**HƯỚNG DẪN CHẤM**

**ĐỀ THI OLYMPIC KHU VỰC DHBB**

**NĂM HỌC 2022 - 2023**

**Môn Toán – Lớp 10**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **1** | Tìm tất cả các đa thức hệ số thực thỏa mãn và  (1) | **4,0** |
| Thay bởi ta được  (2)  Lấy (1) trừ (2) vế theo vế ta được  Suy ra hoặc . | 1,0 |
| Thay bởi vào (1) ta được , kết hợp với ta loại trường hợp . | 1,0 |
| Xét trường hợp , thay bởi ta được .  Đặt . Khi đó và  . | 1,0 |
| Do đó nếu là nghiệm của thì là một nghiệm khác lớn hơn của , suy ra có vô số nghiệm. Dẫn đến hay . Thử lại thấy thỏa.  Vậy chỉ có một đa thức duy nhất thỏa mãn bài toán là . | 1,0 |
| **2** | Cho là các số thực dương thỏa  Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của . | **4,0** |
| Từ giả thiết suy ra và .  Đặt ; khi đó và | 1,0 |
| Ta có , suy ra nên do .  Ta sẽ chứng minh | 1,0 |
| BĐT bên trái tương đương với đúng. Dấu bằng xảy ra khi . | 1,0 |
| BĐT bên phải tương đương với đúng. Dấu bằng xảy ra khi .  Vậy và . | 1,0 |
| **3** | Cho tam giác không cân nội tiếp đường tròn . Đường tròn thay đổi đi qua cắt các cạnh lần lượt tại điểm thứ hai là . Đường tròn ngoại tiếp tam giác cắt đường tròn tại điểm thứ hai là . cắt lại lần lượt tại . Gọi là giao điểm của và .  a) Chứng minh rằng thuộc một đường thẳng cố định khi đường tròn thay đổi. | **2,0** |
|  |  |
| Gọi là tâm đường tròn .  Xét tam giác , do các bộ bốn điểm và đồng viên nên và cùng đối song với . Suy ra . | 1,0 |
| Tương tự CQ , suy ra là hai đáy của hình thang cân. Dẫn đến và .  Mặt khác do đối song với trong tam giác nên . Suy ra thẳng hàng. Vậy thuộc đường thẳng cố định. | 1,0 |
| b) Gọi lần lượt là trung điểm của . Chứng minh rằng là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác . | **2,0** |
| Ta có theo thứ tự là trục đẳng phương của các cặp đường tròn và , và , và . Do đó đồng quy tại một điểm .  Gọi là giao điểm của và ; theo thứ tự là giao điểm của với . Khi đó .  Mà là trung điểm của nên theo hệ thức Maclaurin ta có . Hoàn toàn tương tự, ta có .  Suy ra , do đó đồng viên. | 1,0 |
| Gọi là trung điểm . Khi đó thẳng hàng vì cùng nằm trên đường thẳng Gauss-Newton của tứ giác toàn phần .  Từ đồng viên suy ra . Mặt khác và là trung điểm nên theo hệ thức Newton ta có . Suy ra là tiếp tuyến của đường tròn . | 1,0 |
| **4** | Cho hai số nguyên dương và sao cho và là hai số chính phương. Tìm giá trị nhỏ nhất của số nhỏ nhất trong hai số chính phương đó. | **4,0** |
| Giả sử với là các số nguyên dương. Ta giải được . Do đó | 1,0 |
| Ta chứng minh  Ta có , nếu thì . Mặt khác  , mâu thuẫn. Do đó . | 1,0 |
| Ta có , nếu thì . Mặt khác  , mâu thuẫn. Do đó . | 1,0 |
| Do đó . Với thì  nên đáp án bài toán là . | 1,0 |
| **5** | Tại mỗi đỉnh của một đa giác đều cạnh () người ta đặt một bóng đèn. Ban đầu chỉ có đúng một bóng đèn được bật, mỗi lượt ta thay đổi trạng thái của các bóng đèn (bật thành tắt, tắt thành bật) với điều kiện vị trí các bóng đèn được chọn là các đỉnh của một đa giác đều. Chứng minh rằng không tồn tại để tất cả các bóng đèn có thể được bật cùng lúc sau hữu hạn lượt. | **4,0** |
| Giả sử sau hữu hạn lượt thì tất cả các bóng đèn đều bật. Ta xem các bóng đèn là các căn bậc của đơn vị, bóng đèn thứ () là  Khi đó nếu là các đỉnh của một đa giác đều thì | 1,0 |
| Không mất tính tổng quát, giả sử bóng đèn sáng ban đầu là . Đặt  với và .  Ban đầu ta có và khi các bóng đèn bật hết thì .  Giả sử ta chọn bóng để thay đổi trạng thái, nếu đang tắt thì còn nếu đang bật thì .  Như vậy điều kiện cần để bật tất cả bóng đèn là tồn tại bộ () sao cho  . (1) | 1,0 |
| Và ta có nên (1) tương đương với  Vì nên . (2)  Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được  với . Như vậy là nghiệm của đa thức | 1,0 |
| Ta có bất khả quy vì bất khả quy theo tiêu chuẩn Eisenstein. Do đó  là đa thức tối tiểu của . Suy ra . Do đó , dẫn đến (mâu thuẫn).  Vậy tất cả bóng đèn không thể cùng được bật sau hữu hạn lượt. | 1,0 |

**Người ra đề:** *Trương Trần Tấn Phước, Trần Thị Phương Thảo,*

*Tổ Toán, Trường THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm (Quảng Nam)*

Phone: 0969043321

Mail: truongtrantanphuoc@gmail.com