

Câu I. (4,0 điểm)

$$M = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5} \right)$$

1. Cho biểu thức:

Rút gọn M và tìm giá trị của x để M > 1

2. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2$.Tính giá trị của biểu thức $Q = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$.**Câu II. (4,0 điểm)**1. Giải phương trình $x^2 - 3\sqrt{x^3 - 3x^2 + 4x - 2} = 0$.2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 4x - 6y - 5 = 0 \\ \sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+2x^2+x} = 26. \end{cases}$$
Câu III. (4,0 điểm)1. Giải phương trình nghiệm nguyên: $y^4 + 2y^3 - y^2 - 2y - x^2 - x = 0$ 2. Có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2023 thỏa mãn $n^3 + 2023$ chia hết cho 6.**Câu IV. (6,0 điểm)**

Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi C là điểm thỏa mãn tam giác ABC nhọn. Các đường thẳng CA, CB cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai tương ứng là D, E . Trên cung AB của (O) không chứa D lấy điểm F ($0 < FA \leq FB$). Đường thẳng CF cắt AB tại M và cắt đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác CDE tại P (P không trùng với C).

a) Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ b) Chứng minh $CE \cdot CB = CP \cdot CM$.c) Gọi I, H theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của F trên các đường thẳng BD, AB . Các đường thẳng IH và CD cắt nhau tại K . Chứng minh $\angle KCF = 90^\circ$ và tìmvị trí của điểm F để biểu thức $\frac{AB}{FH} + \frac{BD}{FI} + \frac{AD}{FK}$ đạt giá trị nhỏ nhất.**Câu V. (2,0 điểm)**Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$F = \frac{x^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{y^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{z^4}{(z^2 + x^2)(z + x)}$$

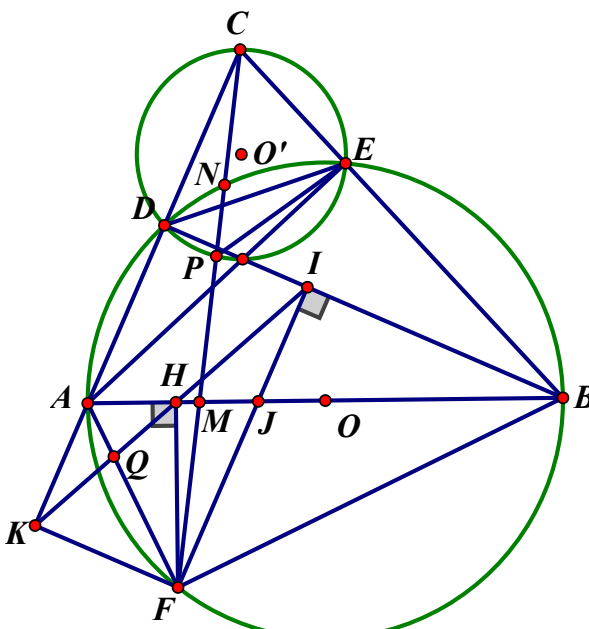
Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....
 Người coi thi số 1.....Người coi thi số 2.....

HƯỚNG DẪN CHẤM
 (Hướng dẫn chấm gồm 06 trang)

Câu	Lời giải	Điểm
I. (3,0 điểm)	1. Cho biểu thức: $M = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5} \right)$ Rút gọn M và tìm giá trị của x để M > 1	2,0
	Điều kiện với $x \geq 0; x \neq 1, 3, 4$ $M = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} + \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+5)} \right)$	0,25
	$= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right)$	0,5
	$= \frac{\sqrt{x}-1+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{(3\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+1)+2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$	
	$= \frac{\sqrt{x}-1+x-2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{3x+3\sqrt{x}-5\sqrt{x}-5+2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$	0,5
	$= \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{3x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{3(x-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}$	
	Vậy $M = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}$ với $x \geq 0; x \neq 1, 3, 4$ $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{4-2\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} > 0$ M > 1	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x}-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 4$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{x} < 0 \\ \sqrt{x}-1 < 0 \end{cases}$	
	. Vậy M > 1 khi $1 < x < 4$ và $x \neq 3$	
	2. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=2$. Tính giá trị của biểu thức $Q = x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}$.	2,0
	Ta có:	0,5
		0,5

Câu	Lời giải	Điểm
	$2 = xy + \sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} + x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1} = xy + \sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} + Q$ $\Rightarrow (2 - Q)^2 = \left[xy + \sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} \right]^2$ $\Rightarrow 4 - 4Q + Q^2 = 2x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 + 2xy\sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}.$ Ta lại có $Q^2 = x^2(y^2 + 1) + y^2(x^2 + 1) + 2xy\sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$ $\Rightarrow Q^2 = 2x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2xy\sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}.$ $4 - 4Q = 1 \Rightarrow Q = \frac{3}{4}.$ Do đó	0,5 0,5
II. (4,0 điểm)	1. Giải phương trình $x^2 - 3\sqrt{x^3 - 3x^2 + 4x} - 2 = 0$. (1)	2,0
	Điều kiện $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 \geq 0$	0,25
	Có $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x - 1)(x^2 - 2x + 2)$	0,25
	nên $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ vì $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0 \forall x$	
	$(1) \Leftrightarrow 2(x - 1) + (x^2 - 2x + 2) - 3\sqrt{(x - 1)(x^2 - 2x + 2)} = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2} - 3 \cdot \sqrt{\frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2}} + 1 = 0$	
	Đặt $t = \sqrt{\frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2}}, t \geq 0$ ta được phương trình $2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$	0,5
	$t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 0$ (vô nghiệm)	0,25
	$t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2} = \frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{3}$ (thỏa mãn điều kiện) Vậy pt có 2 nghiệm $x = 3 \pm \sqrt{3}$	0,5
	2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 + 4x - 6y - 5 = 0 & (1) \\ \sqrt{2x + 3} + \sqrt{2y} + 2x^2 + x = 26 & (2) \end{cases}$	2,0
	Điều kiện $\begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ y \geq 0 \end{cases}$	0,25
	$(1) \Leftrightarrow (x + 2)^2 = (y + 3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = y + 3 \\ x + 2 = -y - 3 \end{cases}$	0,5
	$\Rightarrow x + 2 = -y - 3 \Leftrightarrow (x + 5) + y = 0$ vô nghiệm vì $(x + 5) + y > 0 \forall x \geq -\frac{3}{2}, y \geq 0.$	0,5
	$\Rightarrow x + 2 = y + 3 \Leftrightarrow y = x - 1$ thay vào (2) ta được	0,5

Câu	Lời giải	Điểm
	$\sqrt{2x+3} + \sqrt{2(x-1)} + 2x^2 + x = 26$ $\Leftrightarrow (\sqrt{2x+3} - 3) + (\sqrt{2x-2} - 2) + 2x^2 + x - 21 = 0$ $\Leftrightarrow \frac{2x+3-9}{\sqrt{2x+3}+3} + \frac{2x-2-2}{\sqrt{2x-2}+2} + (x-3)(2x+7) = 0$ $\Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{2}{\sqrt{2x+3}+3} + \frac{2}{\sqrt{2x-2}+2} + 2x+7 \right) = 0$ $\Leftrightarrow x=3, \text{ do } \frac{2}{\sqrt{2x+3}+3} + \frac{2}{\sqrt{2x-2}+2} + 2x+7 > 0 \quad \forall x \geq 1$ $+) x=3 \Rightarrow y=2$ Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 2)$	0,25
III. (4,0 điểm)	1. Giải phương trình nghiệm nguyên: $y^4 + 2y^3 - y^2 - 2y - x^2 - x = 0$	2đ
	Ta có: $y^4 + 2y^3 - y^2 - 2y - x^2 - x = 0$ $\Leftrightarrow (y^2 + y - 1)^2 = x^2 + x + 1 \quad (*)$ Nếu $x > 0$ thì $x^2 < x^2 + x + 1 < (x+1)^2$ suy ra $x^2 + x + 1$ không là số chính phương nên không tồn tại số nguyên x, y thỏa mãn (*). Nếu $x < -1$ thì $(x+1)^2 < x^2 + x + 1 < x^2$ suy ra $x^2 + x + 1$ không là số chính phương nên không tồn tại số nguyên x, y thỏa mãn (*).	0,5
	$y^2 + y - 1 = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = -1 \\ y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$	0,75
	Nếu $x = -1$ hoặc $x = 0$ thì từ (*) suy ra Vậy phương trình có nghiệm nguyên: $(x; y) = \{ (-1; -2), (-1; -1), (-1; 0), (-1; 1), (0; -2), (0; -1), (0; 0), (0; 1) \}$	0,25
	2. Có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2023 thỏa mãn $n^3 + 2023$ chia hết cho 6.	2,0
	Đặt $n = 6q + r, r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Khi đó $n^3 + 2023$ chia hết cho 6 khi $r^3 + 1$ chia hết cho 6.	0,25
	Nếu r chẵn thì $r^3 + 1$ lẻ, do đó $r^3 + 1$ không chia hết cho 6. Suy ra $r \in \{1, 3, 5\}$.	0,5
V. (7,0 điểm)	Với $r = 1 \Rightarrow r^3 + 1 = 2$ không chia hết cho 6.	0,5
	Với $r = 3 \Rightarrow r^3 + 1 = 28$ không chia hết cho 6.	
	Với $r = 5 \Rightarrow r^3 + 1 = 126$ chia hết cho 6.	
	Suy ra $n = 6q + 5$. Mà $0 \leq n \leq 2023 \Rightarrow 0 \leq q \leq 336$.	0,5
	Vậy có tất cả 337 số tự nhiên n thỏa mãn đề bài.	0,25
V. (7,0 điểm)	Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi C là điểm thỏa mãn tam giác ABC nhọn. Các đường thẳng CA, CB cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai	

Câu	Lời giải	Điểm
	tương ứng là D, E. Trên cung AB của (O) không chứa D lấy điểm F ($0 < FA \leq FB$). Đường thẳng CF cắt AB tại M, và cắt đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác CDE tại P (P không trùng với C). a) Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle EDC$	2,0
		
	Ta chứng minh được $\triangle CEA, \triangle CDB$ là 2 tam giác vuông đồng dạng(g.g)	1
	$\frac{CE}{CD} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow \frac{CE}{CA} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle EDC \text{ (c.g.c)}$	1
	b) Chứng minh $CE.CB = CP.CM$.	2
	Theo câu a) $\triangle ABC \sim \triangle EDC \Rightarrow \angle BAC = \angle DEC$ (1) Mà dễ thấy $\angle DEC = \frac{1}{2} \angle O'E$ (kéo dài DO' và dùng tính chất góc ngoài tam giác) Tương tự $\angle PEC = \frac{1}{2} \angle O'E$ nên $\angle DEC = \angle PEC$ (2) Từ (1) và (2) suy ra: $\angle BAC = \angle PEC$ Hay $\angle BCM = \angle PEC$	0,5 0,5 0,5
	Xét $\triangle CPE$ và $\triangle CBM$ có: $\angle BCM = \angle PEC$ và $\angle C$ chung Suy ra $\triangle CPE \sim \triangle CBM$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CE}{CP} = \frac{CM}{CB} \Rightarrow CE.CB = CM.CP$ (Đpcm)	0,5
	c) Gọi I, H theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của F trên các đường thẳng BD, AB. Các đường thẳng IH và CD cắt nhau tại K. Chứng minh $\angle AKF = 90^\circ$ và tìm vị trí của điểm F để biểu thức $\frac{AB}{FH} + \frac{BD}{FI} + \frac{AD}{FK}$ đạt giá trị nhỏ nhất.	2
	Gọi J là giao điểm của FI và BH ; Q là giao điểm của HK và AF . Ta chứng minh	

Câu	Lời giải	Điểm
	được $\triangle F H J \sim \triangle B I J (g.g) \Rightarrow \triangle H I J \sim \triangle F B J (c.g.c) \Rightarrow \widehat{H I J} = \widehat{F B J}$ Dễ thấy $\widehat{H F A} = \widehat{F B J}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) Và $\widehat{H I J} = \widehat{H K A}$ (So le trong, do FI//KD) $\Rightarrow \widehat{H F A} = \widehat{H K A} \Rightarrow \triangle A Q K \sim \triangle H Q F (g.g) \Rightarrow \triangle A Q H \sim \triangle K Q F$ $\Rightarrow \widehat{A H Q} = \widehat{K F Q}$. Mà $\Rightarrow \widehat{A H Q} = \widehat{H I J}$ (đối đỉnh) và $\widehat{H I J} = \widehat{B F J}$ (Do $\triangle H I J \sim \triangle F B J$) $\Rightarrow \widehat{B F J} = \widehat{K F Q}$. Hay $\Rightarrow \widehat{B F I} = \widehat{K F A} (*)$ Xét tứ giác BDAF có tổng 4 góc bằng 360°. Mà dễ thấy $\widehat{A D B} = \widehat{A F B} = 90^{\circ}$ Suy ra: $\widehat{D B F} + \widehat{D A F} = 180^{\circ}$ Mà $\widehat{K A F} + \widehat{D A F} = 180^{\circ}$ (kề bù) $\Rightarrow \widehat{D B F} = \widehat{K A F}$ Hay $\widehat{B B F} = \widehat{K A F} (**)$ Từ (*) và (**) suy ra $\triangle F A K \sim \triangle F B I (g.g) \Rightarrow \widehat{B I F} = \widehat{A K F} = 90^{\circ}$	0,25 0,25 0,25 0,25
	Xét $\triangle D F K$ và $\triangle B F H$ có $\widehat{F K D} = \widehat{F H B} = 90^{\circ}$ Và ta chứng minh được $\widehat{F B H} = \widehat{F D A} = \frac{1}{2} \widehat{A O F}$ $\Rightarrow \triangle D F K \sim \triangle B F H \Rightarrow \frac{D K}{F K} = \frac{B H}{F H} (1)$	0,25
	Tương tự tam giác IDF đồng dạng với tam giác HAF $\Rightarrow \frac{I D}{I F} = \frac{H A}{H F}$	0,25
	Mà $\triangle F A K \sim \triangle F B I$ nên: $\frac{A K}{F K} = \frac{B I}{F I} (2)$ Từ (1), (2) $\Rightarrow \frac{D K}{F K} - \frac{A K}{F K} = \frac{B H}{F H} - \frac{B I}{F I}$ hay: $\frac{D A}{F K} = \frac{B H}{F H} - \frac{B I}{F I}$ $\Rightarrow \frac{D A}{F K} + \frac{B D}{F I} = \frac{B H}{F H} + \frac{B D}{F I} - \frac{B I}{F I} = \frac{B H}{F H} + \frac{I D}{F I}$ Mà $\frac{I D}{F I} = \frac{H A}{F H}$ suy ra: $\frac{D A}{F K} + \frac{B D}{F I} = \frac{B H}{F H} + \frac{H A}{F H} = \frac{A B}{F H}$	0,25
	Vậy $\frac{A B}{F H} + \frac{B D}{F I} + \frac{A D}{F K} = \frac{2 A B}{F H}$ nên $\frac{A B}{F H} + \frac{B D}{F I} + \frac{A D}{F K}$ nhỏ nhất khi $F H$ lớn nhất khi F là trung điểm cung $A B$	0,25
VI. (2,0 điểm)	Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F = \frac{x^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{y^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{z^4}{(z^2 + x^2)(z + x)}$	
	Ta có $\frac{2 x^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} = \frac{x^4 + y^4 + (x^4 - y^4)}{(x^2 + y^2)(x + y)} = \frac{x^4 + y^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} + x - y$	0,5

Câu	Lời giải	Điểm
		0,5
	$\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x+y} + x - y \geq \frac{1}{4}(x+y) + x - y = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}y$	0,5
	$\frac{2y^4}{(x^2+y^2)(x+y)} \geq \frac{5}{4}y - \frac{3}{4}z \quad \frac{2z^4}{(x^2+y^2)(x+y)} \geq \frac{5}{4}z - \frac{3}{4}x$	0,5

Tương tự , .