

HƯỚNG DẪN CHẤM
PHÒNG GD&ĐT ĐĂKR'LẤP **ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN – LẦN 2**
MÔN: TOÁN 9

(Đề thi có 01 trang)

NĂM HỌC: 2023 – 2024

Ngày thi: 12/11/2023

Thời gian: 150 phút (không kể giao đề)

Bài 1. (4 điểm)

1. Tính giá trị của biểu thức: $A = \sqrt{1 - \sqrt{26 - \sqrt{640}}} + \sqrt{27 + \sqrt{810}} - \sqrt{30 + \sqrt{1000}}$

2. Rút gọn biểu thức: $B = \left(\frac{x\sqrt{x} + 3\sqrt{3}}{x - \sqrt{3x} + 3} - 2\sqrt{x} \right) \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{3 - x} \right)$ với $x \geq 0; x \neq 3$

Hướng dẫn

STT	Nội dung	Điểm
Bài 1	1. Tính giá trị của biểu thức: $ \begin{aligned} A &= \sqrt{1 - \sqrt{26 - \sqrt{640}}} + \sqrt{27 + \sqrt{810}} - \sqrt{30 + \sqrt{1000}} \\ &= \sqrt{1 - \sqrt{26 - 8\sqrt{10}}} + \sqrt{27 + 9\sqrt{10}} - \sqrt{30 + 10\sqrt{10}} \\ &= \sqrt{1 - \sqrt{(4 - \sqrt{10})^2}} + \sqrt{9(3 + \sqrt{10})} - \sqrt{10(3 + \sqrt{10})} \\ &= \sqrt{1 - 4 + \sqrt{10}} + 3\sqrt{3 + \sqrt{10}} - \sqrt{10}\sqrt{3 + \sqrt{10}} \\ &= \sqrt{\sqrt{10} - 3} - \sqrt{3 + \sqrt{10}}(\sqrt{10} - 3) \\ &= \sqrt{\sqrt{10} - 3} - \sqrt{(\sqrt{10} + 3)(\sqrt{10} - 3)}\sqrt{\sqrt{10} - 3} \\ &= \sqrt{\sqrt{10} - 3} - \sqrt{\sqrt{10} - 3} = 0 \end{aligned} $	2,0 điểm
	2. Rút gọn biểu thức: $B = \left(\frac{x\sqrt{x} + 3\sqrt{3}}{x - \sqrt{3x} + 3} - 2\sqrt{x} \right) \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{3 - x} \right)$ với $x \geq 0; x \neq 3$ $ \begin{aligned} B &= \left(\frac{x\sqrt{x} + 3\sqrt{3}}{x - \sqrt{3x} + 3} - 2\sqrt{x} \right) \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{3 - x} \right) \\ &= \left(\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{3})(x - \sqrt{3x} + 3)}{x - \sqrt{3x} + 3} - 2\sqrt{x} \right) \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{-(\sqrt{x} + \sqrt{3})(\sqrt{x} - \sqrt{3})} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3} - 2\sqrt{x}}{-\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{x} + \sqrt{3}}{-\sqrt{x} + \sqrt{3}} = 1 \end{aligned} $	2.0 điểm

Bài 2. (6 điểm)

- Giải phương trình: $\sqrt{x^2+10x+21}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+7}-6$
- Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $C=n^2-n+13$ là số chính phương.
- Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng p^2-1 chia hết cho 24.

Hướng dẫn

STT	Nội dung	Điểm
Bài 2	1. Giải phương trình: $\sqrt{x^2+10x+21}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+7}-6$ ĐK: $x \geq -3$. Ta có: $\sqrt{x^2+10x+21}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+7}-6$ $\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(x+7)}-3\sqrt{x+3}-2\sqrt{x+7}+6=0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x+3}(\sqrt{x+7}-3)-2(\sqrt{x+7}-3)=0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+3}-2)=0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+7}-3=0 \\ \sqrt{x+3}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases} \text{ (nhận)}$ Vậy phương trình có nghiệm là: $x=1$; $x=2$.	2,0 điểm
	2. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $C=n^2-n+13$ là số chính phương. Đặt $C=n^2-n+13=k^2 (k \in \mathbb{N})$. Ta có: $4(n^2-n+13)=4k^2$ $\Leftrightarrow (4n^2-4n+1)-(2k)^2=-51$ $\Leftrightarrow (2n-1)^2-(2k)^2=-51$ $\Leftrightarrow (2n+2k-1)(2n-2k-1)=-51$ Vì $n, k \in \mathbb{N}$ nên $2n+2k-1 \geq 1$. Do đó ta chỉ có các trường hợp sau: $\begin{cases} 2n+2k-1=-1 \\ 2n-2k-1=51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4n=52 \\ 4k=-52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=13 \\ k=-13 \text{ (loại)} \end{cases}$ $\begin{cases} 2n+2k-1=1 \\ 2n-2k-1=-51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4n=-48 \\ 4k=52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-12 \text{ (loại)} \\ k=13 \end{cases}$ $\begin{cases} 2n+2k-1=3 \\ 2n-2k-1=-17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4n=-12 \\ 4k=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-3 \text{ (loại)} \\ k=5 \end{cases}$ $\begin{cases} 2n+2k-1=17 \\ 2n-2k-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4n=12 \\ 4k=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=3 \\ k=5 \end{cases}$ $\begin{cases} 2n+2k-1=51 \\ 2n-2k-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4n=52 \\ 4k=52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=13 \\ k=13 \end{cases}$ Vậy $n=3$; $n=13$.	2,0 điểm

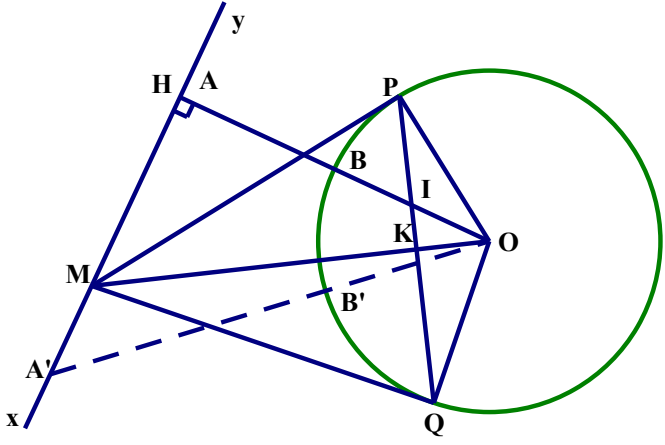
3. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2 - 1$ chia hết cho 24.	2.0 điểm
Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3. Đặt $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$ với $k \in \mathbb{N}$.	
Với $p = 3k + 1$ thì $p^2 - 1 = (p+1)(p-1) = (3k+2).3k : 3$	
Với $p = 3k + 2$ thì $p^2 - 1 = (p+1)(p-1) = (3k+3)(3k+1) = 3(k+1)(3k+1) : 3$	
Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ. Đặt $p = 2n + 1$, với $n \in \mathbb{N}$	
Ta có: $p^2 - 1 = (p+1)(p-1) = (2n+2)2n = 4n(n+1) : 8$ (vì $n(n+1) : 2$)	
Vì $p^2 - 1 : 3$; $p^2 - 1 : 8$; $UCLN(3,8) = 1$ nên $p^2 - 1 : (3.8)$ hay $p^2 - 1 : 24$	

Bài 3. (6 điểm)

- Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng xy cố định nhưng không có điểm chung với đường tròn $(O; R)$. Từ một điểm M tùy ý trên xy kẻ hai tiếp tuyến MP và MQ đến đường tròn (O) . Từ O hạ OH vuông góc với xy . Dây cung PQ cắt OH tại I và cắt OM tại K .
 - Chứng minh năm điểm M, P, Q, H, O cùng thuộc một đường tròn.
 - Chứng minh: $OI.OH = OK.OM = R^2$.
 - Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên xy thì vị trí của điểm I luôn luôn cố định.
 - Tìm trên đường thẳng xy một điểm A và trên đường tròn (O) một điểm B sao cho độ dài đoạn thẳng AB nhỏ nhất.
- Qua đỉnh A của hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 2023, vẽ một đường thẳng cắt cạnh BC tại M và cắt đường thẳng CD tại I . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{2023^2}.$$

Hướng dẫn

STT	Nội dung	Điểm
Bài 3	1. Vẽ hình đúng. (0,5 điểm)  a) Vì MP, MQ là	4,0 điểm

$4x^2 - 2xy + 6x + y + 3 = 0$$\Leftrightarrow 4x^2 - 1 - 2xy + y + 6x - 3 + 7 = 0$$\Leftrightarrow (2x - 1)(2x + 1) - y(2x - 1) + 3(2x - 1) = -7$$\Leftrightarrow (2x - 1)(2x + 1 - y + 3) = -7$$\Leftrightarrow (2x - 1)(2x - y + 4) = -7$ Vì x; y nguyên và 7 là số nguyên tố nên ta chỉ có các trường hợp sau: <table><tr><td>2x - 1</td><td>1</td><td>- 7</td><td>- 1</td><td>7</td></tr><tr><td>2x - y + 4</td><td>- 7</td><td>1</td><td>7</td><td>- 1</td></tr><tr><td>x</td><td>1</td><td>- 3</td><td>0</td><td>4</td></tr><tr><td>y</td><td>13</td><td>5</td><td>11</td><td>13</td></tr></table> Vậy các cặp số nguyên (x; y) cần tìm là: (1; 13), (- 3; 5). (0; 11), (4; 13)	2x - 1	1	- 7	- 1	7	2x - y + 4	- 7	1	7	- 1	x	1	- 3	0	4	y	13	5	11	13	
2x - 1	1	- 7	- 1	7																	
2x - y + 4	- 7	1	7	- 1																	
x	1	- 3	0	4																	
y	13	5	11	13																	
2. Cho ba số $x, y, z > 0$ và thỏa mãn $x + y + z \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = \frac{x^3}{y + z} + \frac{y^3}{z + x} + \frac{z^3}{x + y}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô – Si cho ba số dương $\frac{x^3}{y + z}; \frac{y + z}{4}; \frac{1}{2}$ được: $\frac{x^3}{y + z} + \frac{y + z}{4} + \frac{1}{2} \geq 3\sqrt{\frac{x^3}{y + z} \cdot \frac{y + z}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{2}x$ Tương tự: $\frac{y^3}{z + x} + \frac{z + x}{4} + \frac{1}{2} \geq 3\sqrt{\frac{y^3}{z + x} \cdot \frac{z + x}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{2}y$; $\frac{z^3}{x + y} + \frac{x + y}{4} + \frac{1}{2} \geq 3\sqrt{\frac{z^3}{x + y} \cdot \frac{x + y}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{2}z$ Suy ra $P + \frac{x + y + z}{2} + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}(x + y + z) \Rightarrow P \geq \frac{3}{2}(x + y + z) - \frac{1}{2}(x + y + z) - \frac{3}{2}$ $\Rightarrow P \geq x + y + z - \frac{3}{2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = 1$. Vậy GTNN của P bằng $\frac{3}{2}$ khi $x = y = z = 1$.	2.0 điểm																				

----- Hết -----

Chú ý: 1. Nếu thí sinh làm bài bằng cách khác đúng thì vẫn cho điểm tương đương.

2. Điểm toàn bài không được làm tròn.