Đề 56

HSG TOÁN 9 ĐIỆN BIÊN 2023-2024

Câu 1. (5,0 điểm) Cho biểu thức $P=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\frac{x-\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}-\frac{x-5}{x-\sqrt{x}-2}\right)$

1. Rút gọn biểu thức P
2. So sánh giá trị của biểu thức P với 4

Câu 2. (3,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\sqrt{2x+3}=\frac{8x^3+4x}{2x+5}$
2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+2xy^2+12y=0 \\ 8y^2+x^2=12 \end{cases}$

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $x^2+2(m+1)x+m^2+2m-8=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1-2x_2=1$.
2. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $xyz=x+y+z+2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+2}}$.

Câu 4. (6,0 điểm)

1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp (O). Các đường cao AM, BN, CP của tam giác cắt nhau tại H.
   a) Chứng minh: $MH.MA=MP.MN$
   b) Gọi Q là điểm bất kì trên cung nhỏ BC (Q khác B, C), E, F lần lượt là điểm đối xứng với Q qua AB và AC. Chứng minh ba điểm E, H, F thẳng hàng.
2. Cho ΔABC có $AB<AC$, D và E là các điểm lần lượt trên các cạnh AB, AC sao cho $BD=CE$, DE cắt BC tại K. Chứng minh rằng $\frac{AB}{AC}=\frac{KE}{KD}$

Câu 5. (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn: $x^2y^2+(x-2)^2+(2y-2)^2-2xy(x+2y-4)=5$
2. Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn điều kiện: $3c^2=ab+c(a+b)$ và $a-b$ là số nguyên tố. Chứng minh $8c+1$ là số chính phương.

---Hết---

Đáp án đề 56

Câu 1. (5,0 điểm) Cho biểu thức $P=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\frac{x-\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}-\frac{x-5}{x-\sqrt{x}-2}\right)$

1. Rút gọn biểu thức P

2. So sánh giá trị của biểu thức P với 4

Lời giải

1. Rút gọn biểu thức P
   ĐKXĐ: $x\ge 0;x\ne 4$.

$$P=\frac{x-x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}:\frac{x-4-x+5}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$¿\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}$$

2. So sánh giá trị của biểu thức P với 4
   $P-4=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}-4$ Với $x\ge 0;x\ne 4$
   $P-4=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2-4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
   $P-4=\frac{x+2\sqrt{x}+1-4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$
   $P-4=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\sqrt{x}}\ge 0$
   $\Rightarrow P\ge 4$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

Câu 2. (3,0 điểm)

3. Giải phương trình: $\sqrt{2x+3}=\frac{8x^3+4x}{2x+5}$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3+2xy^2+12y=0\\ 8y^2+x^2=12\end{cases}$

Lời giải

1. Giải phương trình: $\sqrt{2x+3}=\frac{8x^3+4x}{2x+5}$

   Điều kiện: $x\ge\frac{-3}{2}$.

$$\sqrt{2x+3}=\frac{8x^3+4x}{2x+5}\Leftrightarrow\left(2x+5\right)\sqrt{2x+3}=8x^3+4x$$

$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+3}+2\sqrt{2x+3}=8x^3+4x$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2x+3}\left(2x+3\right)+2\sqrt{2x+3}=8x^3+4x$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+3}\right)^3+2\sqrt{2x+3}=(2x)^3+2(2x)$$

Đặt $a=\sqrt{2x+3}, b=2x$. ĐK $(a\geq 0, b\geq -3)$

$$a^3+2a=b^3+2b \Leftrightarrow (a-b)\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}+2\right]=0 \Leftrightarrow a=b \text{ (Vì } \left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}+2>0)$$

Suy ra $\sqrt{2x+3}=2x \Leftrightarrow$ ¿ (tmĐK)

Vậy PT đã cho có nghiệm $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{4}$.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+2xy^2+12y=0 \\ 8y^2+x^2=12 \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} x^3+2xy^2+12y=0 \\ 8y^2+x^2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+2xy^2+(8y^2+x^2)y=0 \\ 8y^2+x^2=12 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+2xy^2+8y^3+x^2y=0 \\ 8y^2+x^2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2y)(4y^2-xy+x^2)=0 \\ 8y^2+x^2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \text{¿}$$

TH1: $\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ 8y^2+x^2=12 \end{cases} (1) \Rightarrow \begin{cases} x=-2y \\ 8y^2+4y^2=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2y \\ y=\pm 1 \end{cases}$

Với $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ (TMĐK)

TH2: $\begin{cases} x^2-xy+4y^2=0 \\ 8y^2+x^2=12 \end{cases} (2)$

$$x^2-xy+4y^2=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2-\frac{y^2}{4}+4y^2=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{15y^2}{4}>0$$

HPT (2) vô nghiệm

Vậy hệ phương trình (1) có nghiệm $(x;y)$ là $(-2;1);(2;-1)$.

Câu 3. (4,0 điểm)

3. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $x^2+2(m+1)x+m^2+2m-8=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1-2x_2=1$.
4. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $xyz=x+y+z+2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{y^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{z^2+2}}$.

Lời giải

1. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $x^2+2(m+1)x+m^2+2m-8=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1-2x_2=1$.

$$\Delta'=(m+1)^2-(m^2+2m-8)=9$$

Do $9>0\ \Delta' > ¿0$ Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

$$x=\frac{-(m+1)-3}{1}=-m-4\ hoặc\ x=\frac{-(m+1)+3}{1}=-m+2$$

TH1: Nếu $x_1=-m-4,x_2=-m+2$

Mà $x_1-2x_2=1$ nên $-m-4-2(-m+2)=1$

$m=9$

TH2: Nếu $x_2=-m-4,x_1=-m+2$

Mà $x_1-2x_2=1$ nên $-m+2-2(-m-4)=1\,m=-9$.

Vậy $m\in\{-9;9\}$.

2. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $xyz=x+y+z+2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+2}}$.

$$x+y+z+2=xyz \Leftrightarrow 1+y+xy+x+1+z+y+yz+1+x+z+xz$$

$$¿1+x+y+z+xy+xz+yz+xyz$$

$$\Leftrightarrow (1+x)(1+y)+(1+y)(1+z)+(1+z)(1+x)$$

$$¿(1+x)(1+y)(1+z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}=1$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky cho hai bộ số $(x;\sqrt{2})$ và

$$\left(1;\frac{1}{\sqrt{2}}\right):(x+1)^2=\left(x.1+\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\le(x^2+2)\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3.(x^2+2)}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\le\frac{\sqrt{6}}{2}.\frac{1}{x+1}$$

Tương tự $\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{y^2+2}}\le\frac{\sqrt{6}}{2}.\frac{1}{y+1}$

$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{z^2+2}}\le\frac{\sqrt{6}}{2}.\frac{1}{z+1}$

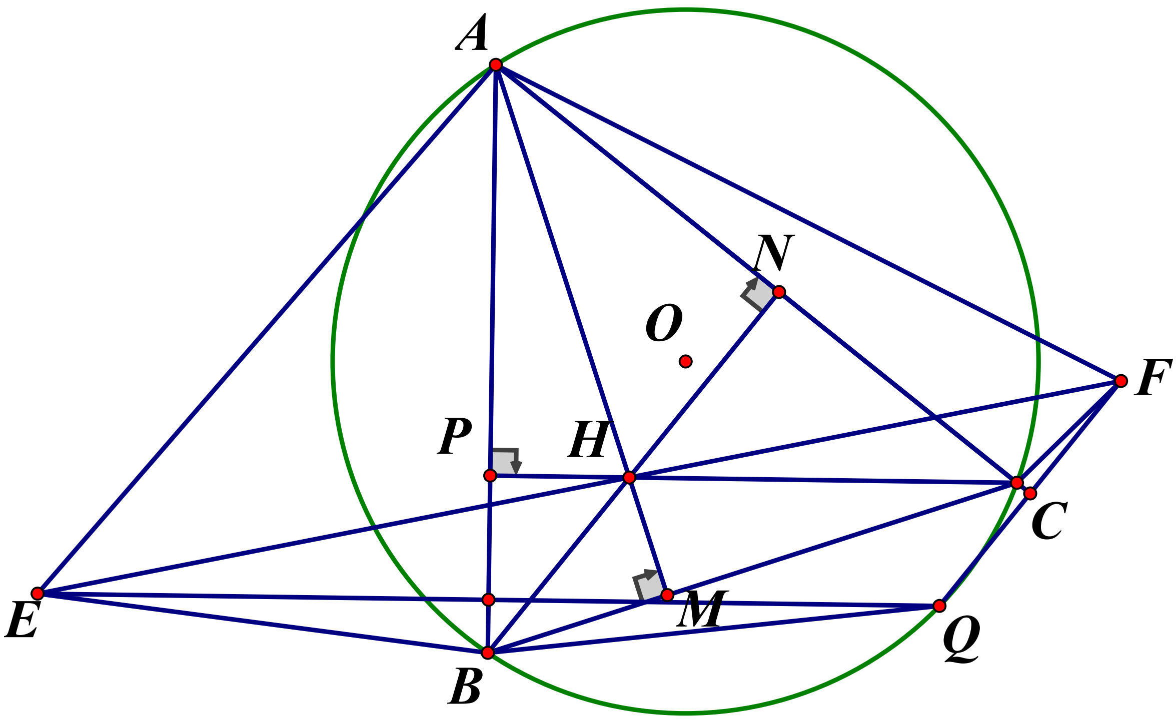
$\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+2}}\le\frac{\sqrt{6}}{2}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\right]$

$P\le\frac{\sqrt{6}}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=2\Rightarrow min\,P=¿\frac{\sqrt{6}}{2}¿$.

Câu 4. (6,0 điểm)

1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp (O). Các đường cao AM, BN, CP của tam giác cắt nhau tại H.
   a) Chứng minh: $MH.MA = MP.MN$
   b) Gọi Q là điểm bất kì trên cung nhỏ BC $(Q\, khác\, B, C)$, E, F lần lượt là điểm đối xứng với Q qua AB và AC. Chứng minh ba điểm E, H, F thẳng hàng.
2. Cho ΔABC có $AB < AC$, D và E là các điểm lần lượt trên các cạnh AB, AC sao cho $BD = CE$, DE cắt BC tại K. Chứng minh rằng $\frac{AB}{AC} = \frac{KE}{KD}$.

Lời giải



1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp (O). Các đường cao AM, BN, CP của tam giác cắt nhau tại H.
   c) Chứng minh: $MH.MA = MP.MN$
   Chứng minh được các tứ giác $PMCB$, $PNMB$ nội tiếp

suy ra $\widehat{HMP} = \widehat{PBN}$, $\widehat{PBN} = \widehat{HMN}$

$$\Rightarrow \widehat{HMP} = \widehat{HMN}$$

Tương tự tứ giác $ACMP$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MPH} = \widehat{MAN}$

Xét ΔMHP và ΔMAN có: $\Rightarrow \widehat{HMP} = \widehat{HMN}$, $\widehat{MPH} = \widehat{MAN}$

Suy ra ΔMHP đồng dạng với ΔMNA

Suy ra $\frac{MH}{MN} = \frac{MP}{MA} \Rightarrow MH.MA = MP.MN$

   d) Gọi Q là điểm bất kì trên cung nhỏ BC $(Q\, khác\, B, C)$, E, F lần lượt là điểm đối xứng với Q qua AB và AC. Chứng minh ba điểm E, H, F thẳng hàng.

Ta có $\widehat{AEB}=\widehat{AQB}$(Tính chất đối xứng). $\widehat{AQB=¿¿}$ $\widehat{ACB}=180°-¿$ $\widehat{MHN}=180°-¿$ $\widehat{AHB}$

$\Rightarrow \widehat{AQB}+\widehat{AHB}=180°$.

Suy ra tứ giác $\widehat{AHBE}$ nội tiếp.

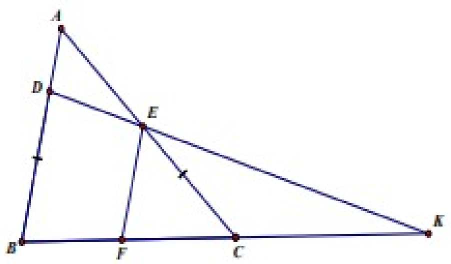
Chứng minh tương tự ta có tứ giác $\widehat{AHCF}$ nội tiếp.

Vì tứ giác $\widehat{AHBE}$ nội tiếp, tứ giác $\widehat{AHCF}$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{AHE}=\widehat{ABE}=\widehat{ABQ}=180°-\widehat{ACQ}=180°-\widehat{ACF}=180°-\widehat{AHF}$$

$$\Rightarrow \widehat{AHE}+\widehat{AHF}=180°. \textit{Suy ra 3 điểm } E\,;H\,;F \textit{ thẳng hàng}$$

3. Cho ΔABC có $AB<AC$, D và E là các điểm lần lượt trên các cạnh AB, AC sao cho $BD=CE$, DE cắt BC tại K . Chứng minh rằng $\frac{AB}{AC}=\frac{KE}{KD}$



Vẽ $\frac{EF}{AB}, F\in BC$

Xét ΔKDB có $\frac{EF}{DB}$, ta có $\frac{KE}{KD}=\frac{EF}{BD}$ (hệ quả của ĐL Talet) (1)

Xét ΔCAB có $\frac{EF}{AB}$, ta có $\frac{CE}{AC}=\frac{EF}{AB}\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{EF}{CE}$

Mà $BD=CE$(gt) do đó $\frac{AB}{AC}=\frac{EF}{BD}(2)$

Từ (1) và (2) ta có $\frac{AB}{AC}=\frac{KE}{KD}$.

Câu 5. (2,0 điểm)

3. Tìm tất cả các cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn:
$x^2y^2+(x-2)^2+(2y-2)^2-2xy(x+2y-4)=5$
4. Cho ba số tự nhiên a,b,c thỏa mãn điều kiện: $3c^2=ab+c(a+b)$ và $a-b$ là số nguyên tố. Chứng minh $8c+1$ là số chính phương.

Lời giải

1. Tìm tất cả các cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn:
$x^2y^2+(x-2)^2+(2y-2)^2-2xy(x+2y-4)=5$

$$x^2y^2+(x-2)^2+(2y-2)^2-2xy(x+2y-4)=5$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2+x^2-4x+4+4y^2-8y+4-2x^2y-4xy^2+8xy=5$$

$\Leftrightarrow y^2(x^2-4x+4)+(x^2-4x+4)-2y(x^2-4x+4)=1$

$\Leftrightarrow (x^2-4x+4)(y^2+1-2y)=1 \Leftrightarrow (x-2)^2(y-1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-2)(y-1)=1\\(x-2)(y-1)=-1\end{array}\right.$

TH1: $\begin{cases}x-2=1\\y-1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$

TH2: $\begin{cases}x-2=-1\\y-1=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$

TH3: $\begin{cases}x-2=1\\y-1=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}$

TH4: $\begin{cases}x-2=-1\\y-1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

Vậy cặp số $(x;y)$ nguyên là: $(3;2);(1;0);(3;0);(1;2)$.

2. Cho ba số tự nhiên a,b,c thỏa mãn điều kiện: $3c^2=ab+c(a+b)$ và $a-b$ là số nguyên tố. Chứng minh $8c+1$ là số chính phương.

Từ $3c^2=ab+c(a+b) \Rightarrow 4c^2=c^2+ab+ac+bc=(a+c)(b+c)$

Đặt $(a+c;b+c)=d \Rightarrow \begin{cases}a+c\,\vdots\,d\\b+c\,\vdots\,d\end{cases} \Rightarrow a-b\,\vdots\,d$

Do $a-b$ là số nguyên tố nên $d=a-b$ hoặc $d=1$

+) Nếu d =1 thì a c + và b c + là hai số nguyên tố cùng nhau mà $4c^2=(a+c)(b+c)$ là số chính phương

$\Rightarrow a+c$ và $b+c$ là hai số chính phương

Đặt $a+c=m^2;b+c=n^2(m,n\in Z)$

$\Rightarrow m^2-n^2=a-b$ là số nguyên tố $\Rightarrow m^2-n^2$ là số nguyên tố hay $(m-n)(m+n)$ là số nguyên tố $\Rightarrow$ $m-n=1 \Rightarrow m=n+1$

$\Rightarrow 4c^2=(a+c)(b+c)=m^2n^2 \Rightarrow 2c=mn$

$\Rightarrow 8c+1=4mn+1=4n(n+1)+1=(2n+1)^2$ là số chính phương

+)Nếu $a-b=d$ thì $a+c=(a-b)x, b+c=(a-b)y$

$$a-b=(a-b)x-(a-b)y=(a-b)(x-y)$$

$\Rightarrow x-y=1 \Rightarrow x=y+1$

$\Rightarrow 4c^2 = (a+c)(b+c) = (a-b)^2 xy = y(y+1)$

$\Rightarrow y(y+1)$ là số chính phương, y và y+1 là hai số tự nhiên liên tiếp nên $y(y+1)=0 \Rightarrow c=0$

$\Rightarrow 8c+1=1$ là số chính phương