

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 8 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2016-2017

Câu 1. (2 điểm)

Cho
$$P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$$

- a) Rút gọn P
- b) Tìm giá trị nguyên của a để P nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (2 điểm)

- a) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9
- b) Tìm các giá trị của x để biểu thức:

$$P = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$$
 có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Câu 3. (2 điểm)

- a) Giải phương trình:
$$\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$$
- b) Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Câu 4. (3 điểm)

Cho tam giác đều ABC , gọi M là trung điểm của BC. Một góc $\angle M$ bằng 60° quay quanh điểm M sao cho 2 cạnh Mx, My luôn cắt cạnh AB và AC lần lượt tại D và E. Chứng minh:

- a) $BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4}$
- b) DM, EM lần lượt là tia phân giác của các góc BDE và CED
- c) Chu vi tam giác ADE không đổi

Câu 5. (1 điểm)

Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

$$a^3 - 4a^2 - a + 4 = (a - 1)(a + 1)(a - 4)$$

$$a^3 - 7a^2 + 14a - 8 = (a - 2)(a - 1)(a - 4)$$

Nêu ĐKXD: $a \neq 1; a \neq 2; a \neq 4$

Rút gọn $P = \frac{a+1}{a-2}$

b)

$$P = \frac{a-2+3}{a-2} = 1 + \frac{3}{a-2};$$

ta thấy P nguyên khi $a-2$ là ước của 3, mà $U(3) = \{-1; 1; -3; 3\}$, từ đó tìm được $a \in \{-1; 3; 5\}$

Câu 2.

a) Gọi 2 số phải tìm là a và b , ta có $a+b$ chia hết cho 3.

Ta có:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)[(a^2 + 2ab + b^2) - 3ab] = (a+b)[(a+b)^2 - 3ab]$$

Vì $a+b$ chia hết cho 3 nên $(a+b)^2 - 3ab$ chia hết cho 3

Do vậy $(a+b)[(a+b)^2 - 3ab]$ chia hết cho 9

b) $P = (x-1)(x+6)(x+2)(x+3) = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) = (x^2 + 5x)^2 - 36$

Ta thấy $(x^2 + 5x)^2 \geq 0$ nên $P = (x^2 + 5x)^2 - 36 \geq -36$

Do đó
$$\text{Min} P = -36 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

Câu 3. a)

$$x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$$

$$x^2 + 11x + 30 = (x + 6)(x + 5)$$

$$x^2 + 13x + 42 = (x + 6)(x + 7)$$

ĐKXD: $x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = 2 \end{cases}$$

b) Đặt $b + c - a = x > 0; c + a - b = y > 0; a + b - c = z > 0$

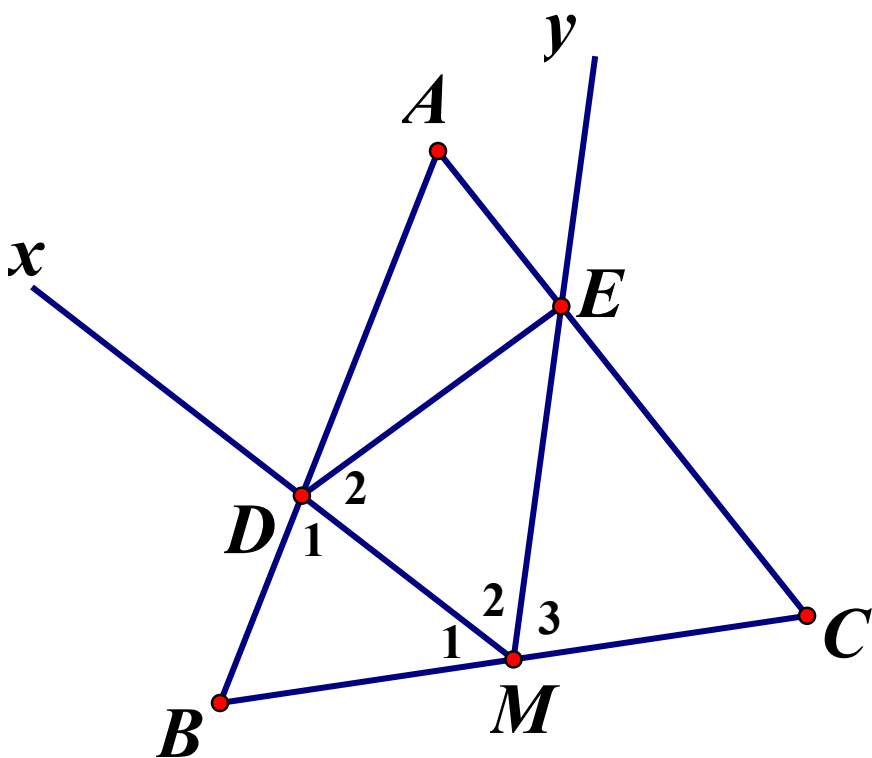
từ đó suy ra $a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2};$

Thay vào ta được

$$A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$$

Từ đó suy ra $A \geq \frac{1}{2}(2+2+2)$ hay $A \geq 3$

Câu 4.



a) Trong tam giác BDM ta có: $\angle D_1 = 120^\circ - \angle M_1$

Vì $\angle M_2 = 60^\circ$ nên ta có: $\angle M_3 = 120^\circ - \angle M_1$

Suy ra $\angle D_1 = \angle M_3$. Chứng minh $\triangle BMD \sim \triangle CEM$ (1)

$$\frac{BD}{BM} = \frac{CM}{CE}$$

Suy ra $\frac{BD}{BM} = \frac{CM}{CE}$, Từ đó $BD \cdot CE = BM \cdot CM$

$$\text{Vì } BM = CM = \frac{BC}{2}, \text{ nên ta có: } BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4}$$

$$\frac{BD}{CM} = \frac{MD}{EM}$$

b) Từ (1) suy ra $\frac{BD}{CM} = \frac{MD}{EM}$

Chứng minh $\triangle BMD \sim \triangle MED \Rightarrow \angle D_1 = \angle D_2$, do đó DM là tia phân giác $\angle BDE$

Chứng minh tương tự ta có: EM là tia phân giác $\angle CED$

c) Gọi H, I, K là hình chiếu của M trên AB, DE, AC .

Chứng minh $DH = DI, EI = EK$

Tính chu vi tam giác bằng $2AH$ - không đổi

Câu 5.

Gọi các cạnh của tam giác vuông là x, y, z trong đó cạnh huyền là z

(x, y, z là các số nguyên dương)

Ta có: $xy = 2(x + y + z)(1)$ và $x^2 + y^2 = z^2(2)$

Từ (2) suy ra $z^2 = (x + y)^2 - 2xy$, thay (1) vào ta có:

$$z^2 = (x + y)^2 - 4(x + y + z)$$

$$z^2 + 4z = (x + y)^2 - 4(x + y)$$

$$z^2 + 4z + 4 = (x + y)^2 - 4(x + y) + 4$$

$$(z + 2)^2 = (x + y - 2)^2$$

Suy ra $z + 2 = x + y - 2 \Rightarrow z = x + y - 4$; thay vào (1) ta được:

$$xy = 2(x + y + x + y - 4)$$

$$xy - 4x - 4y = -8$$

$$(x - 4)(y - 4) = 8 = 1.8 = 2.4$$

Từ đó ta tìm được các giá trị của x, y, z là:

$$(x; y; z) \in \{ (5; 12; 13); (12; 5; 13); (6; 8; 10); (8; 6; 10) \}$$