}{2} f'(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} f''(x)dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x^2}{2} f''(x)dx.$$

$$\text{Do } f(1-x) + x^2 \cdot f''(x) = 2x \Rightarrow \frac{x^2}{2} \cdot f''(x) = x - \frac{1}{2} f(1-x).$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{2} - \int_0^1 \left[x - \frac{1}{2} f(1-x) \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(1-x) dx.$$

$$\text{Đặt } t = 1-x \text{ suy ra } I = -\frac{1}{2} \int_1^0 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \frac{1}{2} \left[xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx \right] \Leftrightarrow I = \frac{1}{2}(1-I) \Leftrightarrow I = \frac{1}{3}.$$

Câu 46. (Chuyên Lê Quý Đôn - Điện Biên - 2022) Xét hàm số $f(x) = e^x + \int_0^1 xf(x)dx$. Giá trị của $f(\ln 2022)$ bằng bao nhiêu?

- A. 2022. B. 2021. C. 2023. D. 2024.

Lời giải

Chọn D

Từ yêu cầu đề bài và đáp án, ta có thể đặt: $f(x) = e^x + C$

$$\text{Khi đó: } f(x) = e^x + \int_0^1 xf(x)dx \Leftrightarrow e^x + C = e^x + \int_0^1 x(e^x + C)dx$$

$$\Leftrightarrow e^x + C = e^x + \int_0^1 xe^x dx + \int_0^1 Cxdx(1).$$

$$\text{Với: } \int_0^1 xe^x dx, \text{ đặt: } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } \int_0^1 xe^x dx = (xe^x) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = (xe^x) \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = (x-1)e^x \Big|_0^1$$

$$(1) \Leftrightarrow e^x + C = e^x + (x-1)e^x \Big|_0^1 + \frac{C}{2}x^2 \Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow C = \left[e^x(x-1) + \frac{C}{2}x^2 \right]_0^1 \Leftrightarrow C = \frac{C}{2} + 1 \Leftrightarrow C = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = e^x + 2 \Rightarrow f(\ln 2022) = 2024.$$

Câu 47. (Sở Hà Tĩnh 2022) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(4) = 2$, $\int_0^4 f(x) dx = 4$. Tính

$$\int_0^2 xf'(2x) dx$$

A. $I = 17$.

B. $I = 1$.

C. $I = 12$.

D. $I = 4$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét } I = \int_0^2 xf'(2x) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(2x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} f(2x) \end{cases}.$$

$$I = \frac{1}{2} x \cdot f(2x) \Big|_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 f(2x) dx = f(4) - \frac{1}{2} \int_0^2 f(2x) dx = 2 - \frac{1}{2} \int_0^2 f(2x) dx$$

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx.$$

$$\text{Đổi cận } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 2 \Rightarrow t = 4.$$

$$\Rightarrow I = 2 - \frac{1}{4} \int_0^4 f(t) dt = 2 - \frac{1}{4} \int_0^4 f(x) dx = 2 - 1 = 1.$$

Câu 48. (Chuyên KHTN 2022) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên R và thỏa mãn $f(x^3 + 3x) = x^2 + 2$

với mọi số thực x . Từ đó hãy tính $\int_0^4 x^2 f'(x) dx$

A. $\frac{27}{4}$

B. $\frac{219}{18}$

C. $\frac{357}{4}$

D. $\frac{27}{8}$

Lời giải

Đầu tiên, ta thế $x = 1$ vào phương trình $f(x^3 + 3x) = x^2 + 2$ thu được $f(4) = 3$

Ta gọi tích phân cần tìm là $I = \int_0^4 x^2 f'(x) dx$. Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = f(x) \end{cases}$

$$\text{Suy ra: } I = \int_0^4 x^2 f'(x) dx = 16f(4) - \int_0^4 2xf(x) dx = 48 - \int_0^4 2xf(x) dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = t^3 + 3t \Rightarrow dx = (3t^2 + 3) dt \\ t: 0 \rightarrow 1 \end{cases} \Rightarrow \int_0^4 2xf(x) dx = \int_0^1 2(3t^2 + 3)(t^3 + 3t) f(t^3 + 3t) dt$$

$$= \int_0^1 2(3t^2 + 3)(t^3 + 3t)(t^2 + 2) dt = \frac{165}{4}. \text{ Vậy } I = 48 - \frac{165}{4} = \frac{27}{4}.$$

Câu 49. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định 2022) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$[f(x)]^3 + 2f(x) = 1 - x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tích phân $\int_{-2}^1 f(x)dx = \frac{a}{b}$ biết $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a^2 + b^2$?

A. 11.

B. 305.

C. 65.

D. 41.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết $[f(x)]^3 + 2f(x) = 1 - x$, lấy đạo hàm 2 vế ta được:

$$3f'(x)f^2(x) + 2f'(x) = -1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{3f^2(x) + 2}.$$

$$\text{Xét } I = \int_{-2}^1 f(x)dx. \text{ Đặt } u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx = \frac{-1}{3u^2 + 2}dx \Rightarrow dx = -(3u^2 + 2)du.$$

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} [f(-2)]^3 + 2f(-2) = 3 \Rightarrow f(-2) = 1 \\ [f(1)]^3 + 2f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = -\int_1^0 u(3u^2 + 2)du = \int_0^1 (3u^3 + 2u)du = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Suy ra } a = 7, b = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 = 65.$$

Câu 50. (Sở Lai Châu 2022) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5) = 1$ và

$\int_0^1 xf(5x)dx = 1$, khi đó tích phân $\int_0^5 x^2 f'(x)dx$ bằng

A. -25.

B. $\frac{123}{5}$.

C. 23.

D. 15.

Lời giải

$$\text{Đầu tiên ta có: } \int_0^1 xf(5x)dx = \frac{1}{5} \int_0^1 xf(5x)d(5x) = \frac{1}{5} \int_0^5 \frac{x}{5}f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^5 xf(x)dx = 25$$

Ta có tiếp:

$$\begin{cases} u = f(x) \rightarrow du = f'(x)dx \\ dv = xdx \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow 25 = \int_0^5 xf(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}f(x) \right]_0^5 - \int_0^5 x^2 f'(x)dx = \frac{25}{2} - \int_0^5 \frac{x^2}{2}f'(x)dx$$

$$\text{Vậy } \int_0^5 \frac{x^2}{2}f'(x)dx = \frac{25}{2} - 25 = -\frac{25}{2} \Rightarrow \int_0^5 x^2 f'(x)dx = -25.$$

Câu 51. (Sở Hậu Giang 2022) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16, \int_0^2 f(x)dx = 4$. Tính

$$I = \int_0^1 x.f'(2x)dx$$

A. $I = 13$.

B. $I = 12$.

C. $I = 7$.

D. $I = 20$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt: } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt.$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 0, x = 1 \Rightarrow t = 2.$$

$$\Rightarrow I = \int_0^2 \frac{t}{2} \cdot f'(t) \frac{1}{2} dt = \int_0^2 \frac{t}{4} \cdot f'(t) dt.$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \frac{t}{4} \\ dv = f'(t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{4} dt \\ v = f(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \left(\frac{t}{4} \cdot f(t) \right) \Big|_0^2 - \frac{1}{4} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} f(2) - \frac{1}{4} \cdot 4 = 7.$$

Câu 52. (Sở Hậu Giang 2022) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn

$$f(1)=1, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{9}{5} \text{ và } \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \frac{2}{5}. \text{ Tính } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $I = \frac{3}{5}.$

B. $I = \frac{1}{4}.$

C. $I = \frac{3}{4}.$

D. $I = \frac{1}{5}.$

Lời giải

Chọn B

Xét $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx$:

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} \Rightarrow \int_0^1 tf(t) dt = \frac{1}{5} \text{ hay } \int_0^1 xf(x) dx = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Tích phân từng phần } \int_0^1 xf(x) dx, \text{ ta được } \int_0^1 x^2 f'(x) dx = \frac{3}{5}.$$

Hàm dưới dấu tích phân là $[f'(x)]^2$, $x^2 f'(x)$ nên xét liên kết với $[f'(x) + \alpha x^2]^2$, ta được

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{9}{5}; 2\alpha \int_0^1 x^2 f'(x) dx = \frac{6\alpha}{5}; \alpha^2 \int_0^1 x^4 dx = \frac{\alpha^2}{5}.$$

$$\text{Nên } \int_0^1 [f'(x) + \alpha x^2]^2 dx = \frac{9}{5} + \frac{6\alpha}{5} + \frac{\alpha^2}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f(x) = x^3 + C \xrightarrow{f(1)=1} C = 0.$$

$$\text{Vậy } f(x) = x^3 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{4}.$$

Câu 53. (THPT Ngũ Hành Sơn - Đà Nẵng 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là

$$f'(x) = (1-x)e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(2) = \frac{2}{e^2}. \text{ Biết } F(x) \text{ là nguyên hàm của } f(x) \text{ thỏa mãn } F(0) = 3 + \frac{2}{e},$$

khi đó $F(1)$ bằng

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$+ \text{ Tính } f(x) = \int f'(x) dx = \int [(1-x)e^{-x}] dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 1 - x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\text{Từ đó } f(x) = -(1-x)e^{-x} - \int e^{-x} dx = (x-1)e^{-x} + e^{-x} + C = xe^{-x} + C.$$

$$\text{Ta có } f(2) = \frac{2}{e^2} + C = \frac{2}{e^2} \Rightarrow C = 0. \text{ Do đó } f(x) = xe^{-x}.$$

$$+ \text{ Tính } I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xe^{-x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u_1 = x \\ dv_1 = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = dx \\ v_1 = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\text{Từ đó } I = -xe^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} - e^{-x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e} - 1 \right) = -\frac{2}{e} + 1.$$

$$\text{Mà } I = F(1) - F(0) \text{ nên } F(1) = I + F(0) = -\frac{2}{e} + 1 + 3 + \frac{2}{e} = 4.$$

Câu 54. (Sở Hòa Bình 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ đồng thời thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x) dx = 3\pi,$$

$$\int_0^{\pi} (\sin x - x) \cdot f' \left(\frac{x}{2} \right) dx = -2\pi \text{ và } f \left(\frac{\pi}{2} \right) = 4. \text{ Giá trị của } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \sin x dx$$

A. $\frac{8+5\sqrt{3}}{3}.$

B. $\frac{8+5\sqrt{2}}{3}.$

C. $\frac{8-5\sqrt{2}}{3}.$

D. $\frac{8-5\sqrt{3}}{3}.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét } A = \int_0^{\pi} (\sin x - x) \cdot f' \left(\frac{x}{2} \right) dx$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{2} \Rightarrow dx = 2dt; x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow A = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t - 2t) \cdot f'(t) dt$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sin 2t - 2t \\ dv = f'(t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 \cos 2t - 2 \\ v = f(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = (\sin 2t - 2t) \cdot f(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t - 1) f(t) dt = -4\pi + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot f(t) dt = -2\pi$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot f(t) dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot f(x) dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Xét } \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) - 4\sin^2 x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x) dx - 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot f(x) dx + 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = 3\pi - 4\pi + 16 \cdot \frac{3}{16} \pi = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 4\sin^2 x \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \sin x dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos^2 x) \sin x dx$$

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow \sin x dx = -dt; x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow I = -4 \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - t^2) dt = 4 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 (1 - t^2) dt = 4 \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{3}$$

Câu 55. (THPT Thanh Miện 2 - Hải Dương 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $f(1) = e$ và $(x+2) \cdot f(x) = x \cdot f'(x) - x^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $f(2)$.

- A. $4e^2 + 4e - 4$. B. $2e^3 - 2e + 2$. C. $4e^2 - 2e + 2$. D. $4e^2 - 4e + 4$.

Lời giải

Chọn A

+ Xét hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$ ta có

$$(x+2) \cdot f(x) = x \cdot f'(x) - x^3 \Leftrightarrow x \cdot f'(x) - (x+2) \cdot f(x) = x^3 \Leftrightarrow \frac{x^2 e^x f'(x) - f(x) \cdot (x^2 e^x)'}{x^4 e^{2x}} = \frac{1}{e^x}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2 e^x} \right)' = \frac{1}{e^x} \Rightarrow \int_1^2 \left(\frac{f(x)}{x^2 e^x} \right)' dx = \int_1^2 \frac{1}{e^x} dx \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2 e^x} \right) \Big|_1^2 = \left(-\frac{1}{e^x} \right) \Big|_1^2 \Leftrightarrow \frac{f(2)}{4e^2} - \frac{f(1)}{e} = -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e}$$

+ Do $f(1) = e$ nên $f(2) = 4e^2 + 4e - 4$.

Câu 56. (Sở Gia Lai 2022) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f(\cos^2 x) dx = 1$, khi đó

$$\int_0^1 [2f(1-x) - 3x^2 + 5] dx \text{ bằng}$$

- A. 4. B. 3. C. 5. D. 6.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f(\cos^2 x) dx = 1.$$

$$\text{Đặt } u = \cos^2 x \Rightarrow du = -2 \cos x \cdot \sin x dx \Rightarrow -du = \sin 2x dx.$$

$$\text{Đổi cận } x = 0 \Rightarrow u = 1 \text{ và } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0.$$

$$\text{Khi đó } I = -\int_1^0 f(u) du = 1 \Rightarrow I = \int_0^1 f(x) dx = 1.$$

$$\text{Đặt } J = \int_0^1 [2f(1-x) - 3x^2 + 5] dx \text{ có}$$

$$J = 2 \int_0^1 f(1-x) dx + \int_0^1 (-3x^2 + 5) dx = 2 \int_0^1 f(1-x) dx + 4.$$

$$\text{Đặt } t = 1-x \Rightarrow dt = -dx \Rightarrow -dt = dx.$$

$$\text{Đổi cận } x = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ và } x = 1 \Rightarrow t = 0.$$

$$\text{Do đó } J = -2 \int_1^0 f(t) dt + 4 = 2 \int_0^1 f(x) dx + 4 = 6.$$

Câu 57. (Chuyên Lương Văn Chánh – Phú Yên 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và $f(1) + f(2) = 0$. Biết $\int_1^2 (f(x))^2 dx = \frac{1}{2}$, $\int_1^2 f'(x) \cos(\pi x) dx = \frac{\pi}{2}$. Tính $\int_1^2 f(x) dx$.

- A. π .
 B. $\frac{1}{\pi}$.
 C. $\frac{2}{\pi}$.
D. $-\frac{2}{\pi}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } I = \int_1^2 f'(x) \cos(\pi x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \cos(\pi x) \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\pi \sin \pi x dx \\ v = f(x) \end{cases} \Rightarrow I = f(x) \cos(\pi x) \Big|_1^2 + \pi \int_1^2 f(x) \sin \pi x dx$$

$$\Rightarrow I = f(2) \cos 2\pi - f(1) \cos \pi + \pi \int_1^2 f(x) \sin \pi x dx \Rightarrow \int_1^2 f(x) \sin \pi x dx = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta có } \int_1^2 \sin^2 \pi x dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (1 - \cos 2\pi x) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó } \int_1^2 (f(x))^2 dx - 2 \int_1^2 f(x) \sin(\pi x) dx + \int_1^2 (\sin \pi x)^2 dx = 0$$

$$\int_1^2 [f^2(x) - 2f(x) \sin \pi x + (\sin \pi x)^2] dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^2 (f(x) - \sin \pi x)^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = \sin \pi x$$

$$\text{Do đó } \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \sin \pi x dx = \left. \frac{-1}{\pi} \cos \pi x \right|_1^2 = \frac{-2}{\pi}.$$

Câu 58. (Sở Hòa Bình 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 4$; $f(0) = 1$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 x \cdot f^2(x) dx$ bằng

- A. $\frac{1}{4}$.
 B. 9.
 C. $\frac{1}{6}$.
D. $\frac{19}{4}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } I = \int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0) = 4 - 1 = 3.$$

$$\int_0^1 3 dx = 3 \Rightarrow \left(\int_0^1 3 dx \right)^2 = 9$$

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx - 2 \cdot 3 \cdot \int_0^1 f'(x) dx + \left(\int_0^1 3 dx \right)^2 = 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3^2 = 0 \Rightarrow \int_0^1 (f'(x) - 3)^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3 \Rightarrow f(x) = 3x + C.$$

Theo bài ra $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = 3x + 1 \Rightarrow \int_0^1 x \cdot f^2(x) dx = \int_0^1 x \cdot (3x + 1)^2 dx = \frac{19}{4}$.

Câu 59. (Chuyên Thái Bình 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; e]$ và thỏa mãn

$f(1) = 0; [f'(x) - 1]x = f(x), \forall x \in [1; e]$. Tích phân $\int_1^e f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{e^2 - 1}{4}$
- B. $\frac{e^2 + 1}{2}$
- C. $\frac{e^2 + 1}{4}$
- D. $\frac{e^2 - 1}{2}$

Lời giải

Ta có $[f'(x) - 1]x = f(x) \Rightarrow f'(x) - \frac{1}{x}f(x) = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}f'(x) - \frac{1}{x^2}f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \left(\frac{1}{x}f(x)\right)' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x}f(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\text{Do } f(1) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x \ln|x| \Rightarrow \int_1^e f(x) dx = \int_1^e x \ln|x| dx = \frac{1}{4}(e^2 + 1).$$

Chọn đáp án

C.

Câu 60. (Sở Ninh Bình 2023) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$, thỏa mãn

$\int_{-2}^{-1} f(x+2) dx = 3$ và $f(1) = 4$. Khi đó tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x f'(\sin x) dx$ bằng

- A. 4.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$\int_{-2}^{-1} f(x+2) dx = 3, t = x+2 \Rightarrow \int_0^1 f(t) dt = 3.$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x f'(\sin x) dx = \int_0^2 2 \sin x \cdot \cos x \cdot f'(\sin x) dx = \int_0^1 2t \cdot f'(t) dt.$$

$$\oplus \begin{cases} u = 2t \\ dv = f'(t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dt \\ v = f(t) \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^1 2t \cdot f'(t) dt = 2t \cdot f(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(t) \cdot 2 dt$$

$$\Rightarrow I = 2 \cdot f(1) - 2 \int_0^1 f(t) dt = 2 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 2.$$

Câu 61. (Sở Nghệ An 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_1^e \frac{1 - f(\ln x)}{x} dx = 2$

và $f(1) = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 x f'(x) dx$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$.

B. $\frac{2e}{3}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_1^e \frac{1-f(\ln x)}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx - \int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = \ln x \Big|_1^e - \int_1^e f(\ln x) d(\ln x) = 1 - \int_0^1 f(x) dx$.

Mặt khác $\int_1^e \frac{1-f(\ln x)}{x} dx = 2$ suy ra $\int_0^1 f(x) dx = -1$.

Do đó $\int_0^1 x f'(x) dx = \int_0^1 x d(f(x)) = x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) + 1 = \frac{4}{3}$.