**Ví dụ 2.** Giải phương trình  (ĐH khối B – 2010)

**- Phân tích.** Dễ dàng nhẩm được một nghiệm  của phương trình. Điều này dẫn đến ý tưởng chọn phương pháp nhân liên hợp cho khai cuộc. Bằng sự khéo léo thêm bớt ta biến đổi phương trình về dạng:







Màn khai cuộc và trung cuộc có vẻ như thuận lợi. Nhưng vấn đề nảy sinh đó là giải quyết phương trình  như thế nào? Nhìn lại điều kiện bài toán, ta thấy rằng các số hạng trong vế trái phương trình  đều không âm. Do đó, giải pháp hiệu quả nhất là ta sẽ chọn phương pháp đánh giá để chứng minh phương trình  vô nghiệm. Lời giải cho bài toán trên như sau:

**Lời giải**

Điều kiện  Lúc đó, phương trình tương đương với:







Với điều kiện 

Ta có     nên phương trình  vô nghiệm. Do đó,  là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

**- Bình luận.** Như vậy qua lời giải trên, sau khi thực hiện phép nhân liên hợp chúng ta mới chỉ ra được một nghiệm của phương trình. Ngay lúc này, ta có thể tự đặt ra câu hỏi: Liệu phương trình còn nghiệm nào khác nữa không? Câu trả lời nằm ở phương trình . Mà phương trình  lại có hình thức phức tạp hơn phương trình ban đầu, nếu có nghiệm thì phải giải như thế nào đây?

Ta cần chú ý một điều rằng, khi giải phương trình, ta luôn cố gắng đưa phương trình về một phương trình khác đơn giản hơn có thể tìm được nghiệm. Chính vì thế, chúng ta có quyền nghi ngờ phương trình  sẽ không có nghiệm thực. Và công cụ nào sẽ giúp ta làm sang tỏ nghi ngờ đó. Cụ thể trong lời giải trên ta đã sử dụng phương pháp đánh giá xuất phát từ điều kiện bài toán để khẳng định phương trình  vô nghiệm.

Như vậy, sự kết hợp giữa phương pháp nhân liên hợp và phương pháp đánh giá bằng bất đẳng thức đã giúp chúng ta giải quyết phương trình một cách nhanh chóng.

Bài tập tương tự:

1. Giải phương trình 

2. Giải phương trình 

**Ví dụ 3.** Tìm các số thực x thỏa mãn phương trình 

**- Phân tích.** Kiểm tra bằng máy tính CaSiO ta tìm được 2 nghiệm của phương trình là   Tương tự bài 1, ý tưởng xuất phát đó là sử dụng phương pháp nhân liên hợp nhằm tạo ra nhân tử  Khi đó phương trình tương đương với: 

Khó khăn của ta bây giờ là vẫn phải giải quyết phương trình  như thế nào. Với điều kiện bài toán ta cũng sẽ sự dụng phương pháp đánh giá để hứng minh phương trình này vô nghiệm. Từ đó ta có lời giải.

**Lời giải**

Điều kiện:  Nhận thấy  không thỏa mãn phương trình nên ta chỉ cần giải phương trình trong điều kiện  Khi đó, phương trình tương đương với 

 

Với điều kiện bài toán,  

Do đó, phương trình đã cho có hai nghiệm  

**- Bình luận.** trong lời giải trên nhiều học sinh dễ mắc sai lầm ở chỗ không kiểm tra trường hợp  có phải là nghiệm của phương trình không. Ngoài ra phương trình còn có thể đưa về dạng phương trình đẳng cấp như sau: 

**Ví dụ 4.** Giải phương trình: 

**- Phân tích.** Phương trình này có hình thức khá cồng kềnh , cồng kềnh bởi chính các căn thức xuất hiện ở mẫu số. Điều đó đã khiến cho phép quy đồng của chúng ta có thể gặp trở ngại. Cho nên thay vì thực hiện phép quy đồng các biểu thức mà ta không mong muốn này, chúng ta sẽ sử dụng phép nhân liên hợp để khử căn thức ở mẫu số. Theo kinh nghiệm của chúng tôi, khi đứng trước một bài toán có hình thức phức tạp như thế này, chúng tôi nghĩ ắt hẳn tác giả muốn gửi gắm một điều gì đó đặc biệt đằng sau những cánh cửa với cái vẻ ngoài phức tạp này. Và chìa khóa để mở cánh cửa dầu tiên chính là sự quan sát tinh tế mối quan hệ giữa các con số trong phương trình. Cụ thể hơn, đó là các đẳng thức:

 



Sau phép nhân liên hợp đầu tiên phương trình tương đương với:



Nhẩm được nghiệm  ta nghĩ ngay đến biện pháp nhân liên hợp lần thứ hai.

Ta thu được phương trình: 

Sự khó khăn lớn nhất sau khi sử dụng phương pháp nhân liên hợp là tìm nghiệm của vế sau howacj chứng minh vế sau vô nghiệm. Và nếu đã biết nó không có nghiệm thì ta sẽ dựa vào điều kiện bài toán để đánh giá nó vô nghiệm. Cụ thể trong lời giải sau đây:

**Lời giải**

Điều kiện:   Khi đó, phương trình đã cho tương đương với







Chú ý rằng, 

Suy ra 

Do đó,  là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

**- Bình luận.** Đôi khi việc đánh giá vế sau vô nghiệm không phải đơn giản, ta cần phải có một ít sự tinh tế mới có các đánh giá hiệu quả.

Ngoài ra, phương trình  có thể được giải quyết bằng phương pháp đặt ẩn phụ đưa về việc giải hệ phương trình. Ý tưởng này dành cho độc giả tự tìm hiểu.

**Ví dụ 5.** Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện  Tương tự như trên, ta nhẩm được một nghiệm  của phương trình. Khi đó phương trình đã cho tương đương với







Mặt khác, ta có 

Lại có, theo bất đẳng thức AM – GM thì 

Do vậy, ta có  

Điều này chứng tỏ phương trình  vô nghiệm.

Kết luận, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất 

**- Bình luận.** Vấn đề khó khăn trong lời giải đó là chứng minh phương trình  vô nghiệm. Ở lời giải trên ta đã sử dụng bất đẳng thức AM – GM (Cauchuy) một cách hợp lý để giải quyết triệt để đoạn cuối của bài toán. Tuy nhiên, đó không phải là cách đánh giá duy nhất. Chẳng hạn, ta có thể đánh giá như sau:

Ta có  

Mặt khác ta lại có  

Do đó,  vô nghiệm.

**Ví dụ 6.** Giải phương trình 

**- Phân tích.** Quan sát phương trình ta nhận thấy rằng:

  Do đó ta nghĩ đến biện pháp ghép đôi để thực hiện phép nhân liên hợp. Khi đó ta được:



 



Phương trình  ta dễ dàng giải quyết. Vấn đề ở phương trình  ta sẽ giải quyết nó bằng phương pháp gì? Câu trả lời được thể hiện trong lời giải sau đây:

**Lời giải**

Ta có



 



Phương trình  cho ta hai nghiệm 

Để ý,  nên dẫn đến vế trái phương trình  luôn dương, tức là phương trình  vô nghiệm.

**- Bình luận.** Trong lời giải trên, nếu không có sự phối hợp sử dụng phương pháp đánh giá, thì một phương pháp nhân liên hợp không đủ sức để giải quyết trọn vẹn phương trình. Tuy nhiên, phương trình có thể giải quyết theo phương pháp hàm số: Ta có hàm số  là hàm đồng biến theo t , nên từ phương trình ta có   

**Ví dụ 7.** Giải phương trình 

**- Phân tích.** Đối với những phương trình có nhiều loại dấu căn thức như phương trình trên thì phương pháp nhân lũy thừa hầu như bất lực. Trong trường hợp này, ta nhẩm được 1 nghiệm , nên định hướng sẽ sử dụng phương pháp nhâ liên hợp cho khai cuộc. Sau phép nhân liên hợp ta thu được:

 





Việc còn lại bây giờ của ta là phải giải quyết phương trình . Với hình thức phức tạp của phương trình , kết hợp việc kiểm tra nghiệm bằng máy tính CaSiO ta sẽ đánh giá để khẳng định phương trình  vô nghiệm.

**Lời giải**

Với điều kiện  ta có  





Từ điều kiện  suy ra   

Do đó, phương trình  vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm 

**- Bình luận.** Như vậy, qua các bài toán trên, chúng ta nhìn ra được lợi ích của sự kết hợp hai phương pháp nhân liên hợp và phương pháp đánh giá chưa nào?

Sử dụng phương pháp nhân liên hợp ta sẽ chỉ ra được nghiệm của phương trình, cò phương pháp đánh giá sẽ chứng minh được tính duy nhất nghiệm hay vô nghiệm của một phương trình. Điều khó khăn nhất hi thực hiện sự kết hợp giữa hai phương pháp này để giải quyết triệt để phương trình vô tỷ và kỉ năng đánh giá.

**Ví dụ 8.** Giải phương trình 

**- Phân tích.** Kiểm tra bằng máy tính CaSiO ta tìm được nghiệm  của phương trình. Với ý tưởng nhân liên hợp ta có được: 



Vấn đề lúc này ta sẽ giải quyết phương trình sau như thế nào:



Phương trình có hình thức rất phức tạp, tuy nhiên ta có:

 Và sau đó, để việc xử lý phương trình được thuận tiện ta sẽ sử dụng phép đặt ẩn  Khi đó, phương trình được chuyển thành:  

Từ đó ta có lời giải:

**Lời giải**

Ta có   nên phương trình luôn xác định với mọi số thực x. Viết lại phương trình đã cho dưới dạng:







Xét phương trình 



Đặt 

Suy ra  

- Với   

- Với   

Thử lại phương trình đã cho ta có nghiệm thỏa mãn là 

**- Bình luận.** Trong lời giải trên ta đã kết hợp ba phương pháp để giải quyết phương trình, đó là phương pháp nhân liên hợp, phương pháp đặt ẩn phụ và phương pháp nâng lũy thừa. Rõ ràng nếu thiếu một trong ba phương pháp này thì ta sẽ không thể giải quyết được bài toán hoàn toàn. Chú ý phương trình 

Ta cũng có thể giải quyết bằng phương pháp hàm số với  Nhưng để hàm  đơn điệu khi gắn   hay , ta cần chú ý thu hẹp điều kiện các biến.

**Ví dụ 9.** Tìm tất cả các giá trị  thỏa mãn phương trình sau: 

**- Phân tích.** Dễ dàng nhận thấy  là một nghiệm của phương trình trên. Bằng ý tưởng nhân liên hợp để tạo ra nhân tử  ta được:







Bài toán sẽ được giải quyết hoàn toàn nế phương trình sau được giải quyết: 

Chú ý rằng giả thiết tại sao lại cho  Do đó, kết hợp với phương pháp đánh giá ta sẽ giải quyết phương trình như sau:

**Lời giải**

Với  thì các biểu thức tổng phương trình luôn xác định. Thực hiện trục căn thức cho phương trình, ta được: 







Do  nên 

Suy ra 

Nhưng do  nên  Vì vậy dấu bất đẳng thức sẽ đổi chiều, hay là: 

Mặt khác hiển nhiên ta có:



Từ  và  ta có:  

Do đó, phương trình  vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là 

**- Bình luận.** Bài toán trên thực tế là khá khó. Do đó, chúng ta cần phải linh hoạt khi thực hiện nhân liên hợp và kết hợp kĩ năng đánh giá cần bám sát giả thiết  Tuy nhiên, liệu ta có thể mở rộng tập giá trị x trong  được không? Nếu giải phương trình trên trong tập số thực thì ta sẽ như thế nào? Sau đây, chúng ta có thể tham khảo một hướng giải quyết khác của phương trình. Với sự kết hợp giữa hai phương pháp nhân liên hợp, phương pháp đặt ẩn phụ và phương pháp nâng lũy thừa, ta có thể giải quyết phương trình trong  như sau:

Biến đổi phương trình về dạng: 

Thực hiện trục căn thức (Kiểm tra điều kiện cho hai mẫu khác 0). Ta có phương trình tương đương: với  

Ngoài nghiệm  ta còn giải quyết hệ phương trình:

  

Bằng phương pháp nâng lũy thừa đưa phương trình về bậc 2. Từ đó ta có thêm 1 nghiệm 

**Ví dụ 10.** Giải phương trình 

**- Phân tích.** Kiểm tra bằng máy tính CaSiO ta tìm được nghiệm khá lẻ của phương trình. Mặt khác, phương pháp nâng lũy thừa và phương pháp đặt ẩn phụ lại không thể giúp gì cho ta trong trường này. Do đó, ta sẽ dùng hệ số bất định để thực hiện phép nhân liên hợp.

Khi đó, ta có được: 



Và chắc chắn đến đây phương trình vẫn chưa được giải quyết hoàn toàn. Nếu có sự kết hợp sử dụng đánh giá bằng phương pháp hàm số thì liệu phương trình có được giải quyết hoàn toàn không? Chúng ta cùng xem xét lời giải sau:

**Lời giải**

Điều kiện: 

Khi đó, phương trình trở thành: 



Xét  ta có: 

  

Ta có bảng biến thiên:

|  |  |
| --- | --- |
|   |      |
|   |   0   |
|   |    |

 kết hợp với  

 

Vậy phương trình đã cho có nghiệm  

**- Bình luận.** Như vậy, bằng sự kết hợp giữa phương pháp nhân liên hợp và phương pháp hàm số, ta đã tìm được tất cả các nghiệm của phương trình. Ngoài kỉ năng đánh giá bằng bất đẳng thức, thì phương pháp hàm số cũng là một phương pháp mạnh để khẳng định một phương trình có duy nhất nghiệm hoặc vô nghiệm nhờ vào tính đơn điệu của hàm số. Do đó, sự kết hợp giữa phương pháp nhân liên hợp và phương pháp hàm số cũng là một công cụ rất mạnh để giải quyết phương trình vô tỷ.