

ĐỀ SỐ 17: ĐỀ TỰ LUYỆN BỒI DƯỠNG HSG CẤP HUYỆN LỚP 8

NĂM HỌC: 2023-2024

Thời gian làm bài 120 phút

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Chọn một phương án đúng

Câu 1. Sau khi rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{3x^2 + 3}{x^3 - 1} - \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{x - 1} \right) : \frac{2x^2 - 5x + 5}{x - 1}$ với $x \neq 1$ là:

- A. $P = \frac{1}{2x^2 - 5x - 5}$ B. $P = \frac{-1}{2x^2 - 5x + 5}$ C. $P = \frac{1}{2x^2 + 5x + 5}$ D. $P = \frac{1}{2x^2 - 5x + 5}$

Câu 2. Cho biểu thức $S = \frac{1}{1^4 + 1^2 + 1} + \frac{2}{2^4 + 2^2 + 1} + \frac{3}{3^4 + 3^2 + 1} + \dots + \frac{2011}{2011^4 + 2011^2 + 1}$ thì:

- A. $S = \frac{2023066}{4046133}$ B. $S < \frac{2023066}{4046133}$ C. $S > \frac{2023066}{4046133}$ D. Một kết quả khác

Câu 3. Cho: $3y - x = 6$. Giá trị biểu thức: $A = \frac{x}{y - 2} + \frac{2x - 3y}{x - 6}$ là:

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 1

Câu 4. Cho đồ thị của các hàm số $d_1: y = -x + 4$ và $d_2: y = x - 4$ trong cùng một mặt phẳng tọa độ. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đường thẳng d_1, d_2 với trục tung và giao điểm của hai đường thẳng là C . Diện tích tam giác ABC là:

- A. 8; B. 12; C. 16; D. 18.

Câu 5. Trên cùng một mặt phẳng tọa độ cho hai điểm $A(5; 2)$ và $B(3; -4)$. Tính hệ số góc đường thẳng AB .

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 5

Câu 6. Đa thức bậc 3 khi biết $f(0) = 1; f(1) = 0; f(2) = 5; f(3) = 22$ là:

- A. $f(x) = x^3 + 2x + 1$ B. $f(x) = x^3 - 2x - 1$ C. $f(x) = x^3 - 2x + 1$ D. $f(x) = -x^3 - 2x + 1$

Câu 7. Đa thức $f(x)$ nếu chia cho $x - 1$ được số dư bằng 4, nếu chia cho $x - 3$ được số dư bằng 14. Đa thức dư của phép chia $f(x)$ cho $(x - 1)(x - 3)$ là:

- A. $5x + 1$ B. $5x - 1$ C. $-5x - 1$ D. $-5x + 1$

Câu 8. Đa thức bậc 3 biết rằng khi cho $f(x)$ chia cho $x - 1; x - 2; x - 3$ đều đủ dư 6 và $f(-1) = -18$ là:

- A. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x$ B. $f(x) = x^3 - 6x^2 - 11x$ C. $f(x) = -x^3 - 6x^2 + 11x$ D. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x$

Câu 9. Độ dài cạnh đáy BC của tam giác cân ABC biết đường cao ứng với cạnh đáy bằng 15,6cm và đường cao ứng với cạnh bên bằng 12cm là:

- A. 12cm B. 13cm C. 15cm D. Một số khác

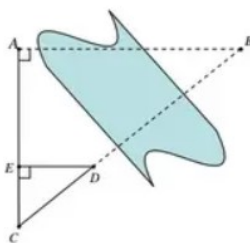
Câu 10. Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác CDE theo tỷ số đồng dạng $k = 2$. Diện tích tam giác CDE biết diện tích tam giác ABC là 112 cm^2 là:

- A. 28 B. 56 C. 112 D. 224

Câu 11. Cho tam giác ABC vuông ở A . Đường phân giác trong của góc B cắt AC tại D . Biết $BD = 7$, $CD = 15$. Độ dài đoạn thẳng AD là:

- A. $AD = 4$ B. $AD = 4,2$
C. $AD = 4,4$ D. $AD = 4,5$

Câu 12: Để đo khoảng cách giữa hai điểm A và B (không thể đo trực tiếp). Người ta xác định các điểm C, D, E (như hình vẽ). Sau đó đo được khoảng cách giữa A và C là $AC = 6 \text{ m}$, khoảng cách giữa C và E là $CE = 2 \text{ m}$; khoảng cách giữa E và D là $DE = 3 \text{ m}$.



Khi đó, khoảng cách giữa hai điểm A và B là:

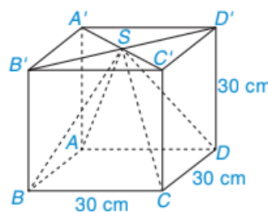
A. 9 m

B. 4 m.

C. 6 m

D. 12 m

Câu 13: Từ một khúc gỗ hình lập phương cạnh 30cm (hình bên), người ta cắt đi một phần gỗ để được phần còn lại là một hình chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông cạnh 30cm và chiều cao của hình chóp cũng là 30cm. Tính thể tích của phần gỗ bị cắt đi.



A. 18000cm^3 ; B. 1800cm^3 ; C. 9000cm^3 ; D. 27000cm^3

Câu 14. Cho hình thoi ABCD cạnh a, có $A = 60^\circ$. Một đường thẳng bất kỳ đi qua C cắt tia đối của các tia BA, DA tương ứng ở M, N. Gọi K là giao điểm của BN và DM. Số đo góc BKD là:

A. 60° B. 80° C. 120° D. 90°

Câu 15: Cho hình bình hành ABCD, trên đường chéo AC lấy điểm E sao cho $AC = 3AE$. Qua E vẽ đường thẳng song song với CD, cắt AD và BC theo thứ tự ở M và N. Xét các khẳng định sau:

(I) $\triangle AME \sim \triangle ADC$, tỉ số đồng dạng $k_1 = \frac{1}{3}$

(II) $\triangle CBA \sim \triangle ADC$, tỉ số đồng dạng $k_2 = 1$

(III) $\triangle CNE \sim \triangle ADC$, tỉ số đồng dạng $k_3 = \frac{2}{3}$

Số khẳng định đúng là:

A. 3. ; B. 2. ; C. 1. ; D. 0.

Câu 16. Hai bạn Xuân và Hạ cùng một lúc rời nhà của mình đi đến nhà bạn. Họ gặp nhau tại một điểm cách nhà Xuân 250 m. Biết rằng Xuân đi từ nhà mình đến nhà Hạ mất 12 phút còn Hạ đi đến nhà Xuân chỉ mất 10 phút. Quảng đường giữa nhà hai bạn là:

A. 450 m

B. 650 m

C. 550 m

D. Một số khác

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1(3,5 điểm):

a. Tìm các giá trị x, y nguyên dương sao cho: $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

b. Cho $a = \underset{\text{có 2008 số 1}}{11\dots1}$; $b = \underset{\text{có 2007 số 0}}{100\dots05}$. Chứng minh $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

Câu 2 (3,0 điểm):

a. Đa thức $f(x)$ chia cho $x-5$ dư 2014, chia cho $x+2$ dư -2018. Tìm dư của phép chia đa thức $f(x)$ cho $x^2-3x-10$.

b. Cho a, b, c từng đôi một khác nhau thoả mãn: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Rút gọn biểu thức $C = \frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ac} + \frac{c^2}{c^2+2ab}$

Câu 3 (4,5 điểm): Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng: $BD \cdot DC = DH \cdot DA$.

b) Chứng minh rằng: $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$.

c) Chứng minh rằng: H là giao điểm các đường phân giác của tam giác DEF.

d) Gọi M, N, P, Q, I, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, CA, AB, EF, FD, DE.

Chứng minh rằng ba đường thẳng MQ, NI, PK đồng quy tại một điểm.

Câu 4 (1,0 điểm): Cho a, b, c > 0; $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$.

---Hết---

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Mỗi câu đúng 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	D	C	B	A	C	C	B	D	B	A
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	B	A	A	C	A	C				

HƯỚNG DẪN

Câu 1. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{3x^2 + 3}{x^3 - 1} - \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{x - 1} \right) : \frac{2x^2 - 5x + 5}{x - 1}$.

a) Rút gọn A .

ĐK: $x \neq 1$

$$A = \frac{3x^2 + 3 - x^2 + 2x - 1 - x^2 - x - 1}{x^3 - 1} \cdot \frac{x - 1}{2x^2 - 5x + 5}$$

$$= \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1} \cdot \frac{x - 1}{2x^2 - 5x + 5} = \frac{1}{2x^2 - 5x + 5}$$

Câu 2. Tính tổng $S = \frac{1}{1^4 + 1^2 + 1} + \frac{2}{2^4 + 2^2 + 1} + \frac{3}{3^4 + 3^2 + 1} + \dots + \frac{2011}{2011^4 + 2011^2 + 1}$.

a) Ta có: $n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)$

Do đó: $\frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n^2 + n + 1) - (n^2 - n + 1)}{(n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2 - n + 1} - \frac{1}{n^2 + n + 1} \right) (*)$

Áp dụng (*) với $n = 1; 2; 3; \dots; 2011$ ta có :

$$S = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{4042111} - \frac{1}{4046133} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4046133} \right) = \frac{2023066}{4046133}$$

Câu 3. Cho: $3y - x = 6$ Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{x}{y - 2} + \frac{2x - 3y}{x - 6}$

$3y - x = 6 \Rightarrow x = 3y - 6$ Thay vào ta có $A = 4$

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình: $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \frac{x+3}{4} \geq 1 + \frac{x}{2}$.

Giải:

$$(2) \Leftrightarrow 6x + 6 + 4x + 8 + 3x + 9 \geq 12 + 6x \Leftrightarrow 7x \geq -11 \Leftrightarrow x \geq -\frac{11}{7} \dots$$

Vậy Tập nghiệm $S = \left[-\frac{11}{7}; +\infty \right)$.

Câu 5: Số nghiệm của phương trình là: $\left| x + \frac{1}{1.5} \right| + \left| x + \frac{1}{5.9} \right| + \left| x + \frac{1}{9.13} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{397.401} \right| = 101x$

=> Mỗi biểu thức trong dấu gttđ luôn dương

Ta có pt:

$$x + \frac{1}{1.5} + x + \frac{1}{5.9} + x + \frac{1}{9.13} + \dots + x + \frac{1}{397.401} = 101x$$

Thu gọn được pt: $101x + \frac{100}{401} = 101x$

Kết luận pt vô nghiệm

Câu 6. Xác định đa thức bậc 3 biết $f(0) = 1; f(1) = 0; f(2) = 5; f(3) = 22$

Giải

Gọi đa thức cần tìm là:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Theo bài ra ta có:

$$f(0) = 1 \Rightarrow d = 1$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = -1 \quad (1)$$

$$f(2) = 5 \Rightarrow 4a + 2b + c = 2 \quad (2)$$

$$f(3) = 22 \Rightarrow 9a + 3b + c = 7 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = 7 \end{cases}$$

Giải ra ta được: $a = 1; b = 0; c = -2$

Vậy đa thức cần tìm là: $f(x) = x^3 - 2x + 1$

Câu 7. Đa thức $f(x)$ nếu chia cho $x - 1$ được số dư bằng 4, nếu chia cho $x - 3$ được số dư bằng 14. Tìm đa thức dư của phép chia $f(x)$ cho $(x - 1)(x - 3)$

Giải:

Cách 1: Gọi thương của phép chia $f(x)$ cho $x - 1$ và cho $x - 3$ theo thứ tự là $A(x)$ và $B(x)$

Ta có:

$$f(x) = (x - 1).A(x) + 4 \text{ với mọi } x \quad (1)$$

$$f(x) = (x - 3).B(x) + 14 \text{ với mọi } x \quad (2)$$

Gọi thương của phép chia $f(x)$ cho $(x - 1)(x - 3)$ là $C(x)$ và dư là $R(x)$. Vì bậc của $R(x)$ nhỏ hơn bậc của số chia nên bậc của nó nhỏ hơn bậc 2 nên $R(x)$ có dạng $ax + b$

$$\text{Ta có: } f(x) = (x - 1)(x - 3).C(x) + ax + b \text{ với mọi } x \quad (3)$$

Thay $x = 1$ vào (1) và (3) ta được: $f(1) = a + b$

Thay $x = 3$ vào (2) và (3) ta được: $f(3) = 14; f(3) = 3a + b$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ 3a + b = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy đa thức dư của phép chia $f(x)$ cho $(x - 1)(x - 3)$ là $5x - 1$

Câu 8. Tìm đa thức bậc 3 biết rằng khi cho $f(x)$ chia cho $x - 1; x - 2; x - 3$ đều đủ dư 6 và $f(-1) = -18$.

Giải:

+ Tìm đa thức phụ:

Theo định lý Bôdu ta có $f(1) = f(2) = f(3) = 6$

Đặt $g(x) = f(x) + ax^2 + bx + c$. Tìm a, b, c để $g(1) = g(2) = g(3) = 0$

$$\Leftrightarrow a, b, c \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 0 = 6 + a + b + c \\ 0 = 6 + 4a + 2b + c \\ 0 = 6 + 9a + 3b + c \end{cases}$$

Giải ra ta được: $a = b = 0; c = -6$ nên đặt $g(x) = f(x) - 6$

Với $g(1) = g(2) = g(3) = 0$

+ Xác định $f(x)$:

Do bậc $f(x) = 3$ nên bậc $g(x) = 3$ và $g(x)$ chia hết cho $(x-1); (x-2); (x-3)$

$\Rightarrow g(x) = n(x-1)(x-2)(x-3)$ ở đó n là hệ số của x^3 trong đa thức $f(x)$

$\Rightarrow f(x) = n(x-1)(x-2)(x-3) + 6$

Mặt khác $f(-1) = -18 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x$

Câu 9. Độ dài cạnh đáy BC của tam giác cân ABC biết đường cao ứng với cạnh đáy bằng 15,6cm và đường cao ứng với cạnh bên bằng 12cm là : 13cm (Bồi dưỡng HSG toán Hình học 8 Trang 121)

Câu 10. Cho tam giác ABC đồng dạng với tam giác CDE theo tỷ số đồng dạng $k=2$. Diện tích tam giác CDE biết diện tích tam giác ABC là 112 cm^2 là:

Giải:

Ta có $\frac{S_{ABC}}{S_{CDE}} = k^2$ thay số vào ta được $\frac{112}{S_{CDE}} = 4 \rightarrow S_{CDE} = 28 \text{ cm}^2$

Câu 11. Cho tam giác ABC vuông ở A. Đường phân giác trong của góc B cắt AC tại D. Biết $BD = 7, CD = 15$. Độ dài đoạn thẳng AD là:

Vẽ $DE \perp BC$ và lấy K đối xứng với D qua H là giao điểm của AE và BD.

Do $\triangle ABD = \triangle EBD$ (BD chung, $\angle ABD = \angle EBD$ nên $DA = DE, BA = BE$).

Suy ra tứ giác AKED là hình thoi. Đặt $KE = ED = AD = AK = x, HD = HK = y$

Từ tam giác vuông EBD: $ED^2 = DH \cdot DB$ hay $x^2 = 7y$ (1)

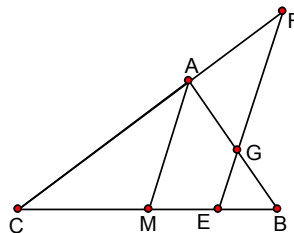
Do $EK \parallel AC$ nên ta có: $\frac{EK}{CD} = \frac{BK}{BD} \Leftrightarrow \frac{x}{15} = \frac{7-2y}{7}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra được $30x^2 + 49x - 735 = 0$ (3)

Giải được phương trình (3) cho $x = 4\frac{1}{5}; x = -5\frac{5}{6}$ (loại do $x > 0$). Nên $AD = 4.2$

Câu 13

Cho tam giác ABC, M là Trung điểm của cạnh BC. Từ 1 điểm E trên cạnh BC ta kẻ $Ex \parallel AM$. Ex cắt tia CA ở F và tia BA ở G. Chứng minh rằng: $FE + EG = 2 AM$



$$\text{HD: } \frac{EF}{AM} = \frac{EC}{CM}, \frac{EG}{AM} = \frac{BE}{CM} \Rightarrow FE + EG = 2 AM$$

Câu 13. Cho $\triangle ABC$, trung tuyến AM, phân giác AMC cắt AC tại H, phân giác góc AMB cắt AB tại K. Chứng minh rằng $HK \parallel BC$.

Lời giải:

Theo giả thiết: MK là phân giác của $\angle AMB \Rightarrow \frac{AK}{KB} = \frac{AM}{MB}$

MH là phân giác góc AMC suy ra: $\frac{AH}{HC} = \frac{AM}{MC}$

Mà MB = MC (theo giả thiết) nên suy ra: $\frac{AH}{HC} = \frac{AK}{KB} \Rightarrow KH \parallel BC$ (định lý Ta-lét đảo)

Câu 14. Cho hình thoi ABCD cạnh a, có $\angle A = 60^\circ$. Một đường thẳng bất kỳ đi qua C cắt tia đối của các tia BA, DA tương ứng ở M, N. Gọi K là giao điểm của BN và DM. Tính $\angle BKD$?

Giải:

Do $BC \parallel AN$ (vì $N \in AD$) nên ta có: $\frac{MB}{AB} = \frac{MC}{NC}$ (1)

Do $CD \parallel AM$ (vì $M \in AB$) nên ta có: $\frac{MC}{NC} = \frac{AD}{DN}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{MB}{AB} = \frac{AD}{DN}$

$\triangle ABD$ có $AB = AD$ (đ/n hình thoi) và $\angle A = 60^\circ$ nên là $\triangle$ đều
 $\Rightarrow AB = BD = DA$

Từ $\frac{MB}{AB} = \frac{AD}{DN}$ (cm trên) $\Rightarrow \frac{MB}{BD} = \frac{BD}{DN}$

Mặt khác: $\angle MBD = \angle DBN = 120^\circ$

Xét $\triangle MBD$ và $\triangle BDN$ có: $\frac{MB}{BD} = \frac{BD}{DN}$; $\angle MBD = \angle DBN$

$\Rightarrow \triangle MBD \sim \triangle BDN$ (c.g.c)

$\Rightarrow \angle M_1 = \angle B_1$

$\triangle MBD$ và $\triangle KBD$ có $\angle M_1 = \angle B_1$; $\angle BDM$ chung $\Rightarrow \angle BKD = \angle MBD = 120^\circ$

Vậy $\angle BKD = 120^\circ$

Câu 15. Cho tứ giác ABCD, gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD và AD. O là điểm nằm trong tứ giác. Gọi M, N, P và Q lần lượt là điểm đối xứng với O qua các điểm E, F, G, H. CMR: Tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Hướng dẫn

Ta thấy $EF \parallel MN$ và $EF = \frac{1}{2}MN$ (theo tính chất đường trung bình)

$EF \parallel AC$ và $EF = \frac{1}{2}AC$ (theo tính chất đường trung bình)

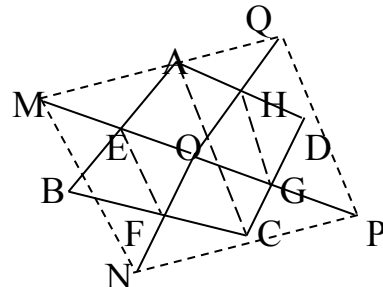
$\Rightarrow MN \parallel AC$ và $MN = AC$ (1)

Tương tự $GH \parallel PQ$ và $GH = \frac{1}{2}PQ$ (theo tính chất đường trung bình)

$GH \parallel AC$ và $GH = \frac{1}{2}AC$ (theo tính chất đường trung bình)

$\Rightarrow QP \parallel AC$ và $PQ = \frac{1}{2}AC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MN \parallel PQ$ và $MN = PQ$. Nên tứ giác MNPQ là hình bình hành



Câu 16. Hai bạn Xuân và Hạ cùng một lúc rời nhà của mình đi đến nhà bạn. Họ gặp nhau tại một điểm cách nhà Xuân 50 m. Biết rằng Xuân đi từ nhà mình đến nhà Hạ mất 12 phút còn Hạ đi đến nhà Xuân chỉ mất 10 phút. Hãy tính quãng đường giữa nhà hai bạn.

Bài giải : Trên cùng một quãng đường thì tỉ số thời gian đi của Xuân và Hạ là : $12 : 10 = 6/5$.

Thời gian tỉ lệ nghịch với vận tốc nên tỉ số vận tốc của Xuân và Hạ là $5/6$. Như vậy Xuân và Hạ cùng xuất phát thì đến khi gặp nhau thì quãng đường Xuân đi được bằng $5/6$ quãng đường Hạ đi được.

Do đó quãng đường Hạ đi được là :

$$250 : 5/6 = 300 \text{ (m)}.$$

Quãng đường giữa nhà Xuân và Hạ là : $250 + 300 = 550 \text{ (m)}$.

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1(3,0 điểm): a. Tìm các giá trị x, y nguyên dương sao cho: $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

$$\text{Ta có } x^2 = y^2 + 2y + 13 \Leftrightarrow x^2 = (y + 1)^2 + 12$$

$$\Leftrightarrow (x + y + 1)(x - y - 1) = 12$$

Do $x + y + 1 - (x - y - 1) = 2y + 2$ là số chẵn và $x, y \in \mathbb{N}^*$ nên

$x + y + 1 > x - y - 1$. Do đó $x + y + 1$ và $x - y - 1$ là hai số nguyên dương chẵn.

Từ đó suy ra chỉ có một trường hợp: $x + y + 1 = 6$ và $x - y - 1 = 2$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ và } y = 1. \text{ Vậy } (x; y) = (4; 1).$$

b. Cho $a = \underbrace{11\dots1}_{\text{có 2008 số 1}}; b = \underbrace{100\dots05}_{\text{có 2007 số 0}}$

Chứng minh $\sqrt{ab+1}$ là số tự nhiên.

$$\text{Cách 1: Ta có } a = \underbrace{11\dots1}_{\text{có 2008 số 1}} = \frac{10^{2008} - 1}{9}; b = \underbrace{100\dots05}_{\text{có 2007 số 0}} = 10^{2008} + 5$$

$$\Rightarrow ab+1 = \frac{(10^{2008} - 1)(10^{2008} + 5)}{9} + 1 = \frac{(10^{2008})^2 + 4 \cdot 10^{2008} - 5 + 9}{9} = \left(\frac{10^{2008} + 2}{3} \right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab+1} = \sqrt{\left(\frac{10^{2008} + 2}{3} \right)^2} = \frac{10^{2008} + 2}{3}$$

$$\text{Ta thấy } 10^{2008} + 2 = \underbrace{100\dots02}_{\text{có 2007 số 0}} : 3 \text{ nên } \frac{10^{2008} + 2}{3} \in \mathbb{N} \text{ hay } \sqrt{ab+1} \text{ là số tự nhiên}$$

Câu 2 (4,0 điểm): a. Đa thức $f(x)$ chia cho $x-5$ dư 2014, chia cho $x+2$ dư -2018. Tìm dư của phép chia đa thức $f(x)$ cho $x^2 - 3x - 10$.

Lời giải

$$x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$$

$$\text{Ta có: } f(x) = (x - 5)(x + 2) \cdot q(x) + r(x).$$

Vì bậc của $r(x)$ nhỏ hơn hoặc bằng 1 nên đặt $r(x) = ax + b$.

Vì $f(x)$ chia cho $x-5$ dư 2014, chia cho $x+2$ dư -2018 nên:

$$f(5) = 5a + b = 2014 \text{ và } f(-2) = -2a + b = -2018$$

Suy ra $a = 576$ và $b = -866$.

Vậy đa thức dư cần tìm là $576x - 866$.

b. Cho a, b, c từng đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$$\text{Rút gọn biểu thức } C = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$$

$$\text{Từ } (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow ab + ac + bc = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 2bc = a^2 + 2bc - (ab + ac + bc) = a^2 - ab + bc - ac = (a - b)(a - c)$$

$$\text{Tương tự: } b^2 + 2ac = (b - a)(b - c); c^2 + 2ab = (c - a)(c - b)$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{a^2}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^2}{(b - a)(b - c)} + \frac{c^2}{(c - a)(c - b)} = \frac{a^2}{(a - b)(a - c)} - \frac{b^2}{(a - b)(b - c)} + \frac{c^2}{(a - c)(b - c)} \\ &= \frac{a^2(b - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)} - \frac{b^2(a - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)} + \frac{c^2(b - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)} = \frac{(a - b)(a - c)(b - c)}{(a - b)(a - c)(b - c)} = 1 \end{aligned}$$

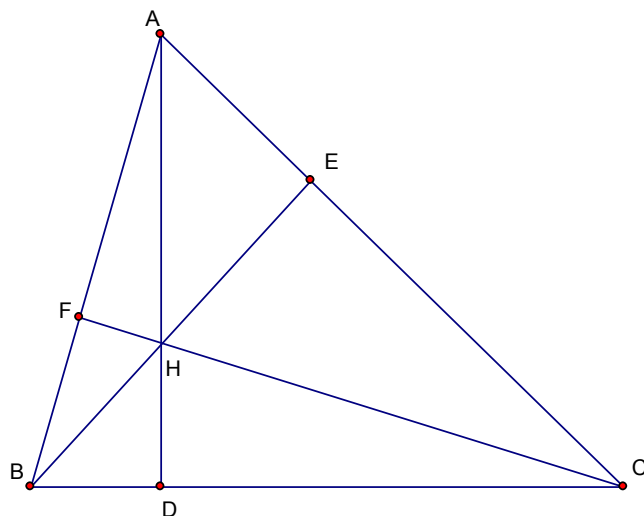
Câu 3 (4,0 điểm): Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng: $BD \cdot DC = DH \cdot DA$.

b) Chứng minh rằng: $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$.

c) Chứng minh rằng: H là giao điểm các đường phân giác của tam giác DEF.

d) Gọi M, N, P, Q, I, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, CA, AB, EF, FD, DE. Chứng minh rằng ba đường thẳng MQ, NI, PK đồng quy tại một điểm.



a) Chỉ ra được $\triangle BDH \sim \triangle ADC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{DH}{DC}$$

$$\Rightarrow BD \cdot DC = DH \cdot DA$$

b) Ta có: $\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}HD.BC}{\frac{1}{2}AD.BC} = \frac{HD}{AD}$

Tương tự: $\frac{HE}{BE} = \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}; \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}.$

Do đó $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$

c) Chứng minh được $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AEF = \angle ABC$

Tương tự $\angle DEC = \angle ACB$. Do đó: $\angle AEF = \angle DEC$

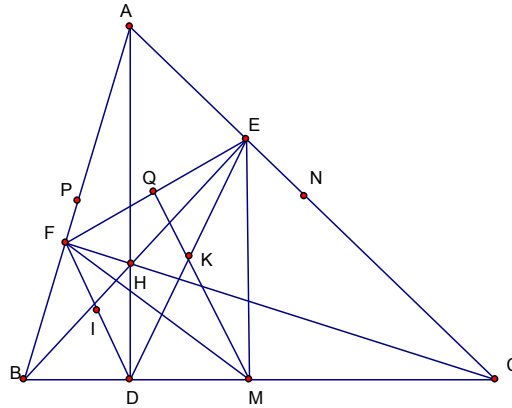
Mà $\angle AEF + \angle HEF = \angle DEC + \angle HED = 90^\circ$ nên $\angle HEF = \angle HED$

$\Rightarrow EH$ là phân giác của góc DEF .

Tương tự FH là phân giác của góc EFD

Do đó H là giao các đường phân giác của tam giác DEF .

d)



Do $\triangle BEC$ vuông tại E , M là trung điểm BC nên $EM = \frac{1}{2}BC$ (trung tuyến ứng với cạnh huyền)

Tương tự: $FM = \frac{1}{2}BC$

Do đó: $\triangle EMF$ cân tại M , mà Q là trung điểm EF nên $MQ \perp EF$

$\Rightarrow MQ$ là đường trung trực của EF hay MQ là đường trung trực của tam giác DEF .

Hoàn toàn tương tự, chứng minh được NI và PK cũng là đường trung trực của tam giác DEF nên ba đường thẳng MQ, NI, PK đồng quy tại một điểm.

Câu 4 (1,0 điểm): Cho $a, b, c > 0$; $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$.

Do $a, b > 0$ và $1 + b^2 \geq 2b$ với mọi b nên $\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$.

Tương tự ta có: $\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}; \frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$

mà $a + b + c = 3$ nên $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}$ (1)

Cũng từ $a + b + c = 3 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 9$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 9$$

mà $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $b^2 + c^2 \geq 2bc$; $c^2 + a^2 \geq 2ac$ nên $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ suy ra $3(ab + bc + ca) \leq 9$

$$\Leftrightarrow ab + bc + ca \leq 3 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Hết