

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT ĐỀ 04

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \cos x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{\pi^2}{8} + 1$. Khi đó $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\frac{\pi}{2}$.

B. $\frac{\pi}{2} + 1$.

C. $\frac{\pi}{2} - 1$.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x) = \int f'(x) dx = \int (\cos x + 1) dx = \sin x + x + C$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{\pi^2}{8} + 1 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + x + C) dx = \left(-\cos x + \frac{x^2}{2} + Cx \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2}C + 1 = \frac{\pi^2}{8} + 1 \Leftrightarrow C = 0$$

$$f(x) = \sin x + x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1$$

Vậy

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A , $AB = a, BC = 2a$ và SB vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

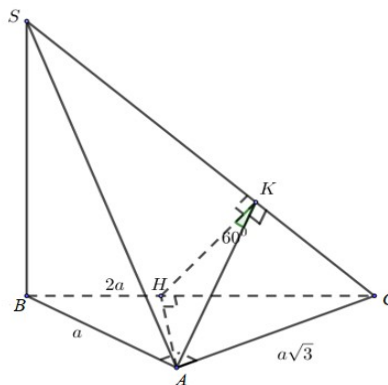
B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Trong $\triangle ABC$ kẻ $AH \perp BC$. Ta có: $\begin{cases} AH \perp BC \\ SB \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC(1) \end{cases}$.

Trong ΔSAC kẻ $AK \perp SC$ (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow SC \perp (AKH) \Rightarrow SC \perp HK$.

Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) là $\angle AKH$ nên $\angle AKH = 60^\circ$.

Ta có: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$,

$$AC^2 = CH \cdot BC \Rightarrow CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2},$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Trong ΔAKH vuông tại H có $HK = AH \cdot \cot 60^\circ = \frac{a}{2}$, $CK = \sqrt{CH^2 - HK^2} = a\sqrt{2}$.

$$\Delta SBC \sim \Delta HKC (g.g) \text{ nên } \frac{SB}{HK} = \frac{BC}{KC} = \frac{2a}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow SB = HK \cdot \sqrt{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Thể tích hình chóp } S.ABC \text{ là } V = \frac{1}{3} SB \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{3} a = \frac{a^3 \sqrt{6}}{12}.$$

Câu 43: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + m^2 - 2m = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 2$?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta' = m^2 - (m^2 - 2m) = 2m$.

- Trường hợp 1: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$ thì $|z_0| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = 2 \\ z_0 = -2 \end{cases}$.

+ Thế $z_0 = 2$ vào phương trình đã cho ta được:

$$4 - 4m + m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \pm \sqrt{5} \text{ (thỏa)}.$$

+ Thế $z_0 = -2$ vào phương trình đã cho ta được:

$$4 + 4m + m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 4 = 0 \text{ (vô nghiệm)}.$$

- Trường hợp 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < 0$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm $z_{1,2} = m \pm \sqrt{-2m}i$.

$$|z_0| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + (-2m)} = 2 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 + \sqrt{5} (L) \\ m = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Theo giả thiết

$$\text{Vậy } m \in \{1 - \sqrt{5}; 3 \pm \sqrt{5}\}.$$

- Câu 44:** Cho số phức z thỏa mãn $(z+1-i)(\bar{z}+1+i)=5$ và $P=|z-2i|^2-|z+1|^2$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của P bằng
- A. -9. B. 11. C. 2 D. 20.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

Ta có $(z+1-i)(\bar{z}+1+i)=5 \Leftrightarrow (z+1-i)(\overline{z+1-i})=5 \Leftrightarrow |z+1-i|^2=5 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2=5$

$$P=|z-2i|^2-|z+1|^2=x^2+(y-2)^2-(x+1)^2-y^2=-2x-4y+3=-2(x+1)-4(y-1)+1$$

$$\Leftrightarrow 1-P=2(x+1)+4(y-1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia-côpski ta được:

$$|2(x+1)+4(y-1)| \leq \sqrt{2^2+4^2} \cdot \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow |1-P| \leq 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}=10 \Leftrightarrow -10 \leq P-1 \leq 10 \Leftrightarrow -9 \leq P \leq 11$$

$$P_{\max}=11 \text{ đạt được khi } \begin{cases} 11=-2x-4y+3 \\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{4} \\ (x+1)^2+(y-1)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=-8 \\ 4x-2y=-6 \\ (x+1)^2+(y-1)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow z=-2-i$$

$$P_{\min}=-9 \text{ đạt được khi } \begin{cases} -9=-2x-4y+3 \\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{4} \\ (x+1)^2+(y-1)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=12 \\ 4x-2y=-6 \\ (x+1)^2+(y-1)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow z=3i$$

$$\text{Vậy } P_{\max}+P_{\min}=2$$

- Câu 45:** Cho hàm số $f(x)=-4x^3+ax^2+bx+c$ có đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm có hoành độ là -3; -1; 1. $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm cực trị của hàm số $F(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=F(x)$ và $y=g(x)$ bằng

- A. $\frac{128}{15}$ B. $\frac{64}{15}$ C. 16 D. 64

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = -4x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm có hoành độ là $-3; -1; 1$

$$\text{suy ra } \begin{cases} 9a - 3b + c = -84 \\ a - b + c = -1 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -12 \\ b = 4 \\ c = 12 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -4x^3 - 12x^2 + 4x + 12$$

$$F(x) = \int f(x) dx = -x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 12x + C$$

Giả sử $g(x) = mx^2 + nx + p$, đồ thị $g(x)$ đi qua các điểm cực trị của hàm số $F(x)$ là $(-3; C+9), (-1; C-7); (1; C+9)$ nên ta có

$$\begin{cases} 9m - 3n + p = C+9 \\ m - n + p = C-7 \\ m + n + p = C+9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ n = 8 \\ p = C-3 \end{cases} \Rightarrow g(x) = 4x^2 + 8x + C-3$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = F(x)$ và $y = g(x)$ bằng

$$S = \int_{-3}^1 |F(x) - g(x)| dx = \int_{-3}^1 |-x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + 3| dx = \frac{128}{15}$$

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + 3y - 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{1}$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1; 2; 1)$ mặt phẳng (P) và đường thẳng d lần lượt tại B, C sao cho C là trung điểm của AB là

A. $\frac{x-1}{-8} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$. B. $\frac{x+15}{8} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{1}$.
C. $\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$. D. $\frac{x+15}{8} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{1}$.

Lời giải

Chọn D

$$B \in (P) \Rightarrow B(-3y + 2z - 1; y; z), C \in d \Rightarrow C(1 + 2t; -1 - t; 4 + t)$$

$$C \text{ là trung điểm của } AB \text{ suy ra } \begin{cases} -3y + 2z = 2 + 4t \\ y + 2 = -2 - 2t \\ z + 1 = 8 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ z = -1 \\ t = -4 \end{cases} \Rightarrow C(-7; 3; 0)$$

$$\overrightarrow{AC}(8; -1; 1) \text{ là vectơ chỉ phương của } \Delta \text{ nên PTCT của } \Delta \text{ là } \frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

Dễ thấy điểm $M(-15; 4; -1) \in \Delta$ nên ta **Chọn D**

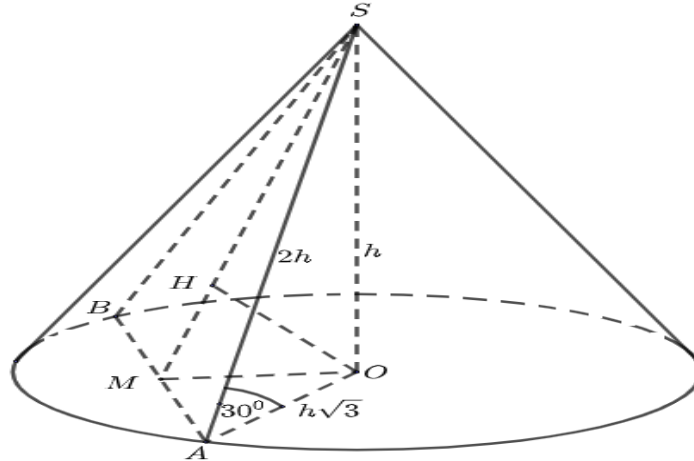
Câu 47: Cho hình nón đỉnh S , đường cao SO , A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho tam giác

SAB đều; khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\angle SAO = 30^\circ$. Diện tích xung quanh của hình nón theo a bằng

- A. $\sqrt{3}\pi a^2$ B. $\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}a^2$ C. $6\sqrt{3}\pi a^2$ D. $\frac{5\sqrt{3}\pi}{2}a^2$

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm AB , gọi H là hình chiếu của O lên SM thì $SH \perp (SAB)$ nên

$d(O, (SAB)) = OH$. Vậy $OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Gọi $SO = h$, do $\angle SAO = 30^\circ$ nên $SA = 2h$, $OA = h\sqrt{3}$.

Mặt khác $\triangle ABC$ đều nên $SM = h\sqrt{3}$ và $AM = h \Rightarrow MO^2 = 3h^2 - h^2 = 2h^2$.

$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{2h^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{3}{2h^2}$. Vậy $\frac{2h^2}{3} = \frac{a^2}{3} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$, $r = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

$$S_{xq} = \pi r l = \pi a^2 \sqrt{3}$$

Câu 48: Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có không quá 20 số nguyên b thỏa mãn $2^a + 4 \cdot 6^b < 2^{a+b+2} + 3^b$?

- A. 33 B. 32 C. 31 D. 30

Lời giải

Chọn D

$$2^a + 4 \cdot 6^b < 2^{a+b+2} + 3^b \Leftrightarrow 2^a(1 - 4 \cdot 2^b) + 3^b(4 \cdot 2^b - 1) < 0 \Leftrightarrow (2^a - 3^b)(1 - 4 \cdot 2^b) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^a - 3^b < 0 \\ 1 - 4 \cdot 2^b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^a < 3^b \\ 1 > 4 \cdot 2^b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < -2 \\ 2^a < 3^b < 3^{-2} \end{cases} \text{ (MT do } a \in \mathbb{Z}_+) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2^a - 3^b > 0 \\ 1 - 4 \cdot 2^b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^a > 3^b \\ 1 < 4 \cdot 2^b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > -2 \\ b < a \log_3 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a \log_3 2 < 19 \Leftrightarrow a \leq \frac{18}{\log_3 2} \approx 30.1$$

Để ứng với mỗi a có không quá 20 số nguyên b

Vậy có 30 số nguyên dương a thỏa mãn.

Câu 49: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 12$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 11 = 0$. Xét điểm M di động trên (P) , các điểm A, B, C phân biệt di động trên (S) sao cho MA, MB, MC là các tiếp tuyến của (S) . Mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm cố định nào dưới đây?

- A. $E(0; 3; -1)$ B. $F\left(\frac{1}{4}; \frac{-1}{2}; \frac{-1}{2}\right)$ C. $G(0; -1; 3)$ D. $H\left(\frac{3}{2}; 0; 2\right)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 12$ có tâm $I(1; 1; 1)$

Gọi $M(a; b; c)$ do $M \in (P): x - 2y + 2z + 11 = 0 \Leftrightarrow a - 2b + 2c + 11 = 0$

$$\Rightarrow IM^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2$$

Do AM là tiếp tuyến của (S) nên $AM^2 = IM^2 - R^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 - 12$

Khi đó ta có mặt cầu tâm M qua A, B, C có phương trình là:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 - 12$$

$$(ABC): \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 - 12 & (1) \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 12 & (2) \end{cases}$$

Khi đó

Khai triển (1), (2) và lấy (1) trừ (2) ta có được:

$$(ABC): (a-1)x + (b-1)y + (c-1)z - a - b - c - 9 = 0$$

Với điểm $E(0; 3; -1)$ ta có $3(b-1) - (c-1) - a - b - c - 9 = 0 \Leftrightarrow a - 2b + 2c + 11 = 0$

Nên (ABC) luôn qua điểm $E(0; 3; -1)$

Câu 50: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + x - 6$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(x^3 - 3x^2 - 9x + m)$ có đúng 6 điểm cực trị?

- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

Lời giải

Chọn B

$$y = f(x^3 - 3x^2 - 9x + m) \Rightarrow y' = (3x^2 - 6x - 9)f'(x^3 - 3x^2 - 9x + m)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x - 9 = 0 \\ x^3 - 3x^2 - 9x + m = 2 \\ x^3 - 3x^2 - 9x + m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \\ x^3 - 3x^2 - 9x = 2 - m \\ x^3 - 3x^2 - 9x = -3 - m \end{cases} (*)$$

Ta có

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ta có

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	5	-27	$+\infty$	

Để (*) có 6 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x = 2 - m \\ x^3 - 3x^2 - 9x = -3 - m \end{cases}$ có 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2 - m > 5 \\ -3 - m < 5 \end{cases} \\ \begin{cases} -3 - m < -27 \\ 2 - m > -27 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 < m < -3 \\ 24 < m < 29 \end{cases}$$