

Trắc nghiệm đúng sai (Khảo sát hàm số bậc 3)
 Thời gian làm bài: 40 phút (Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 + 2x^2 - x - 5$ có đồ thị là (C). Khi đó

*a) Đồ thị (C) có một điểm uốn.

*b) Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị.

*c) Đồ thị hàm số luôn có giao điểm với Ox .

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

Ta có, đồ thị hàm bậc 3 luôn có một điểm uốn. Vậy a) đúng.

Mặt khác, $y' = 3x^2 + 4x - 1$ luôn có hai nghiệm phân biệt vì $(3(-1) < 0)$.

Do đó, đồ thị luôn có 2 điểm cực trị. Vậy b) đúng.

Hơn nữa, đồ thị hàm bậc 3 luôn có ít nhất 1 giao điểm với Ox .

Vậy c) đúng.

đáp án d) Sai (vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$) :

Câu 2. Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 4$, trong đó m là tham số.

*a) Khi $m = 0$ thì đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; 4)$

b) Khi $m = 0$ thì đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $(1; -2)$.

*c) Để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ thì $m \leq 0$

d) Để đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng thì $m = k$ khi đó k là số lẻ

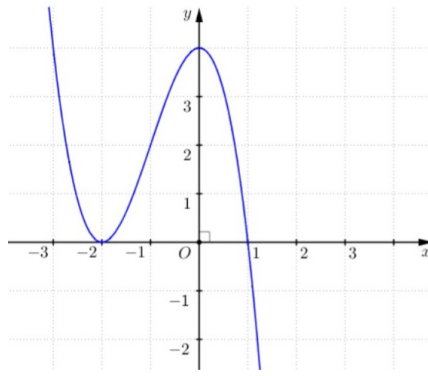
Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Bảng biến thiên hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 4$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$		
y	$+\infty$							$-\infty$

b) Đồ thị của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 4$



c) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' = -3x^2 - 6x + m \leq 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow m \leq 3x^2 + 6x = f(x)$

Hàm số $f(x) = 3x^2 + 6x$ liên tục trên $(0; +\infty)$

Ta có $f'(x) = 6x + 6 > 0, \forall x > 0$ và $f(0) = 0$. Từ đó ta được: $m \leq 0$.

d) Giả sử đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại ba điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng, suy ra $x_1 + x_3 = 2x_2$ và x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình: $x^3 + 3x^2 - mx - 4 = 0$ (*). Nên ta có: $x^3 + 3x^2 - mx - 4 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -3 \Rightarrow 3x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = -1$ thay vào (*) ta có được $m = 2$.

Với $m = 2 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = -1 \pm \sqrt{5}$

Ta thấy đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại ba điểm lập thành cấp số cộng

Câu 3. Cho hàm số: $y = \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 9x - 5)$ có đồ thị là (C).

*a) Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị

*b) Điểm đối xứng của đồ thị có tọa độ là $(1; -2)$

c) Trên đoạn $[4; 8]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số đạt được tại $x = 4$

d) Phương trình tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C) đi qua điểm $A\left(0; -\frac{7}{3}\right)$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) b) c) Bảng biến thiên hàm số

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$	

d) Ta có $y' = \frac{3}{8}(x^2 - 2x - 3) = \frac{3}{8}[(x - 1)^2 - 4] \geq \frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = -2$.

Vậy tiếp tuyến của đồ thị (C) có hệ số góc nhỏ nhất là: $y = \frac{3}{2}(x - 1) - 2 = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 - x + 2$

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

b) Hàm số có 2 điểm cực trị

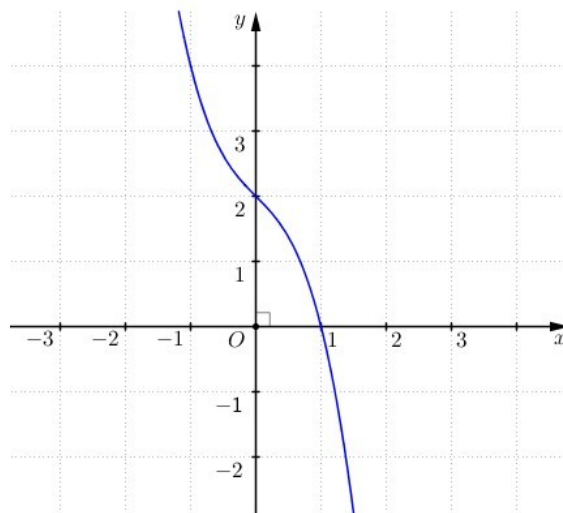
*c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;1]$ bằng 2

*d) Số nghiệm của phương trình: $|x^3 + x - 2| = m$ khi $m > 0$ là 2

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

Đồ thị hàm số



d) Xét đồ thị $(C'): y = g(x) = |x^3 + x - 2| = |f(x)|$. Khi đó số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của đồ thị (C') và đường thẳng $\Delta: y = m$.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$$

Ta có: suy ra

* Nếu $f(x) \geq 0$ (Tức là phần đồ thị (3) nằm trên trục Ox) thì (C') và (C) trùng nhau.

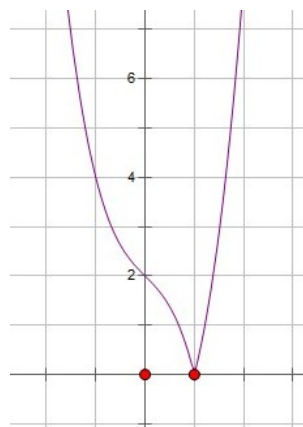
* Nếu $f(x) < 0$, khi đó mọi điểm M' thuộc (C') thì $M'(x; -f(x))$ còn M thuộc (3) thì $M(x; f(x))$ suy ra M và M' đối xứng nhau qua trục Ox hay là (3) và (C') đối xứng nhau qua trục Ox.

Cách vẽ:

B 1 : Giữ nguyên đồ thị (C) ứng với phần $f(x) \geq 0$ (Phần đồ thị nằm trên Ox).

B 2 : Lấy đối xứng qua trục Ox đồ thị (3) phần $f(x) < 0$ (Phần nằm phía dưới trục Ox).

Ta có đồ thị (C')



Dựa vào đồ thị (C') ta có :

• Nếu $m < 0 \Rightarrow \Delta$ và (C') không cắt nhau $\Rightarrow$ (1) vô nghiệm

- Nếu $m=0 \Rightarrow \Delta$ cắt (C') tại một điểm $\Rightarrow (1)$ có một nghiệm
- Nếu $m > 0 \Rightarrow \Delta$ cắt (C') tại hai điểm $\Rightarrow (1)$ có hai nghiệm.

Câu 5. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là (C)

*a) Điểm đối xứng của đồ thị (C) có tọa độ là (1;0)

*b) Đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

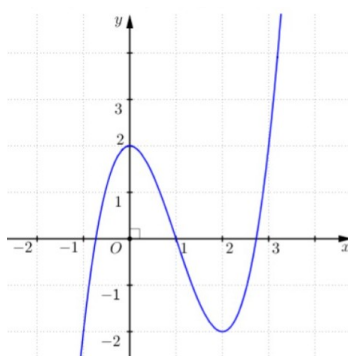
c) Có 4 giá trị nguyên của m để phương trình $x^3 - 3x^2 = m$ có ba nghiệm phân biệt.

*d) Có 3 giá trị nguyên của m để phương trình: $-|x|^3 + 3x^2 + m = 0$ (2) có 4 nghiệm phân biệt

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

Đồ thị hàm số

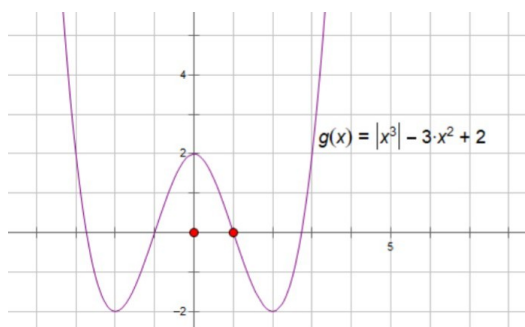


c) Ta có phương trình $x^3 - 3x^2 = m \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = m + 2$.

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = m + 2$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow -2 < m + 2 < 2 \Leftrightarrow -4 < m < 0$.

d) Ta có phương trình (2) $\Leftrightarrow |x|^3 - 3x^2 + 2 = m - 2$

$\Rightarrow$ số nghiệm của phương trình (2) chính là số giao điểm của hai đồ thị $\begin{cases} y = |x|^3 - 3x^2 + 2 & (C') \\ y = m - 2 & (\Delta) \end{cases}$. Dựa vào đồ thị (C'), ta có:



- $m - 2 < -2 \Leftrightarrow m < 0 \Rightarrow \Delta$ không cắt đồ thị (C') nên phương trình (2) vô nghiệm.
- $\begin{cases} m - 2 = -2 \\ m - 2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m > 4 \end{cases} \Rightarrow \Delta$ cắt (C') tại hai điểm phân biệt nên phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt.
- $m - 2 = 2 \Leftrightarrow m = 4 \Rightarrow \Delta$ cắt (C') tại ba điểm phân biệt nên phương trình (2) có ba nghiệm phân biệt.
- $-2 < m - 2 < 2 \Leftrightarrow 0 < m < 4 \Rightarrow \Delta$ cắt (C') tại bốn điểm phân biệt nên phương trình (2) có bốn nghiệm phân biệt.

Câu 6. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C).

*a) Đồ thị (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1

*b) Có 2 phương trình tiếp tuyến của (C), song song với đường thẳng $d: y = 36x + 1$.

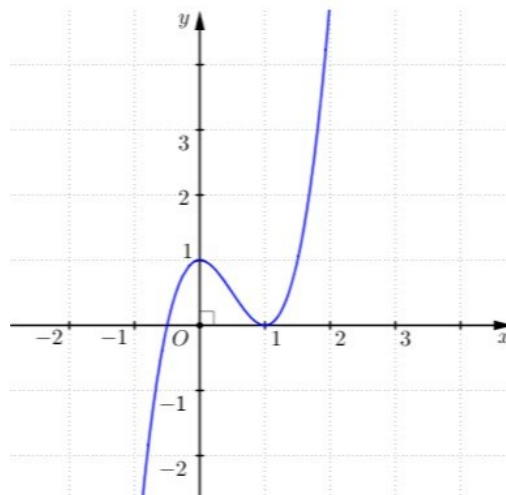
c) Có 1 giá trị nguyên của m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt: $|x|^3 - \frac{3}{2}x^2 + m = 0$.

d) Biết $m \in (a; b)$ thì phương trình: $|2x^2 - x - 1| = \frac{m}{|x-1|}$ có 4 nghiệm phân biệt khi đó $a + b = 2$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

Đồ thị hàm số (C)



b) Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có: $y'(x_0) = 36 \Leftrightarrow x_0^2 - x_0 - 6 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 3, x_0 = -2$

• $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -27 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = 36x + 45$

• $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 28 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = 36x + 80$.

c) Phương trình $\Leftrightarrow 2|x|^2 - 3x^2 + 1 = -2m + 1$, số nghiệm của phương trình là số giao điểm của hai đồ thị:

$$\begin{cases} (C'): y = 2|x|^2 - 3x^2 + 1 \\ \Delta: y = -2m + 1 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị (C') ta có $0 < -2m + 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{2}$ là những giá trị cần tìm.

d) Điều kiện: $x \neq 1$

Phương trình $\Leftrightarrow |2x^3 - 3x^2 + 1| = m$, số nghiệm của phương trình là số giao điểm của hai đồ thị

$$\begin{cases} (C_1): y = |2x^3 - 3x^2 + 1| \\ d: y = m \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị (C_1) suy ra:

- $m < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm
- $m = 0 \Rightarrow$ phương trình có một nghiệm (loại nghiệm $x = 1$)
- $0 < m < 1 \Rightarrow$ phương trình có đúng bốn nghiệm
- $m = 1 \Rightarrow$ phương trình có đúng ba nghiệm
- $m > 1 \Rightarrow$ phương trình có đúng hai nghiệm.

Câu 7. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị là (C)

a) Đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

*b) Đồ thị (C) đối xứng qua điểm $I(a;b)$ khi đó $a+b=3$

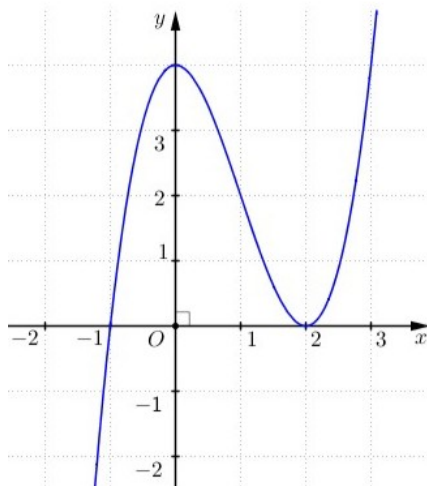
c) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=3$ đi qua điểm $A(0;23)$

*d) $y = -3x + 5$ là phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

Đồ thị hàm số



c) Phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm có hoành độ $x = 3$

$$y = y'(3)(x - 3) + y(3) \text{ hay } y'(3) = 3(3)^2 - 6(3) = 9, y(3) = 4$$

Suy ra phương trình d: $y = 9(x - 3) + 4 = 9x - 23$.

d) Hệ số góc của tiếp tuyến (D) của (C) là

$$k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 = 3(x_0 - 1)^2 - 3 \geq -3 \Rightarrow k = -3 \Leftrightarrow x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

(x_0 là hoành độ tiếp điểm của (D) với (C)), suy ra phương trình tiếp tuyến (D) cần tìm là:
 $y = -3(x - 1) + 2 = -3x + 5$

Câu 8. Cho hàm số $y = 2x^3 + (m - 1)x^2 + (m + 2)x + 1$ (1).

*a) Khi $m = 1$ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 1 điểm phân biệt

*b) Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $A(0;1)$

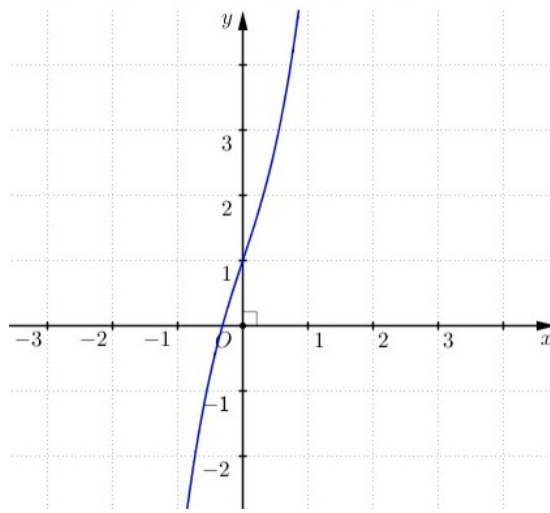
c) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = 9x - 3$ đi qua điểm $B(1;5)$

d) Có 1 giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại và điểm cực tiểu có hoành độ lớn hơn $\frac{1}{6}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Đồ thị hàm số khi $m = 1$



c) Gọi d là tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng (D): $y = 9x - 3$ thì hệ số góc của d :
 $k = 9 \Leftrightarrow y'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 6x_0^2 + 3 = 9 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$. (x_0 là hoành độ tiếp điểm của d với (C))

Phương trình tiếp tuyến d có dạng $y = k(x - x_0) + y(x_0)$.

Khi $x_0 = 1$ thì phương trình của d là $y = 9(x - 1) + 6 = 9x - 3$, phương trình này bị loại vì khi đó $d \parallel (D)$.

Khi $x_0 = -1$ thì phương trình d là $y = 9(x + 1) - 4 = 9x + 5$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 9x + 5$

d) $y' = 6x^2 + 2(m - 1)x + m + 2$

Đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại và điểm cực tiểu có hoành độ lớn hơn $\frac{1}{6}$.

$\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 lớn hơn $\frac{1}{6}$.

* Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 4 - 3\sqrt{3} < m < 4 + 3\sqrt{3}$ (a).

Khi đó hai nghiệm của phương trình $y' = 0$ là

$$x_1 = \frac{1 - m - \sqrt{m^2 - 8m - 11}}{6}, \quad x_2 = \frac{1 - m + \sqrt{m^2 - 8m - 11}}{6}$$

Vì $x_1 < x_2$ do đó x_1, x_2 đều lớn hơn $\frac{1}{6}$ khi và chỉ khi $\frac{1 - m - \sqrt{m^2 - 8m - 11}}{6} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 8m - 11} < -m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 - 3\sqrt{3} \vee m > 4 + 3\sqrt{3} \text{ (do (a))} \\ -m > 0 \\ m^2 - 8m - 11 < m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 - 3\sqrt{3} \\ m > -\frac{11}{8} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{11}{8} < m < 4 - 3\sqrt{3}.$$

Câu 9. Cho hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + 2(m+1)x^2 - 3(m+1)x + 1$ (1) (m là tham số).

*a) Khi $m = 0$ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

*b) Khi $m = 0$ đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị

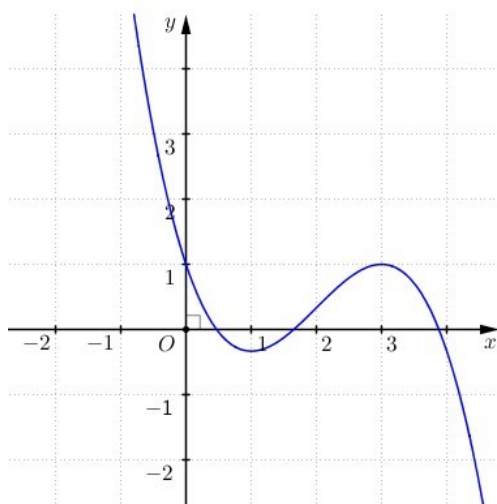
c) Để hàm số (1) nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $-1 \leq m \leq -\frac{1}{2}$

*d) Để trên đồ thị của hàm số (1) tồn tại một cặp điểm M, N (M khác N) đối xứng với nhau qua gốc tọa độ O khi và chỉ khi $m < -1$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

Đồ thị hàm số khi $m=0$.



c) $y' = -x^2 + 4(m+1)x - 3(m+1)$.

Hàm số (1) nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y' \leq 0 \Leftrightarrow \Delta' = 4(m+1)^2 - 3(m+1) \leq 0$

$$\Leftrightarrow (m+1)(4m+1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq -\frac{1}{4}.$$

d) Ta có M và N đối xứng qua gốc tọa độ $O \Leftrightarrow \begin{cases} M(x_0; y_0) \\ N(-x_0; -y_0) \end{cases}$.

M và N thuộc đồ thị của hàm số (1) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y_0 = -\frac{x_0^3}{3} + 2(m+1)x_0^2 - 3(m+1)x_0 + 1 & (2) \\ -y_0 = \frac{x_0^3}{3} + 2(m+1)x_0^2 + 3(m+1)x_0 + 1 & (3) \end{cases}$$

Cộng hai phương trình (2) và (3), vế với vế ta được: $4(m+1)x_0^2 + 2 = 0$ (4)

M, N tồn tại $\Leftrightarrow$ (4) có nghiệm $\Leftrightarrow 4(m+1) < 0 \Leftrightarrow m < -1$.

Câu 10. Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 4$, trong đó m là tham số.

a) Với $m=0$ thì đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

*b) Với $m=0$ thì đồ thị hàm số đối có điểm đối xứng là $I(-1; 2)$

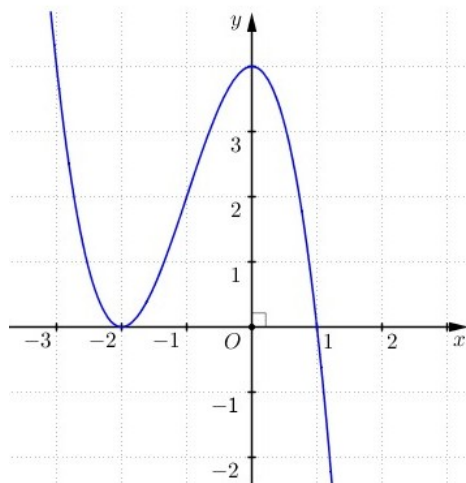
*c) Để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ thì $m \leq 0$

*d) Để đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng thì $m=a$, khi đó a là nghiệm của phương trình $\log_2(x+2)=2$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

Đồ thị hàm số



c) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$y' = -3x^2 - 6x + m \leq 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow m \leq 3x^2 + 6x = f(x)$$

Hàm số $f(x) = 3x^2 + 6x$ liên tục trên $(0; +\infty)$

Ta có $f'(x) = 6x + 6 > 0, \forall x > 0$ và $f(0) = 0$. Từ đó ta được: $m \leq 0$.

d) Giả sử đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại ba điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng, suy ra $x_1 + x_3 = 2x_2$ và x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình: $x^3 + 3x^2 - mx - 4 = 0$ (*). Nên có: $x^3 + 3x^2 - mx - 4 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -3 \Rightarrow 3x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = -1 \text{ thay vào (*) ta có được } m = 2.$$

$$\text{Với } m = 2 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = -1 \pm \sqrt{5}$$

Ta thấy đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại ba điểm lập thành cấp số cộng

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 11. Cho $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

a) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 2)$

*b) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị

*c) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

d) Phương trình $\sqrt{f(f(x)+1)+1} = f(x)+2$ có 6 nghiệm thực

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

$$\text{Đặt } t = f(x) + 1 \Rightarrow t = x^3 - 3x^2 + 2 \quad (*)$$

Suy ra $t' = 3x^2 - 6x$. Khi đó $t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$. Ta có, bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
t'	+	0	-	0	+
t	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Khi đó $\sqrt{f(f(x)+1)+1} = f(x)+2$ trở thành:

$$\sqrt{f(t)+1} = t+1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ f(t)+1 = t^2 + 2t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ t^3 - 4t^2 - 2t + 1 = 0 \end{cases}$$

Từ bảng biến thiên ta có

+) Với $t = a \in (-1; 0)$, phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt.

+) Với $t = b \in (0; 1)$, phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt khác 3 nghiệm trên.

+) Với $t = c \in (4; 5)$, phương trình (*) có 1 nghiệm khác 6 nghiệm trên.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm.

---HẾT---