VMO 2009 – Đề thi, lời giải và bình luận

Trần Nam Dũng, Trường Đại học Khoa học tự nhiên, ĐHQG TP Hồ Chí Minh

Kỳ thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn Toán năm 2009 (VMO 2009) diễn ra vào ngày 25/2/2009 với sự tham gia của gần 360 thí sinh đến từ các tỉnh thành. Kết quả 131 thí sinh được giải, trong đó có 1 giải nhất, 22 giải nhì, 62 giải ba và 46 giải khuyến khích, đạt tỷ lệ 34%. 42 thí sinh có điểm từ 15 trở lên được triệu tập để tham dự kỳ thi chọn đội tuyển diễn ra vào nửa cuối tháng 4. Đề thi năm nay được đánh giá là dễ hơn nhưng cũng có những bài toán thực sự khó khăn hơn.

Từ 7 bài xuống 5 bài

Sau 2 năm thí điểm đề thi 7 bài làm trong vòng 180 phút, với kết quả tương ứng các năm 2007, 2008 là 13% và 8% số thí sinh đoạt giải. Bộ giáo dục, theo đề nghị của các chuyên gia đã quyết định chọn phương án đề thi gồm 5 bài toán làm trong vòng 180 phút. Có thể nói, đây là một thay đổi quan trọng giúp kết quả của kỳ thi tốt hơn 2 năm trước.

Một thay đổi khác cũng ảnh hưởng không nhỏ đến kết quả kỳ thi, đó là việc phân bố điểm cho các phân môn được ấn định như sau: Các bài toán thuộc 3 phân môn Giải tích, Đại số, Hình học là các phân môn mà đa số các thí sinh được chuẩn bị tốt hơn, quen hơn sẽ có tổng điểm là 14, điểm vừa đủ để đạt giải 3. Trong khi đó, các bài toán thuộc phần số học và tổ hợp thuộc dạng toán lạ và khó đối với học sinh, chỉ có 6 điểm. Cách phân bố điểm này rõ ràng là có lợi cho số đông các thí sinh, khiến khả năng đạt giải của họ cao hơn.

Tuy nhiên, cũng cần phải nói rằng cách phân bố này cũng gây đôi chút bất lợi cho các thí sinh có sở trường về số học và tổ hợp, đặc biệt trong bối cảnh kỳ thi VMO năm nay (khi các bài toán thuộc phần số học và tổ hợp khó hơn hẳn so với ba phần còn lại). Có thể sẽ có một vài thí sinh làm được bài số học nhưng lại bỏ bài hình hoặc bài đại số. Hoặc có thí sinh dồn sức cho bài tổ hợp nhưng lại sơ suất ở các bài dễ hơn. Kết quả là số điểm đạt được ở bài khó không bù được với số điểm bị mất ở bài dễ.

Có thể là vẫn còn có những vấn đề cần bàn cãi, tranh luận, làm thế nào để có được một đề thi tốt, phân loại được thí sinh và khuyến khích được phong trào nhưng nhìn chung, đề thi năm nay đã đáp ứng được những yêu cầu cơ bản nhất: Số thí sinh đạt giải đông hơn; có đủ cơ cấu giải nhất, nhì, ba; đề thi có những bài cơ bản nhưng cũng có những bài khó và hay.

Ba bài cơ bản

Ba bài toán đầu, gồm bài Đại số, bài Giải tích và bài Hình học là ba bài toán rất cơ bản, mà theo ngôn ngữ của các thầy là bài "kính biếu". Tuy nhiên, theo thông tin từ ban chấm thi thì không phải thí sinh nào cũng nhận "quà biếu". Nhiều thí sinh "bó tay" với bài 1. Nhiều thí sinh không làm được bài hình hoặc bỏ câu b) của bài này. Thậm chí với bài 2, bài được coi là dễ nhất của kỳ thi, cũng có thí sinh không làm được hoặc làm được cũng tốn khá nhiều thời gian. Dưới đây, chúng tôi sẽ không trình bày lời giải chi tiết mà chỉ bình luận một số vấn đề xung quanh đề bài và lời giải.

Câu 1. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2x)} = \dfrac{2}{9} \end{cases}$$

Bình luận. Rõ ràng ý đồ của các thầy ra đề là muốn kiểm tra kiến thức cơ bản của học sinh về bất đẳng thức, cụ thể là:

"Chứng minh rằng với $x, y \in [0,1]$ ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+xy}}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$ (*)".

Bài này khá quen thuộc, xuất hiện trong nhiều đề thi cũng như là bổ đề của nhiều bài toán khác (chẳng hạn đề thi Nga năm 2000), nếu ra thẳng bất đẳng thức thì quá lộ nên các thầy đã thay đổi đi một chút, đưa nó vào trong một hệ phương trình. Tất nhiên là nếu đã có $x = y$ rồi thì thay vào phương trình thứ hai, mọi việc quá đơn giản.

Phương pháp chứng minh bất đẳng thức (*) cũng khá đa dạng. Chúng ta điểm qua các phương pháp đó.

1. Bình phương hai vế của bất đẳng thức, ta được bất đẳng thức tương đương

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{2}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{1+y^2} \le \frac{4}{1+xy}$$

Theo bất đẳng thức CBS, ta có

$$\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2} \ge 1+xy \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}} \le \frac{2}{1+xy}$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2} \le \frac{2}{1+xy} \quad (**)$$

là xong

Nhưng (**) qua các phép biến đổi đại số đơn giản, tương đương với

$$\frac{(1-xy)(x-y)^2}{(1+xy)(1+x^2)(1+y^2)} \ge 0$$

đúng do $x, y \in [0,1]$.

2. Ta có thể làm khác đi một chút bằng cách áp dụng CBS ngay từ đầu:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)^2 \le 2\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\right) \le \frac{4}{1+xy}$$

(theo (**))

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Rõ ràng trong hai cách chứng minh trên, ta chỉ cần điều kiện $-1 < xy \le 1$.

3. Giữ y cố định, xét hàm số $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+xy}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ trên $[0,1]$.

Ta có

$$f'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{y}{(1+xy)^{3/2}} = \frac{x^2(1+xy)^3 - y^2(1+x^2)^3}{(1+x^2)^{3/2}(1+xy)^{3/2}(x(1+xy)^{3/2}+y(1+x^2)^{3/2}}$$

Như vậy dấu của $f'(x)$ là dấu của

$$x^2(1+xy)^3 - y^2(1+x^2)^3 = (x-y)(x+y+3x^2y - x^5y^2)$$

Do x, y thuộc $[0,1]$ nên thừa số thứ hai luôn dương, như thế $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương tại y, suy ra y là điểm cực tiểu, suy ra $f(x) \geq f(y) = 0$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

4. Còn một cách khác để chứng minh bất đẳng thức dạng này, đó là đặt $x = e^u, y = e^v$ với $u, v \in (-\infty, 0]$ đưa bất đẳng thức về dạng $f(u) + f(v) \leq 2f(\dfrac{u+v}{2})$

Trong đó $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

Tính đạo hàm bậc hai, ta được $f(x) = \dfrac{e^{2x}(e^{2x}-2)}{(1+e^{2x})^{5/2}} < 0$ (do $x \leq 0$).

Vậy hàm $f(x)$ lõm trên $(-\infty, 0]$ và ta có điều cần chứng minh.

Câu 2. *Cho dãy số (x_n) xác định bởi*

$$x_1 = 1/2, x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2}$$

với mọi $n \geq 2$.

Chứng minh rằng dãy (y_n) với $y_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k^2}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$ và tìm giới hạn đó.

Bình luận. Đây là bài toán dễ nhất của kỳ thi. Việc chứng minh dãy (x_n) tăng và không bị chặn trên (tức là có giới hạn bằng $+\infty$) là quá đơn giản. Chẳng hạn có thể đánh giá:

$$x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} \geq \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 2x_{n-1} + 1} + x_{n-1}}{2} = x_{n-1} + \frac{1}{2}$$

Việc tính giới hạn của y_n chỉ có thể thực hiện được nếu ta tìm được công thức tường minh cho tổng $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k^2}$. Mà điều này chỉ có thể thực hiện thông qua sai phân. Ta biến đổi tương đương

$$x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} \Leftrightarrow 2x_n - x_{n-1} = \sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow 4x_n^2 - 4x_nx_{n-1} + x_{n-1}^2 = x_{n-1}^2 + 4x_{n-1} \Leftrightarrow x_n^2 - x_nx_{n-1} = x_{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n^2}$$

Sai phân đã được tìm ra, từ đó dễ dàng tìm được $y_n = 6 - \dfrac{1}{x_n}$ và giới hạn cần tìm bằng 6.

Quá đơn giản, không một chút lắt léo, từ việc nghĩ ra lời giải đến trình bày lời giải đều đơn giản. Tuy nhiên trên thực tế thì bày này cũng làm khó cho không ít thí sinh. Không kể các bạn không giải được, các bạn giải được cũng hao tổn khá nhiều công lực ở bài này. Nhiều bạn cứ máy móc, khi đã tìm được công thức cho y_n rồi vẫn cứ tiếp tục đi chứng minh (y_n) tăng và bị chặn trên. Nhiều bạn không biết khái niệm giới hạn bằng ∞!

Bài toán sẽ trở nên khó hơn nếu đề bài yêu cầu tính $\lim_{n\to} \dfrac{x_n}{n}$. Khi đó sẽ phải vận dụng định lý trung bình Cesaro hoặc dùng đánh giá chặt hơn:

$$x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} < \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1} + 4} + x_{n-1}}{2} = \frac{x_{n-1} + 2 + x_{n-1}}{2} = x_{n-1} + 1.$$

$$x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} > \frac{x_{n-1} + 2 - \frac{2}{x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} = x_{n-1} + 1 - \frac{1}{x_{n-1}}$$

Đề toán sẽ hay và thú vị hơn nhưng đổi lại sẽ không còn dễ chịu với đại đa số các thí sinh. Trong bối cảnh làm 5 bài toán trong vòng 180 phút, có lẽ các thầy đã tránh phương án này.

Câu 3. *Trong mặt phẳng cho hai điểm A, B ($A \neq B$). C là một điểm di động trên mặt phẳng sao cho $\angle ACB = \alpha$, ($0° < \alpha < 180°$). Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại D, E, F. Các đường thẳng AI, BI cắt đường thẳng EF lần lượt tại M và N.*

a) Chứng minh rằng đoạn MN có độ dài không đổi;

b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua một điểm cố định.

Bình luận. Bài hình học phẳng này khá đơn giản, lời giải chỉ dùng kiến thức hình học lớp 9 (tứ giác nội tiếp) và một chút lượng giác. Cấu hình bài toán cũng quen thuộc và có nhiều tính chất hay xung quanh. Ví dụ M và N chính là chân các đường cao hạ từ B, A xuống AI, BI tương ứng. Ngoài ra M, N nằm trên các đường trung bình của tam giác ABC (Từ đó suy ra $\angle MKN = \angle MDN$, trong đó K là trung điểm của AB, suy ra tứ giác $AKDN$ nội tiếp, suy ra kết luận phần b) của bài toán). Cũng có thể nhận thấy rằng đường tròng ngoại tiếp tam giác DMN chính là đường tròn Euler của tam giác IAB và do đó sẽ đi qua trung điểm của AB. Nhiều thí sinh đã nhận ra điều này và kết luận luôn. Theo kinh nghiệm của chúng tôi thì các thí sinh nên thận trọng trong việc sử dụng các kết quả như vậy. Tốt nhất là nên dựa vào kết quả để chứng minh lại.

Cuối cùng, chúng tôi xin đưa ra một số đề thi Olympic của Nga liên quan đến cấu hình bài toán 3.

1. (Olympic Nga, vòng 4, lớp 11, 1994) Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC và AC tại các điểm E, F và D tương ứng. Các đường thẳng AO và CO cắt đường thẳng EF tại N và M. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN, điểm O và điểm D cùng nằm trên một đường thẳng.

2. (Olympic Nga, vòng 5, lớp 9, 1997) Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC và CA tại các điểm M, N và K tương ứng. Đường thẳng đi qua đỉnh A và song song với NK cắt đường thẳng MN tại điểm D. Đường thẳng qua A và song song với MN cắt đường thẳng NK ở điểm E. Chứng minh rằng đường thẳng DE chứa đường trung bình của tam giác ABC.

3. (Olympic Nga, vòng 5, lớp 10, 1997) Đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AC, AB và BC tại các điểm K, M và N tương ứng. Trung tuyến BB_1 của tam giác cắt MN tại điểm D. Chứng minh rằng điểm O nằm trên đường thẳng DK.

4. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh CA, AB tương ứng tại E, F; BI cắt EF tại M. Chứng minh rằng M nằm trên đường trung bình của tam giác ABC.

Hai bài phân loại thí sinh

Trong khi ba bài đầu tiên rất cơ bản và có phần dễ thì hai bài toán còn lại khá khó chịu. Để làm được hai bài này, ngoài việc hiểu đề bài, tìm được hướng đi đúng, còn cần phải có thời gian. Vì thế, hai bài toán này chỉ dành cho những thí sinh đã "tiêu diệt gọn" ba bài đầu trong vòng 1,5-2 tiếng đầu tiên. Hơn nữa, vẻ đơn giản bề ngoài có thể làm nhiều thí sinh sa lầy.

Câu 4. *Cho ba số thực a, b, c thoả mãn điều kiện: với mỗi số nguyên dương n, $a^n + b^n + c^n$ là số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên p, q, r sao cho a, b, c là 3 nghiệm của phương trình $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.*

Bình luận. Đây là một bài toán khá lạ và khó chịu. Để giải nó cần đến cả kiến thức về đại số và số học. Không có gì cao siêu (định lý Viet, các phép biến đổi đại số trên các biểu thức đối xứng, tính chất đơn giản $2c \in \mathbb{Z}$ và $2c^2 \in \mathbb{Z}$ suy ra $c \in \mathbb{Z}$) nhưng lại gây khó khăn cho các thí sinh.

Chúng ta hãy bắt đầu bằng trường hợp "2 chiều" của bài toán: "*Cho hai số thực a, b thoả mãn điều kiện: với mỗi số nguyên dương n, $a^n + b^n$ là số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên p, q sao cho a, b là 2 nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$.*"

Theo định lý Viet, rõ ràng điều phải chứng minh tương đương với việc chứng minh $a + b$ và ab là số nguyên. $a + b$ hiển nhiên nguyên theo điều kiện đề bài. Ngoài ra ta có $2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ là số nguyên.

Ta có thể tiếp tục dùng hằng đẳng thức này để suy ra $2a^2b^2$ cũng là số nguyên:

$$2a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (a^4 + b^4)$$

Đến đây ta dùng bổ đề đơn giản sau:

Bổ đề. *Nếu x là số thực sao cho $2x$ và $2x^2$ là các số nguyên thì x là số nguyên.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $2x = k$ nguyên, nhưng x không nguyên. Khi đó k là số nguyên lẻ: $k = 2m + 1$. Suy ra $x = m + 1/2$. Nhưng khi đó $2x^2 = 2(m + 1/2)^2 = 2m^2 + 2m + 1/2$ không nguyên. Mâu thuẫn. Vậy điều giả sử là sai, tức là x nguyên.

Như vậy, theo bổ đề thì ab nguyên và ta suy ra điều phải chứng minh. Từ phép chứng minh ta cũng suy ra kết quả mạnh hơn: Nếu $a + b, a^2 + b^2, a^4 + b^4$ là các số nguyên thì a, b là 2 nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ với p, q là các số nguyên nào đó (và do đó $a^n + b^n$ nguyên với mọi n nguyên dương). Điều đó cũng có nghĩa là ta chỉ cần dùng giả thiết của bài toán đến $n = 4$. Ví dụ $a = \sqrt{2}/2, b = -\sqrt{2}/2$ cho thấy $k = 4$ là giá trị nhỏ nhất thoả mãn điều kiện: Nếu a, b là các số thực thoả mãn điều kiện $a^n + b^n$ là số nguyên với mọi $n = 1, 2, ..., k$ thì $a^n + b^n$ nguyên với mọi n nguyên dương.

Quay trở lại với lời giải của bài toán VMO 2009. Ta sẽ thấy rằng kỹ thuật không có gì thay đổi, tuy có phức tạp hơn đôi chút. Rõ ràng ta chỉ cần chứng minh $a + b + c, ab + bc + ca$ và abc nguyên. Theo điều kiện đề bài thì $a + b + c$ là số nguyên. Tiếp theo ta có

$$2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

là số nguyên.

Tương tự như lời giải trên, ta muốn chứng minh rằng $2(ab + bc + ca)^2$ cũng là số nguyên. Từ đó dùng bổ đề suy ra $ab + bc + ca$ là số nguyên. Điều này phức tạp hơn đôi chút vì đẳng thức tương tự

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - (a^4 + b^4 + c^4)$$

Chưa cho ta kết quả mong muốn, vì

$$2(ab + bc + ca)^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4abc(a + b + c) \quad (1)$$

Mà ta chưa chứng minh được abc nguyên. Để xử lý điều này, ta lại sử dụng một hằng đẳng thức quen thuộc

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \quad (2)$$

Từ đây, do $a+b+c$, $a^2+b^2+c^2, a^3+b^3+c^3$ và $2(ab+bc+ca)$ là số nguyên nên ta suy ra $6abc$ là số nguyên (ta nhân (2) với 2!). Từ đó, nhân (2) với 3 ta thu được

$$6(ab+bc+ca)2=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+12abc(a+b+c)$$

là số nguyên.

Áp dụng cách chứng minh như bổ đề nêu trên, ta suy ra $ab+bc+ca$ là số nguyên. Từ đây, thay vào (2) ta có $3abc$ là số nguyên.

Tiếp theo, ta sử dụng hằng đẳng thức tương tự (2)

$$a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2=(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)$$

với chú ý $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ là số nguyên ta suy ra $6a^2b^2c^2$ là số nguyên. Từ $6abc$ và $6a^2b^2c^2$ là số nguyên, bằng cách chứng minh hoàn toàn tương tự ta suy ra abc là số nguyên. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Lời giải trên cho thấy rằng chúng ta chỉ sử dụng giả thiết $a^n+b^n+c^n$ cho đến $n=6$ (trong đó không sử dụng giả thiết với $n=5$!). Liên quan đến vấn đề này, chúng tôi đề xuất các độc giả suy nghĩ đến các vấn đề sau:

1. Chứng minh bổ đề tổng quát: Cho $k>1$ là một số nguyên phi chính phương (không có ước chính phương), $(m,k)=1$. Khi đó nếu x là một số thực sao cho kx và mkx^2 là số nguyên thì x là số nguyên.

2. Hãy tìm ví dụ về bộ ba số thực a,b,c thoả mãn điều kiện $a^n+b^n+c^n$ nguyên với mọi $n=1,2,3,4,5$ nhưng $a^6+b^6+c^6$ không nguyên.

3. (Giả thuyết) Có phải chăng nếu $a_1^n+a_2^n+...+a_k^n$ là số nguyên với mọi n nguyên dương thì $a_1,a_2,...,a_k$ là nghiệm của một đa thức đơn khởi bậc k với hệ số nguyên? Và các hằng số 4 (đối với $k=2$) và 6 (đối với $k=3$) sẽ bằng bao nhiêu trong trường hợp tổng quát?

Câu 5. *Cho số nguyên dương n. Ký hiệu T là tập hợp gồm $2n$ số nguyên dương đầu tiên. Hỏi có bao nhiêu tập con S của T có tính chất: trong S không tồn tại các phần tử a,b mà $|a-b|\in\{1,n\}$ (Lưu ý: Tập rỗng được coi là tập con có tính chất nêu trên).*

Bình luận. Bài toán có vẻ khá quen thuộc. Chẳng hạn một bài toán nổi tiếng *«Tìm số tất cả các xâu nhị phân độ dài n sao cho không có 2 bít 1 đứng kề nhau»* có thể phát biểu một cách tương đương là *«Tìm số tất cả các tập con S thuộc $\{1,2,...,n\}$ sao cho trong S không tồn tại hai phần tử mà $|a-b|=1$.»*. Kết quả bài toán này là chúng ta sẽ có dãy số Fibonacci.

Tương tự, một bài toán khác có vẻ bề ngoài còn giống hơn nữa, đó là đề thi của Thuỵ Sĩ năm 2006: *«Cho số nguyên dương n. Tìm số tất cả các tập con $A\subset\{1,2,....,2n\}$ sao cho không tồn tại $x,y\in A$ với $x+y=2n+1$»*.

Tuy nhiên, đó chỉ là cái giống bề ngoài. Bản chất bên trong thì bài VMO 2009 khó hơn hẳn. Với bài xâu nhị phân độ dài n, ta có thể dễ dàng lập được công thức truy hồi $x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$ bằng cách lý luận như sau: Xét 1 xâu nhị phân độ dài n thoả mãn đề bài. Nếu xâu này bắt đầu bằng 0 thì bỏ số 0 này đi, ta được 1 xâu nhị phân độ dài $n-1$ thoả đề bài và ngược lại, nếu có

1 xâu nhị phân độ dài $n-1$ thoả đề bài thì thêm số 0 vào phía đầu, ta được 1 xâu nhị phân độ dài n thoả đề bài bắt đầu bởi 0. Từ đó số xâu loại này bằng x_{n-1}. Nếu xâu này bắt đầu bằng 1 thì chữ số tiếp theo phải là 0. Bỏ đi hai chữ số đầu tiên, ta được 1 xâu nhị phân độ dài $n-2$ thoả đề bài. Từ đó số xâu nhị phân độ dài n thoả đề bài bắt đầu bằng 1 bằng x_{n-2}. Vậy $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$.

Bài Thuỵ Sĩ 2006 có lời giải trực quan khá đơn giản như sau: Ta xếp cách số từ 1 đến $2n$ thành 2 hàng, n cột

1	2	3	$\cdots$	n
2n	2n-1	2n-2	$\cdots$	$n+1$

Khi đó bài toán tương đương với việc tìm số cách chọn ra một số ô, sao cho hai ô cùng cột không đồng thời được chọn. Như vậy, tại mỗi cột ta chỉ có 3 lựa chọn: hoặc không chọn cả hai, hoặc chọn số ở hàng trên, hoặc chọn số ở hàng dưới. Suy ra đáp số bài toán là $3n$.

Từ lời giải trên, dễ dàng nhận thấy rằng Thuỵ Sĩ 2006 tương đương với bài *«Tìm số các tập con S thuộc T sao cho không tồn tại a, b thuộc S với $|a-b| = n$»*. Lúc này ta chỉ cần đổi bảng thành

1	2	3	$\cdots$	n
n+1	n+2	n+3	$\cdots$	$2n$

Lời giải các bài toán trên tuy khá xa với lời giải VMO 2009 (thậm chí bài Fibonacci có thể dẫn đến sa lầy) nhưng gợi ý cho chúng ta một số ý tưởng: xây dựng công thức truy hồi, đưa về mô hình trực quan bảng.

Sau đây là lời giải chi tiết:

Ta đặt các số thuộc $\{1, 2, ..., 2n\}$ vào bảng $2 \times n$ như sau

1	2	$\cdots$	n-1	n
n+1	n+2	$\cdots$	2n-1	$2n$

Bài toán của chúng ta tương đương với việc đếm số cách chọn một số số (có thể là không số nào) sao cho:

i. Hai số kề nhau trong bảng không đồng thời được chọn

ii. n và $n+1$ không đồng thời được chọn.

Gọi $S(n)$ là đáp số của bài toán. Ký hiệu $A(n), B(n), C(n)$ là số các cách chọn một số số (có thể không số nào) từ các bảng ở hình bên dưới sao cho không có hai số nào cạnh nhau được chọn.

1	2	3	...		n-1	n
n+1					2n-1	2n

1	2	3	...		n-1	n
					2n-1	2n

1	2	3	...		n-1	n
	n+2				2n-1	2n

Khi đó dễ thấy rằng $S(n) = A(n) - C(n-2)$. Và ta có các hệ thức sau:

$$A(n) = A(n-1) + 2B(n-1) \quad (1)$$

(ta chia các cách chọn của $A(n)$ thành ba trường hợp: cả 1 và $n+1$ đều không được chọn; 1 được chọn; $n+1$ được chọn)

$$B(n) = A(n-1) + B(n-1) \quad (2)$$

(lý luận tương tự)

$$C(n) = B(n-1) + B(n-2) + C(n-2) \quad (3)$$

(1 không được chọn; 1 được chọn và $n+2$ không được chọn; 1 được chọn và $n+2$ được chọn)

Từ các hệ thức này ta có thể tính được $A(n), B(n), C(n)$ và $S(n)$. Ví dụ, ta có thể dễ dàng suy ra

$$A(n) = 2A(n-1) + A(n-2), A(0) = 1, A(1) = 3, A(2) = 7. \quad (4)$$

và từ đó

$$A(n) = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2},$$

C(n) được tính tứ hệ thức

$$C(n) = C(n-2) + A(n-1) \quad (5)$$

$(B(n-1) + B(n-2) = A(n-2) + B(n-2) + B(n-2) = A(n-1))$

$\Leftrightarrow C(n) = C(n-2) + \frac{A(n)-A(n-2)}{2}$

$\Leftrightarrow C(n) - \frac{A(n)}{2} = C(n-2) - \frac{A(n-2)}{2}$

Ta chú ý rằng $C(1) = 1, C(2) = 4, C(3) = 8$. Từ hệ thức cuối cùng và

$$C(1) - A(1)/2 = -1/2, C(2) - A(2)/2 = 1/2, C(3) - A(3)/2 = -1/2$$

Ta suy ra rằng

$$C(n) - A(n)/2 = (-1)^n/2$$

Như thế

$$C(n) = \frac{A(n) + (-1)^n}{2}$$

Và cuối cùng

$$S(n) = A(n) - C(n-2) = \frac{(3+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n + (3-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n - 2(-1)^n}{4}.$$

Ghi chú

1. Từ (1), (2), (3) có thể suy ra rằng $S(n) = S(n-1) + 3S(n-2) + S(n-3)$. Chúng tôi không rõ là có thể tìm được cách chứng minh trực tiếp hệ thức này mà không thông qua các dãy số phụ được không.

2. Bài toán sẽ dễ chịu hơn nếu yêu cầu không tồn tại a, b sao cho $|a-b| \in \{1, n\}$ được đổi thành không tồn tại a, b sao cho $|a-b| = 1$ hoặc $a+b = 2n+1$. Khi đó đáp số sẽ chính là $A(n)$.