

- BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} + \sqrt{x + x^2} = 3$.

Đáp số: $x = 1$.

Bài 2. Giải phương trình $\sqrt[3]{x - 10} + \sqrt{x - 1} + x^2 = x + 1$.

Đáp số: $x = 2$.

Bài 3. Giải phương trình $\sqrt[3]{x - \frac{4}{3}} + 4x = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - \sqrt{3x}$.

Đáp số: $x = \frac{1}{3}$.

Bài 4. Giải phương trình $\sqrt[3]{3x - 5} + \sqrt{3 - x} = 2x + 2$.

Đáp số: $x = -1$.

Bài 5. Giải phương trình $x^2 + 2x = x\sqrt{4x + 1} + \sqrt[3]{3x + 2}$.

Đáp số: $x = 2$.

2. Tách thành tích các biểu thức liên hợp.

Ở mục 1, chúng ta đã sử dụng kỹ thuật nhân thêm một lượng liên hợp để đưa phương trình vô tỷ về dạng tích. Tuy nhiên trong một số dạng toán kỹ thuật nhân thêm một lượng liên hợp không đảm bảo được mẫu số khác 0, hoặc việc giải quyết biểu thức thứ 2 trong phương trình tích là khó khăn. Chúng ta có thể lựa chọn phương án tách đa thức thành các biểu thức liên hợp để thay thế.

- Kiểu 1. $f(x) - g(x) = (\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)})(\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)})$, với $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

Ví dụ 1. Giải phương trình $2 + \sqrt{x - 1} + \sqrt{3x - 5} = x$.

- Phân tích. Nhận thấy $(\sqrt{x - 1} + \sqrt{3x - 5})(\sqrt{3x - 5} - \sqrt{x - 1}) = (3x - 5) - (x - 1) = 2(x - 2)$

Do vậy, nếu ta biến đổi $\sqrt{x - 1} + \sqrt{3x - 5} = \frac{2(x - 2)}{\sqrt{3x - 5} - \sqrt{x - 1}}$, ta sẽ có nhân tử $(x - 2)$. Tuy nhiên vấn đề nảy sinh ở đây là chưa đảm bảo được rằng biểu thức $(\sqrt{3x - 5} - \sqrt{x - 1})$ khác 0 và để khắc phục nó chúng ta có thể xét 2 trường hợp $\sqrt{3x - 5} - \sqrt{x - 1} = 0$ và $\sqrt{3x - 5} - \sqrt{x - 1} \neq 0$. Song để tránh sự rối rắm không cần thiết, ta chọn phương án biến đổi ngược lại, đó là: $2(x - 2) = (\sqrt{x - 1} + \sqrt{3x - 5})(\sqrt{3x - 5} - \sqrt{x - 1})$, từ đó ta có thể giải quyết bài toán như sau:

Lời giải

Điều kiện $x \geq \frac{5}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với: $2(x - 2) - 2(\sqrt{x - 1} + \sqrt{3x - 5}) = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x - 1} + \sqrt{3x - 5})(\sqrt{3x - 5} - \sqrt{x - 1}) - 2(\sqrt{x - 1} + \sqrt{3x - 5}) = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x - 1} + \sqrt{3x - 5})(\sqrt{3x - 5} - \sqrt{x - 1} - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x - 1} + \sqrt{3x - 5} = 0 \text{ (VN)} \\ \sqrt{3x - 5} - \sqrt{x - 1} - 2 = 0 \end{cases}$

Lại có: $\sqrt{3x - 5} - \sqrt{x - 1} - 2 = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 2\sqrt{x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 12x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = 10 \end{cases}$

- Kết luận. Nghiệm của phương trình đã cho là $x = 10$.

Bài tập tương tự.

1) Giải phương trình $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{1 - x} = 3x$.

2) Giải phương trình $\sqrt{4x - 3} + \sqrt{2x + 7} = x - 5$.

3) Giải phương trình $\sqrt{x + 5} + \sqrt{2 - 2x} = x + 1$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{x - 1} = x^2 - 1$.

- **Phân tích.** Nhận thấy

$$(\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1})=(x^2+x-2)-(x-1)=x^2-1$$

từ đó ta có lời giải sau:

Lời giải

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=(\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1})$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x-1}=0 & (1) \\ \sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x-1}-1=0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2-2=2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ x^4-4x^2-4x+8=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ (x-2)(x^3+2x^2-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

$$\text{Do: } x^3+2x^2-4 \geq 2\sqrt{2}+4-4 > 0, \forall x \geq \sqrt{2}$$

- Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là: $T = \{1; 2\}$.

Bài tập tương tự.

1) Giải phương trình $\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2+2x-1}=x$.

2) Giải phương trình $x+3=\sqrt{3x^2+13x+12}+\sqrt{2x^2+7x+3}$.

3) Giải phương trình $3-x(x+1)=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{x+1}$.

$$(1+\sqrt{1+x})(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1)=x\sqrt{x}.$$

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}-1)=x,$$

- **Phân tích.** Ta nhận thấy tuy nhiên khi sử dụng phép nhân thêm lượng liên

hợp ta phải chia thành các trường hợp $\sqrt{1+x}-1=0$ và $\sqrt{1+x}-1 \neq 0$. Để tránh những vấn đề phức tạp đó nảy sinh, ta có thể xử lý như sau:

Lời giải

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$(1+\sqrt{1+x})(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1)=(1+\sqrt{1+x})(\sqrt{1+x}-1)\sqrt{x}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+1}+x-1=(\sqrt{1+x}-1)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x})+(x-1+\sqrt{x})=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-3x+1}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+(x-1+\sqrt{x})=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1+\sqrt{x})(x-1-\sqrt{x})}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+(x-1+\sqrt{x})=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1+\sqrt{x})\left(\frac{x-1-\sqrt{x}}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1+\sqrt{x}=0 & (1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}+x-1-\sqrt{x}=0 \quad (2)$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$(2) \Leftrightarrow (\sqrt{2x^2 - 2x + 1} + x - 1) + (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x}) = 0 (*)$$

Ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 - 2x + 1} + x - 1 = \sqrt{x^2 + (x - 1)^2} + x - 1 \geq \sqrt{(x - 1)^2} + (x - 1) \geq (1 - x) + (x - 1) = 0 \\ \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x} \geq \sqrt{x} - \sqrt{x} = 0 \end{cases}$$

Do đó $(*) \Leftrightarrow x = 0$.

$$T = \left\{ \frac{3\sqrt{5}}{2}; 0 \right\}.$$

- Kết luận. Tập nghiệm của phương trình đã cho là

Bài tập tương tự.

$$(\sqrt{5x - 1} + \sqrt{x - 1})(3x - 1 - \sqrt{5x^2 - 6x + 1}) = 4x.$$

1) Giải phương trình

$$2x + \frac{6}{x} - 1 = \sqrt{4x^2 + 9} + \sqrt{2x - 3}.$$

2) Giải phương trình

$$\sqrt{x + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{x - \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x}.$$

3) Giải phương trình