ĐỀ THI HSG TOÁN 9 HÀ NAM NĂM 2023-2024

ĐỀ 58

Câu I: (3,5 điểm)

1. Xét biểu thức $Q=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}.\left[\sqrt{(2+x)^3}-\sqrt{(2-x)^3}\right]}{4+\sqrt{4-x^2}}$.

   Tìm điều kiện của x để Q xác định và rút gọn Q.
2. Xét đa thức bậc bốn $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$, (với $a,b,c,d \in R$) thỏa mãn $P(-1)=3, P(3)=19$ và $P(5)=51$. Tính giá trị của $T=3P(-2)+5P(6)$.

Câu II. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\sqrt{10x-5}+\sqrt{5x^2+5}=\sqrt{9x(x+2)}$.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3=1+y-x+xy \\ 7xy+y-x=7 \end{cases}$

Câu III. (2,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $d: y=2(m-1)x-m^2$, với m là tham số. Tìm các giá trị nguyên của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt lần lượt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn ${x_1}^2+2(m-1)x_2 \le 3m^2+20$.

Câu IV. (1,5 điểm) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $2^x+33=y^2$.

Câu V. (7,0 điểm) Cho tam giác nhọn $ABC\,(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Đường thẳng AI cắt (O) tại điểm thứ hai là M. Đường tròn (I) tiếp xúc với hai cạnh BC, CA lần lượt tại hai điểm D và E . Gọi T là giao điểm của hai đường thẳng BI và DE .

1. Chứng minh $MB=MC=MI$.
2. Chứng minh tứ giác $AITE$ nội tiếp đường tròn.
3. Kẻ đường kính AP của (O) và đường cao AH của tam giác ABC. Đường thẳng MP lần lượt cắt hai đường thẳng AH, BC tại hai điểm N, K . Chứng minh $MI^2=MN.MK$.
4. Đường thẳng PI cắt (O) tại điểm thứ hai là Q, hai đường thẳng AQ và BC cắt nhau tại điểm S . Chứng minh rằng nếu chu vi của tam giác ABC bằng $3BC$ thì I là trọng tâm của tam giác AKS .

Câu VI. (2,0 điểm) Xét a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn $abc=1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{b^2}{(ab+2)(2ab+1)}+\dfrac{c^2}{(bc+2)(2bc+1)}+\dfrac{a^2}{(ca+2)(2ca+1)} \ge \dfrac{1}{3}$.

---Hết---

ĐÁP ÁN

Câu I. (3,5 điểm)
1.
Điều kiện xác định: $\{4-x^2\geq 0 \; 2+x\geq 0 \; 2-x\geq 0 \Leftrightarrow \{x^2\leq 4 \; x\geq -2 \; x\leq 2 \;\Rightarrow -2\leq x\leq 2$.

P = $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(4+\sqrt{4-x^2}\right)}{4+\sqrt{4-x^2}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4+2\sqrt{4-x^2}}.(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})$

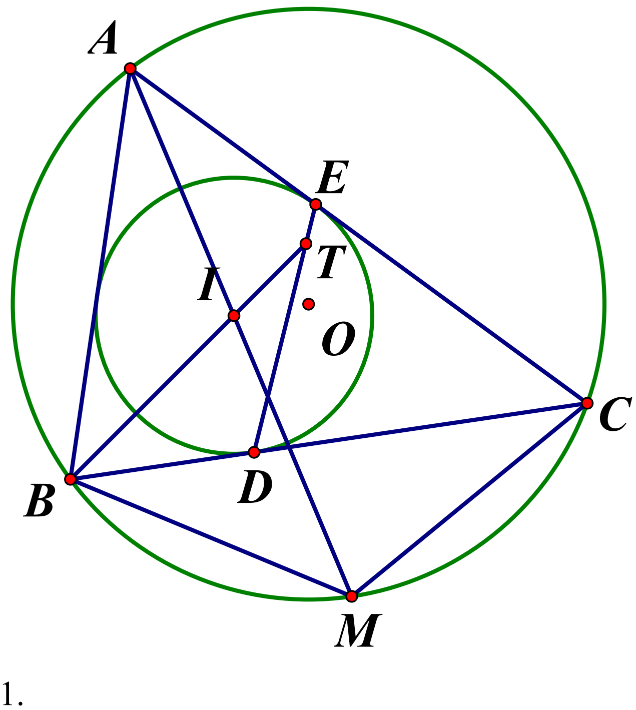
$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)^2}.\ (\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})\ (\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.2x = \sqrt{2}x$.

2.
Đa thức $f(x)=2x^2+1$ thỏa mãn $f(-1)=3$, $f(3)=19$ và $f(5)=51$.
Xét đa thức $Q(x)=P(x)$ - $f(x)$ là đa thức bậc bốn có các nghiệm x = -1 ,x = 3 và x = 5
Nên $Q(x)$ = (x + 1) (x - 3) (x – 5) (x – m)
$\Rightarrow P(x) = Q(x) + f(x)$ = (x + 1)(x – 3)(x – 5)(x – m)+$2x^2+1$
P (-2) = 35(m+2) + 9 = 79 + 35m
P (6) = 21(6 – m) + 73 = 199 – 21m
Vậy 3P(-2) +5P(6) = 3(79 +35m) + 5(199 – 21m) = 1232.
Câu II. (4,0 điểm)
Điều kiện: x≥$\dfrac{1}{2}$
(*) $\Leftrightarrow \sqrt{5}(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+1}) = 3\sqrt{x^2+2x}$
Đặt a = $\sqrt{2x-1}$, b = $\sqrt{x^2+1}$ (a$\geq 0, b>0)\Rightarrow a^2+b^2 = x^2+2x$
Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{5}(a+b)=3\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow 5(a^2+b^2) = 9(a^2+b^2)$
$\Leftrightarrow 2a^2-5ab+2b^2=0 \Leftrightarrow$ (2a – b)(a – 2b) = 0 $\Leftrightarrow$ ¿
+) 2a = b $\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow$ 4(2x – 1) = x^2+1
$\Leftrightarrow x^2-8x+5=0 \Leftrightarrow x=4\pm\sqrt{11}$ (thỏa mãn).
+) a = 2b $\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 2\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow$ 2x – 1 = 4(x^2+1)
$\Leftrightarrow 4x^2-2x+5=0$ (vô nghiệm).
Vậy S = { $4\pm\sqrt{11}$ }.
2.
+) (2) ⇒y – x = 7 – 7xy thay vào (1) ta được $x^3+y^3=8-6xy$
$\Leftrightarrow x^3+y^3+6xy-8=0 (x+y)^3-8+6xy-3xy(x+y)=0$
$\Leftrightarrow$ (x + y – 2)[$(x+y)^2+2(x+y)+4$¿$-3xy(x+y-2)=0$
$\Leftrightarrow$ (x + y – 2)($x^2+y^2+4-xy+2x+2y)=0$
$\Leftrightarrow$ ¿
+) x + y – 2 =⇒ $y=2-x$thay vào (2), ta được 7x (2 – x)+ 2 – 2x = 7
$\Leftrightarrow 7x^2-12x+5=0 \Leftrightarrow$ ¿
+) $x^2+y^2+4-xy+2x+2y$ = 0
$\Leftrightarrow (x-y)^2+(x+2)^2+(y+2)^2=0 \Leftrightarrow$ x = y = -2 (không thỏa mãn (2)).
Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là (1; 1) và $(\dfrac{5}{7};\dfrac{9}{7})$.

Câu III.(2,0 điểm)
Xét phương trình hoành độ giao điểm : $x^2=2(m-1)x-m^2$
$\Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x + m^2 = 0$ (*)
d cắt (*P*) tại hai điểm phân biệt phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt
$\Leftrightarrow \Delta' = (m-1)^2 - m^2 > 0$
$\Leftrightarrow$ m¿$\frac{1}{2}$(1).
Gọi x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của *d* và (*P*) $x_1, x_2 = 2(m-1)$ và $x_1^2 = 2(m-1)x_1 - m^2$
Ta có $x_1^2 = 2(m-1)x_2 \le 3m^2+20$ $2(m-1)(x_1+x_2) - m^2 \le 3m^2+20$
$\Leftrightarrow 4(m-1)^2 - m^2 \le 3m^2+20 \Leftrightarrow m \ge -2(2)$
Kết hợp (1) và (2) suy ra $-2 \le m \le \frac{1}{2}$.
Vì *m* là số nguyên $m \in \{-2;-1;0\}$.
Câu IV. (1,5 điểm)
+) Ta nhận thấy x = 0 không thỏa mãn
+) Nếu x ¿0 thì 2^x *là số không nguyên nên* $2^x + 33 \ne y^2$ (*với* $y \in Z$).
+) Nếu x = 2k + 1($k \in N$) *thì* $2^x = 2^{2k+1}$ chia 3 dư 2 *nên* $2^x + 33 \ne y^2$ (*với* $y \in Z$) (vì bình phương của một số nguyên chia 3 dư 0 hoặc 1).
+) Nếu x = 2*k*($k \in N$¿), ta xét với y ¿ 0 thì $2^x + 33 = y^2$
$\Leftrightarrow$ $(y - 2^k)(y + 2^k) = 33 = 1.33 = 3.11$ $\{y - 2^k = 1\ y + 2^k = 33$ hoặc $\{y - 2^k = 3\ y + 2^k = 11$
$\Leftrightarrow$ ¿ ¿
Vậy có bốn cặp số (x ; y) nguyên cần tìm là (8;17);(8;-17);(4;7);(4;-7)
Câu V. (7,0 điểm)



1.
Ta có AM là phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{CAM}$
$\Rightarrow$ *sđ* $\widehat{BM}$ = *sđ*$\widehat{CM}$ $\Rightarrow MB = MC(1)$
$\widehat{MBC} = \widehat{MAC}(=\frac{1}{2}$ *sđMC* $) \Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{MAB}$
Lại có *BI* là phân giác của góc $\widehat{ABC} \Rightarrow$ $\widehat{ABI}$ =¿ $\widehat{IBC}$

$\widehat{MBI} = \widehat{MBC} + \widehat{CBI} = \widehat{MAB} + \widehat{ABI}$

Mà $\widehat{MIB} = \widehat{MAB} + \widehat{ABI}$ (tính chất góc ngoài của tam giác)

$\Rightarrow \widehat{MBI} = \widehat{MIB} \Rightarrow \Delta MBI$ cân tại M $\Rightarrow MB = MI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MB = MC = MI$ (đpcm).

2.

Ta có CD và CE là hai tiếp tuyến của (1) $\Rightarrow$ ΔCDE *cân tại* C

$$\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CED} = \frac{1}{2}\left(180^O - \widehat{ACB}\right)$$

Trong ΔTBD, có $\widehat{TBD} + \widehat{BTD} = \widehat{EDC}$ (tính chất góc ngoài tam giác)

Mà BI là phân giác của $\widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{TBC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$

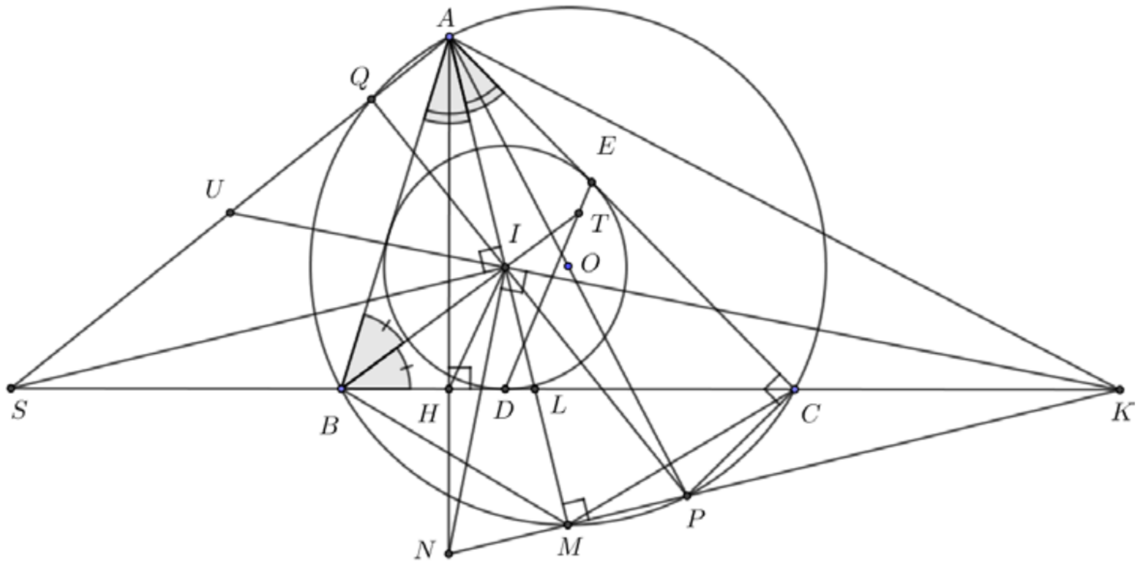
$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(180^O - \widehat{ACB}\right) = \frac{1}{2}\widehat{ABC} + \widehat{BTD}$

$$\Rightarrow \widehat{BTD} = \frac{1}{2}\left[180^O - \left(\widehat{ACB} + \widehat{ABC}\right)\right] = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{IAE}$$

Mà $\widehat{BTD} + \widehat{ITE} = 180^O \Rightarrow \widehat{EAI} + \widehat{ITE} = 180^O$

Vậy tứ giác AITE nội tiếp đường tròn

3.



Ta có AP là đường kính của (O) $\Rightarrow \widehat{PAC} = \widehat{APC} = 90^O$

Mà $\widehat{APC} = \widehat{ABC}\left(= \frac{1}{2} sđAC\right) \Rightarrow \widehat{PAC} + \widehat{ABC} = 90^O$

Lại có $\widehat{BAH} + \widehat{ABC} = 90^O \Rightarrow \widehat{PAC} = \widehat{BAH}$

Vi AI là phân giác của $\widehat{BAC} \Leftrightarrow \widehat{NAM} = \widehat{PAM}$

Mặt khác AM $\perp$ NP $\Rightarrow \Delta ANP$ *cân tại A và* MN = MP (3)

Gọi AI cắt BC tại L

Ta có $\widehat{MCL} = \widehat{MAC}\left(= \widehat{MAB}\right) \Rightarrow \Delta MCL \sim \Delta MAC\,(g-g) \Rightarrow MC^2 = MA\,.\,ML$ (4)

Ta có $\widehat{MKB} = \frac{1}{2} sđ\left(BM - CP\right) = \frac{1}{2} sddMP = \widehat{MAP}$

$\Rightarrow \Delta MAP \sim \Delta MKL$ (g-g) $\Rightarrow MA\,.\,ML = MP\,.\,MK$ (5)

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow MC^2 = MN\,.\,MK$ mà MC = MI

Vậy $MI^2 = MN.MK$ (đpcm)

4.

ΔINK, có IM ⊥ NK và $MI^2 = MN.MK$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{NIK} = 90^o$

Lại có AH ⊥ BC $\Rightarrow \widehat{NHK} = 90^o$

Suy ra tứ giác NHIK nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IHK} = \widehat{INK}$

Mà $\widehat{IHK} = \widehat{IPM}$ và $\widehat{QAM} = \widehat{QPM} = \frac{1}{2} s đQM)$

$\Rightarrow \widehat{IHK} =$ ¿ $\widehat{QAM}$, mặt khác $\widehat{IHK} + \widehat{IHS} = 180^o \Rightarrow \widehat{QAM} + \widehat{IHS} = 180^o$

$\Rightarrow$ AIHS là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AIS} = \widehat{AHS} = 90^o$

Gọi U là trung điểm của AS $\Rightarrow \Delta AUI$ *cân tại U* $\Rightarrow \widehat{UAI} = \widehat{AIU}$

Tại lại có $\widehat{INK} = \widehat{MIK}$ (cùng phụ với $\widehat{IKN}$)

$\Rightarrow \widehat{AIU} = \widehat{MIK}$ nên ba điểm U,I,K thẳng hàng hay điểm I ϵ UK

BI là phân giác của $\widehat{ABL} \Rightarrow \frac{IA}{IL} = \frac{AB}{LB}$

AL là phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow \frac{LB}{LC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{LB}{BC} = \frac{AB}{AB+AC} = \frac{AB}{2BC}$

(Vì AB + AC + BC = 3BC $\Rightarrow AB + AC = 2BC)$

$\Rightarrow LB = \frac{1}{2} AB \Rightarrow \frac{IA}{IL} = 2.($

Áp dụng hệ quả của định lý Thales, trong tam giác ASL với cát tuyến UIK

Ta có $\frac{UA}{US} \cdot \frac{KS}{KL} \cdot \frac{IL}{IA} = 1 \Rightarrow KS = 2KL$hay L là trung điểm của SK

Vậy I là trọng điểm của tam giác AKS (đpcm)

AL

Chứng minh (x+2)(2x+1)≤$\frac{9}{4}(x+1)^2$

$\Leftrightarrow 4(2x^2+5x+2) \le 9(x^2+2x+1) \Leftrightarrow (x-1)^2 \ge 0$(luôn đúng), dấu "=" khi x = 1

Áp dụng kết quả trên, ta có $(ab+2)(2ab+1) \le \frac{9}{4}(ab+1)^2$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{(ab+2)(2ab+1)} \ge \frac{4}{9} \frac{b^2}{(ab+1)^2}$$

Tương tự ta cũng có: $\frac{c^2}{(bc+2)(2bc+1)} \ge \frac{4}{9} \frac{c^2}{(bc+1)^2}$ và

$\frac{b^2}{(ca+2)(2ca+1)} \ge \frac{4}{9} \frac{a^2}{(ca+1)^2}$

$\Rightarrow VT \ge \frac{4}{9}$ ¿ $+ \frac{c^2}{(bc+1)^2} + \frac{a^2}{(ca+1)^2}] \ge \frac{4}{27}\left(\frac{b}{ab+1} + \frac{c}{bc+1} + \frac{a}{ca+1}\right)^2$

$\Leftrightarrow VT \geq \frac{4}{27}\left(\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}\right)^2$ (với a = $\frac{x}{y}; b=\frac{y}{z}; c=\frac{z}{x}$) (1)

Chứng minh $\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z} \geq \frac{3}{2}$ (2)

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}+\frac{x^2}{y+z} \geq \frac{x+y+z}{2} (3)$$

Áp dụng AM - GM , ta có : $\frac{y^2}{z+x}+\frac{z+x}{4} \geq y;$ $\frac{z^2}{x+y}+\frac{x+y}{4} \geq z;$ $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4} \geq x$

Suy ra (3) luôn đúng

$\Rightarrow VT \geq \frac{4}{27}.\frac{9}{4}=\frac{1}{3}$ (đpcm)

Dấu "=" khi a = b = c = 1.