

DẠNG 6**Ví trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng****I. PHẦN ĐỀ BÀI**

- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1; 2; -1)$ cắt mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng $2\sqrt{2}$ có phương trình là
- A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$. B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.
 C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$. D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$.
- Câu 2:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$ cắt mặt phẳng (Oxy) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng
- A. 1. B. 2. C. $\sqrt{5}$. D. $\sqrt{7}$.
- Câu 3:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z - 3 = 0$ cắt mặt cầu (S) tâm $I(1; -3; 2)$ theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 4π . Bán kính của mặt cầu (S)
- A. 2. B. $\sqrt{20}$. C. $2\sqrt{2}$. D. 3.
- Câu 4:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-2; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 10 = 0$. Tính bán kính r của mặt cầu (S) có tâm I và cắt (P) theo một đường tròn (T) có chu vi bằng 10π .
- A. $r = \sqrt{5}$. B. $r = 34$. C. $r = 5$. D. $r = \sqrt{34}$.
- Câu 5:** Trong không gian $Oxyz$, biết phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 25$ cắt mặt phẳng $(P): x + y + z = 3\sqrt{3}$ theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính r . Khi đó giá trị của r là:
- A. 4. B. $\frac{5}{3}$. C. 5. D. 3.
- Câu 6:** Mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 49$ tiếp xúc với mặt phẳng nào sau đây?
- A. $(\beta): 2x - y - 2z + 16 = 0$. B. $(\gamma): 2x + y - 2z - 16 = 0$.
 C. $(\alpha): 3x - 2y - 6z + 16 = 0$. D. $(\delta): 2x - y - 2z - 16 = 0$.
- Câu 7:** Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 2m - 3 = 0$ không có điểm chung với mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0$.
- A. $\begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m > \frac{15}{2} \end{cases}$. B. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$. C. $\frac{3}{2} < m < \frac{15}{2}$. D. $-1 < m < 3$.

- Câu 8:** Trong mặt phẳng $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2$ và điểm $A(1;1;0)$ thuộc mặt cầu (S) . Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A có phương trình là $ax + y + cz + d = 0$. Tính $a + c - d$.
- A. 1. B. -1. C. 2. D. -2.
- Câu 9:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;2;-2)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 5 = 0$. Gọi (S) là mặt cầu tâm I cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích bằng 16π . Tính bán kính mặt cầu (S) ?
- A. 5 B. 6. C. 3. D. 4.
- Câu 10:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 9$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm $A(2;-4;3)$?
- A. $x - 2y - 2z + 4 = 0$. B. $3x - 6y + 8z - 54 = 0$.
C. $x - 2y - 2z - 4 = 0$. D. $x - 6y + 8z - 50 = 0$.
- Câu 11:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ và điểm $A(2;1;3)$. Biết rằng mặt phẳng $(P): ax + y + cz + d = 0$ đi qua gốc O và điểm A đồng thời cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính lớn nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T = a + c + d$ bằng
- A. 3. B. 5. C. -1. D. 6.
- Câu 12:** Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16$. Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng tọa độ (Oxy) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng
- A. $2\sqrt{3}$. B. 2. C. $2\sqrt{5}$. D. 12.
- Câu 13:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) tâm $I = (2;0;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z + 11 = 0$ là
- A. $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 25$. B. $(x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$.
C. $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 10$. D. $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5$.
- Câu 14:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 25$. Gọi $(P): x + my + z + 9 = 0$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) thì giá trị thực dương của m tương ứng nằm trong khoảng:
- A. $(0;1)$. B. $(2;3)$. C. $(3;4)$. D. $(1;2)$.
- Câu 15:** Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16$. Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng tọa độ (Oxy) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính
- A. $2\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{5}$. D. 2.
- Câu 16:** Cho hình cầu có đường kính bằng $2a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) cắt hình cầu theo thiết diện là hình tròn có bán kính bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ tâm hình cầu đến mặt phẳng (P) .

A. $a\sqrt{10}$ B. $\frac{a}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$ D. a

Câu 17: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;0;-2)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x + 2y - 2z + 4 = 0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

A. $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$. B. $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 3$.
C. $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$. D. $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 3$.

Câu 18: Cho mặt cầu $S(O;r)$, mặt phẳng (P) cách tâm O một khoảng bằng $\frac{r}{2}$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn. Hãy tính theo r chu vi của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S)

A. $\pi r\sqrt{3}$. B. πr . C. $\frac{\pi r\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{\pi r\sqrt{3}}{2}$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2$ và điểm $A(1;1;0)$ thuộc mặt cầu (S) . Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A có phương trình là $ax + y + cz + d = 0$. Tính $a + c - d$.

A. 1. B. -1. C. 2. D. -2.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Mặt phẳng (Oxy) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn. Đường tròn giao tuyến này có bán kính r bằng

A. $r = \sqrt{5}$. B. $r = 2$. C. $r = \sqrt{6}$. D. $r = 4$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;1;3), B(-1;3;2), C(-1;2;3)$. Phương trình mặt cầu có tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) là

A. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. B. $x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{3}$. C. $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{3}$. D. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 10z + 14 = 0$. Mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$ cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi là

A. $4\pi\sqrt{3}$. B. 2π . C. 4π . D. 8π .

Câu 23: Mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 49$ tiếp xúc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(\beta): 2x - y - 2z + 16 = 0$. B. $(\gamma): 2x + y - 2z - 16 = 0$.
C. $(\alpha): 3x - 2y - 6z + 16 = 0$. D. $(\delta): 2x - y - 2z - 16 = 0$.

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 2m - 3 = 0$ không có điểm chung với mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0$.

A. $\begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m > \frac{15}{2} \end{cases}$. B. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$. C. $\frac{3}{2} < m < \frac{15}{2}$. D. $-1 < m < 3$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) với tâm $I(1;1;0)$ và mặt phẳng (P): $x + y + z + 1 = 0$. Biết (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Khi đó mặt cầu (S) có phương trình là:

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2$. B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$.
C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$. D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3$.

Câu 26: Trong không gian Oxyz, gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $M(1;-1;0)$, $N(1;2;1)$ và tiếp xúc với mặt cầu (S): $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 14$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $2x + y - 3z - 1 = 0$ và $38x - 5y + 15z - 43 = 0$.
B. $2x + y - 3z - 1 = 0$ và $38x + 5y - 15z - 33 = 0$.
C. $2x - y + 3z - 3 = 0$ và $38x - 5y + 15z - 43 = 0$.
D. $2x - y + 3z - 3 = 0$ và $38x + 5y - 15z - 33 = 0$.

Câu 27: Trong không gian Oxyz, mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z + 2 = 0$ cắt mặt phẳng (Oyz) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng

A. 3. B. 1. C. $2\sqrt{2}$. D. $\sqrt{2}$.

Câu 28: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (α): $2x + my + 3z - 2 = 0$ (m là tham số thực) và mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$. Tìm giá trị của tham số m để mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn.

A. $m = -1$. B. $m = 1$. C. $m = 0$. D. $m = 2$.

Câu 29: Trong hệ trục tọa độ không gian Oxyz, cho điểm $A(-2;1;2)$ và mặt phẳng (P): $x - z + 6 = 0$. Tập hợp các điểm $M \in (P)$ sao cho $MO + MA = 8$ là một đường cong (L), diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong này bằng

A. $16\sqrt{2}\pi$. B. 7π . C. $4\sqrt{2}\pi$. D. $4\sqrt{7}\pi$.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P): $2x - 2y + z - 17 = 0$. Biết mặt phẳng (Q) cắt mặt cầu (S): $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$ theo một đường tròn có chu vi bằng 6π . Khi đó mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $x - y + 2z - 7 = 0$. B. $2x - 2y + z + 17 = 0$.
C. $2x - 2y + z + 7 = 0$. D. $2x - 2y + z - 17 = 0$ và $2x - 2y + z + 7 = 0$.

Câu 31: Trong không gian Oxyz, biết mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ cắt mặt phẳng (P): $x + y + z = 3\sqrt{3}$ theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính r . Khi đó giá trị của r là:

A. 4. B. $\frac{5}{3}$. C. 5. D. 3.

- Câu 32:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 5x + by + cz + d = 0$ đi qua điểm $A(-1; 5; 7)$, $B(4; 2; 3)$ và cắt mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ theo giao tuyến là đường tròn có chu vi nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $T = 3b - 2c$.
- A. 1. B. 9. C. 6. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 33:** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 4y - 2z + 4m - 11 = 0$, m là tham số thực. Biết mặt cầu (S) luôn chứa một đường tròn cố định (C) . Bán kính của (C) bằng
- A. 3. B. $3\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\sqrt{6}$.
- Câu 34:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và các điểm $A(3; 2; 4)$, $B(5; 3; 7)$. Mặt cầu (S) thay đổi đi qua A, B và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính $r = 2\sqrt{2}$. Biết tâm của (C) luôn nằm trên đường tròn cố định (C_1) . Bán kính của (C_1) là
- A. 12. B. $2\sqrt{14}$. C. 6. D. $\sqrt{14}$.
- Câu 35:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ và điểm $M(2; -1; 2)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C) thỏa mãn khối nón có đỉnh là tâm của mặt cầu (S) và đường tròn đáy là (C) có thể tích lớn nhất bằng
- A. $\frac{250\pi\sqrt{6}}{27}$. B. $\frac{19\pi\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{19\pi\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{250\pi\sqrt{3}}{27}$.
- Câu 36:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 2 = 0$. Mặt cầu (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng
- A. 1. B. 3. C. $\sqrt{7}$. D. $\sqrt{10}$.
- Câu 37:** Trong $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): 4x + 3y - 2z = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung.
- A. $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = \frac{21}{2}$. B. $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = -\frac{21}{2}$.
C. $m = -\frac{9}{2}$ hoặc $m = \frac{31}{2}$. D. $m = \frac{1}{2}$.
- Câu 38:** Trên mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 4)$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 1 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm là điểm I , bán kính $R = 6$, đi qua điểm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm H . Biết rằng tập hợp điểm H là một đường tròn có bán kính r . Tính tỉ số $\frac{R}{r}$.
- A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

- Câu 39:** Trong không gian Oxyz cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 5$. Mặt phẳng (P) chứa trục tung và tiếp xúc với mặt cầu (S) có phương trình là
A. $x + 2z = 0$. **B.** $y - 2z = 0$. **C.** $x - 2z = 0$. **D.** $y + 2z = 0$.
- Câu 40:** Trong không gian oxyz, cho hai điểm $A(1; -2; 2)$ và $B(2; 2; 1)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn $MOA = MOB$ là mặt phẳng (P) . Hỏi (P) tiếp xúc với mặt cầu nào sau đây?
A. $(S_2): (x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-6)^2 = 25$. **B.** $(S_4): (x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-6)^2 = 20$.
C. $(S_3): (x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-6)^2 = 18$. **D.** $(S_1): (x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-6)^2 = 16$.
- Câu 41:** Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 5x + by + cz + d = 0$ đi qua điểm $A(-1; 5; 7)$, $B(4; 2; 3)$ và cắt mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ theo giao tuyến là đường tròn có chu vi nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $T = 3b - 2c$.
A. 1. **B.** 9. **C.** 6. **D.** $\frac{1}{2}$.
- Câu 42:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z - 13 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 - 2y + m = 0$. Để (P) tiếp xúc với (S) thì giá trị tham số m nằm trong khoảng nào dưới đây?
A. $(9; 13)$. **B.** $(-6; -4)$. **C.** $(-12; -9)$. **D.** $(-4; 0)$.
- Câu 43:** Trong không gian Oxyz, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 4y - 2z + 4m - 11 = 0$, m là tham số thực. Biết mặt cầu (S) luôn chứa một đường tròn cố định (C) . Bán kính của (C) bằng
A. 3. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{6}$.
- Câu 44:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và các điểm $A(3; 2; 4)$, $B(5; 3; 7)$. Mặt cầu (S) thay đổi đi qua A, B và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính $r = 2\sqrt{2}$. Biết tâm của (C) luôn nằm trên đường tròn cố định (C_1) . Bán kính của (C_1) là
A. 12. **B.** $2\sqrt{14}$. **C.** 6. **D.** $\sqrt{14}$.
- Câu 45:** Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ và điểm $M(2; -1; 2)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C) thỏa mãn khối nón có đỉnh là tâm của mặt cầu (S) và đường tròn đáy là (C) có thể tích lớn nhất bằng
A. $\frac{250\pi\sqrt{6}}{27}$. **B.** $\frac{19\pi\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{19\pi\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{250\pi\sqrt{3}}{27}$.
- Câu 46:** Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 2 = 0$. Mặt cầu (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng
A. 1. **B.** 3. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Câu 47: Trong Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): 4x + 3y - 2z = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung.

- A. $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = \frac{21}{2}$. B. $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = -\frac{21}{2}$.
C. $m = -\frac{9}{2}$ hoặc $m = \frac{31}{2}$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Câu 48: Trên mặt phẳng tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1; -2; 4)$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 1 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm là điểm I , bán kính $R = 6$, đi qua điểm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm H . Biết rằng tập hợp điểm H là một đường tròn có bán kính r . Tính tỉ số $\frac{R}{r}$.

- A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 49: Trong không gian Oxyz cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 5$. Mặt phẳng (P) chứa trục tung và tiếp xúc với mặt cầu (S) có phương trình là

- A. $x + 2z = 0$. B. $y - 2z = 0$. C. $x - 2z = 0$. D. $y + 2z = 0$.

Câu 50: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): (1-m)x + (m-m^2)y + mz + 1 = 0$. Khi m thay đổi luôn tồn tại mặt cầu (S) cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và đi qua $D(2; -3; 4)$. Biết bán kính của mặt cầu (S) nhỏ hơn 5. Bán kính của mặt cầu (S) nằm trong khoảng

- A. $(1; 2)$. B. $(2; 3)$. C. $(3; 4)$. D. $(4; 5)$.

Câu 51: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 5 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 20 = 0$. Đường tròn (C) là giao tuyến của (S) và (P) . Gọi A là điểm nằm trên (C) . Giá trị lớn nhất của hoành độ điểm A là

- A. $\frac{-3+4\sqrt{5}}{3}$. B. $\frac{3+4\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{6-2\sqrt{5}}{3}$. D. 6.

Câu 52: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4z = 3 \\ mx - 2y - z + 3m = 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất. Tổng các phần tử của S là

- A. $-\frac{23}{13}$. B. $-\frac{6}{5}$. C. $-\frac{19}{5}$. D. $-\frac{12}{13}$.

Câu 53: Trong không gian cho ba điểm $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$ với a, b, c là các số thực khác 0, mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M(2; 4; 5)$. Biết rằng mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ cắt mặt phẳng (ABC) theo giao tuyến là 1 đường tròn có chu vi 8π . Giá trị của biểu thức bằng $P = a + b - c$:

- A. 30. B. 40. C. 4. D. 20.

- Câu 54:** Do đó $A(20;0;0), B(0;10;0); C(0;0;10)$ và $P = 20 + 10 - 10 = 20$. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(10;5;0), B(1;5;9)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 64$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 15 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + 2b + 3c$.
- A. $T = 6$. B. $T = 14$. C. $T = -6$. D. $T = 15$.
- Câu 55:** Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+z^2+21}(2x+4y-8z+m) \geq 1$ và $x+3y-2z-1=0$ (với m là số thực dương). Khi $m = m_0$ có duy nhất bộ $(x; y; z)$ thỏa mãn các điều kiện trên thì m_0 thuộc khoảng nào?
- A. $(1;6)$. B. $(11;14)$. C. $(13;17)$. D. $(5;13)$.
- Câu 56:** Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \frac{64}{9}$. Trên tia Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C thỏa mãn $\frac{1}{OA} + \frac{2}{OB} + \frac{2}{OC} = 9$. Biết mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với mặt cầu (S) . Thể tích khối chóp $OABC$ là
- A. $\frac{1}{12}$. B. $\frac{1}{24}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{1}{4}$.
- Câu 57:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1;2;-3), B\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right), C(1;1;4), D(5;3;0)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A bán kính bằng 3, (S_2) là mặt cầu tâm B bán kính bằng $\frac{3}{2}$. Có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với 2 mặt cầu $(S_1), (S_2)$ đồng thời song song với đường thẳng đi qua C và D .
- A. 1. B. 2. C. 4. D. Vô số.
- Câu 58:** Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ và điểm $A(1;1;-1)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua điểm A và đôi một vuông góc với nhau, cắt (S) theo giao tuyến là ba đường tròn. Tổng diện tích của ba hình tròn đó bằng
- A. 12π . B. 3π . C. 22π . D. 11π .

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(1; 2; -1)$ cắt mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng $2\sqrt{2}$ có phương trình là

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9.$

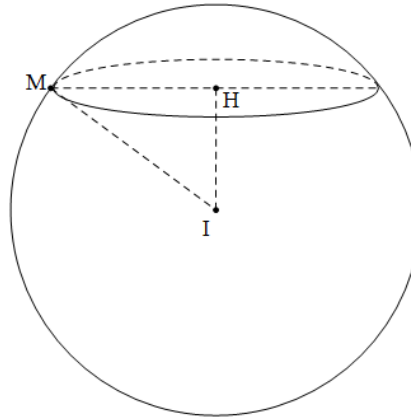
B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9.$

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3.$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3.$

Lời giải

Chọn B



Giả sử đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có tâm H , bán kính HM .

$$IH = d(I, (P)) = \frac{|2 - 2 - 2 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 1.$$

Bán kính của mặt cầu (S) là $r = IM = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3.$

Vậy phương trình của mặt cầu (S) : $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9.$

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$ cắt mặt phẳng (Oxy) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng

A. 1.

B. 2.

C. $\sqrt{5}.$

D. $\sqrt{7}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; 2)$ và bán kính $R = 3$

Mặt phẳng $(Oxy): z = 0$

Do đó bán kính đường tròn giao tuyến là $r = \sqrt{R^2 - d^2(I; (Oxy))} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z - 3 = 0$ cắt mặt cầu (S) tâm $I(1; -3; 2)$ theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 4π . Bán kính của mặt cầu (S)

A. 2.

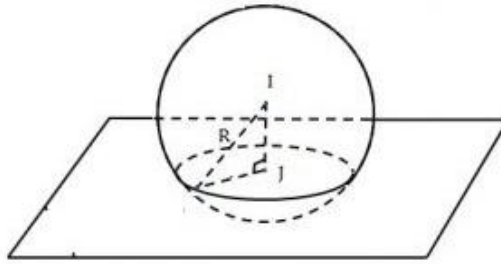
B. $\sqrt{20}.$

C. $2\sqrt{2}.$

D. 3.

Lời giải

Chọn C



Bán kính của đường tròn là r . Theo bài ra $2r\pi = 4\pi \Leftrightarrow r = 2$. Hình chiếu vuông góc của $I(1; -3; 2)$ xuống (α) là J . Ta có $IJ = d(I, (\alpha)) = \frac{|2 \cdot 1 - (-3) + 2 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 2$.

Gọi bán kính của mặt cầu là R , $R^2 = (IJ)^2 + r^2 = 8 \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-2; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 10 = 0$. Tính bán kính r của mặt cầu (S) có tâm I và cắt (P) theo một đường tròn (T) có chu vi bằng 10π .

- A. $r = \sqrt{5}$. B. $r = 34$. C. $r = 5$. D. $r = \sqrt{34}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là hình chiếu của I lên (P) .

Khi đó $IH = d(I, (P)) = 3$.

Đường tròn (T) có chu vi là 10π nên có bán kính là $r' = \frac{10\pi}{2\pi} = 5$.

(P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (T) nên $r = \sqrt{r'^2 + IH^2} = \sqrt{34}$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, biết phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 25$ cắt mặt phẳng $(P): x + y + z = 3\sqrt{3}$ theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính r . Khi đó giá trị của r là:

- A. 4. B. $\frac{5}{3}$. C. 5. D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: (S) có tâm $I(0; 0; 0)$ và bán kính $R = 5$

$$d_{(I; (P))} = \frac{|0 + 0 + 0 - 3\sqrt{3}|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = 3$$

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = 4$$

Câu 6: Mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 49$ tiếp xúc với mặt phẳng nào sau đây?

- A. $(\beta): 2x - y - 2z + 16 = 0$. B. $(\gamma): 2x + y - 2z - 16 = 0$.
C. $(\alpha): 3x - 2y - 6z + 16 = 0$. D. $(\delta): 2x - y - 2z - 16 = 0$.

Lời giải

Chọn A

(S) có tâm $I(2; -1; 0)$; $R = 7$

$$\text{Xét phương án A ta có: } d(I, (\beta)) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 - 2 \cdot 0 + 16|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{21}{3} = 7 = R.$$

Vậy mặt phẳng (β) tiếp xúc với mặt cầu (S).

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 2m - 3 = 0$ không có điểm chung với mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0$.

A. $\begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m > \frac{15}{2} \end{cases}$ B. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$ C. $\frac{3}{2} < m < \frac{15}{2}$ D. $-1 < m < 3$.

Lời giải

Chọn A

(S) có tâm $I(-1; 0; 2)$ và bán kính $R = 2$.

$$d(I, (P)) = \frac{|-2 - 4 + 2m - 3|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|2m - 9|}{3}.$$

Để mặt phẳng (P) không có điểm chung với mặt cầu (S) thì

$$d(I, (P)) > R \Leftrightarrow \frac{|2m - 9|}{3} > 2 \Leftrightarrow |2m - 9| > 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 9 > 6 \\ 2m - 9 < -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m > \frac{15}{2} \end{cases}.$$

Câu 8: Trong mặt phẳng Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 2$ và điểm $A(1; 1; 0)$ thuộc mặt cầu (S). Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A có phương trình là $ax + y + cz + d = 0$. Tính $a + c - d$.

A. 1. B. -1. C. 2. D. -2.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 0; 0)$.

Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A có vector pháp tuyến là $\vec{IA} = (-1; 1; 0)$ nên có phương trình $-(x - 1) + (y - 1) + 0 \cdot (z - 0) = 0 \Leftrightarrow -x + y = 0$.

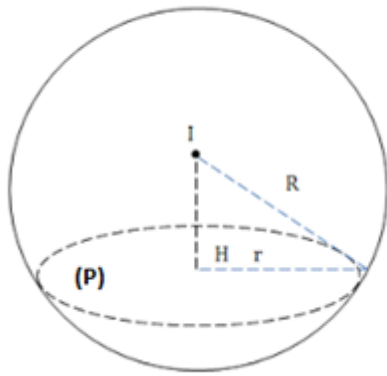
Khi đó $a = -1, c = 0, d = 0$. Suy ra $a + c - d = -1$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $I(1; 2; -2)$ và mặt phẳng (P): $2x + 2y + z + 5 = 0$. Gọi (S) là mặt cầu tâm I cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích bằng 16π . Tính bán kính mặt cầu (S)?

A. 5 B. 6. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P) . Khi đó $IH = d(I; (P)) = 3$

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích bằng 16π . Đường tròn này có bán kính $r = 4$.

Vậy bán kính mặt cầu là: $R = \sqrt{IH^2 + r^2} = 5$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = 9$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm $A(2; -4; 3)$?

- A. $x - 2y - 2z + 4 = 0$. B. $3x - 6y + 8z - 54 = 0$.
C. $x - 2y - 2z - 4 = 0$. D. $x - 6y + 8z - 50 = 0$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 5)$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm $A(2; -4; 3)$ nên có vec tơ pháp tuyến là $\vec{n} = \overrightarrow{IA} = (1; -2; -2)$.

Phương trình mặt phẳng $(P): 1(x-2) - 2(y+4) - 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 2z - 4 = 0$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ và điểm $A(2; 1; 3)$. Biết rằng mặt phẳng $(P): ax + y + cz + d = 0$ đi qua gốc O và điểm A đồng thời cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính lớn nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T = a + c + d$ bằng

- A. 3. B. 5. C. -1. D. 6.

Lời giải

Chọn C

$(P): ax + y + cz + d = 0$ đi qua gốc O suy ra $d = 0$.

$(P): ax + y + cz + d = 0$ đi qua điểm A suy ra: $2a + 1 + 3c = 0$.

$(P): ax + y + cz + d = 0$ cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính lớn nhất, do đó

$(P): ax + y + cz + d = 0$ đi qua điểm $I(1; 2; 0)$ là tâm mặt cầu (S) suy ra: $a + 2 = 0$.

Vậy $a = -2; c = 1; d = 0 \Rightarrow T = a + c + d = -2 + 1 + 0 = -1$.

- Câu 12:** Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16$. Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng tọa độ (Oxy) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng
- A. $2\sqrt{3}$. B. 2. C. $2\sqrt{5}$. D. 12.

Lời giải

Chọn A

+ Phương trình mặt phẳng (Oxy) là: $z = 0$.

+ Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 0; -2)$, bán kính $R = 4$.

Ta có: $d = d(I; (Oxy)) = 2 < R$ nên mặt phẳng (Oxy) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$.

- Câu 13:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) tâm $I = (2; 0; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z + 11 = 0$ là
- A. $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 25$. B. $(x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$.
C. $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 10$. D. $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5$.

Lời giải

Chọn A

Bán kính mặt cầu là: $R = d(I; (P)) = \frac{|2 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) + 11|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 5$.

Phương trình mặt cầu là: $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 25$.

- Câu 14:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 25$. Gọi $(P): x + my + z + 9 = 0$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) thì giá trị thực dương của m tương ứng nằm trong khoảng:
- A. $(0; 1)$. B. $(2; 3)$. C. $(3; 4)$. D. $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn D

$(S): x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 25$ có tâm $I(0; 0; 2)$ và bán kính $R = 5$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) $d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|11|}{\sqrt{2+m^2}} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{2+m^2} = \frac{11}{5} \Leftrightarrow m = \pm \sqrt{\frac{71}{25}}$

Mà m là số thực dương nên $m = \sqrt{\frac{71}{25}} \approx 1,68$

- Câu 15:** Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16$. Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng tọa độ (Oxy) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính
- A. $2\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{5}$. D. 2.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 0; -2)$, bán kính $R = 4$.

Ta có bán kính đường tròn là $r = \sqrt{R^2 - d_{(I, (Oxy))}^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$.

Câu 16: Cho hình cầu có đường kính bằng $2a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) cắt hình cầu theo thiết diện là hình tròn có bán kính bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ tâm hình cầu đến mặt phẳng (P) .

- A. $a\sqrt{10}$ B. $\frac{a}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$ D. a

Lời giải

Chọn D

♦ Hình cầu đã cho có bán kính $R = a\sqrt{3}$.

khoảng cách từ tâm hình cầu đến mặt phẳng (P) là $d = \sqrt{R^2 - r^2} = a$.

Câu 17: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;0;-2)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x + 2y - 2z + 4 = 0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

- A. $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$. B. $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 3$.
C. $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$. D. $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 3$.

Lời giải

Chọn A

Khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (P) là: $d(I;(P)) = \frac{|1 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 3$.

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên $d(I;(P)) = R = 3$.

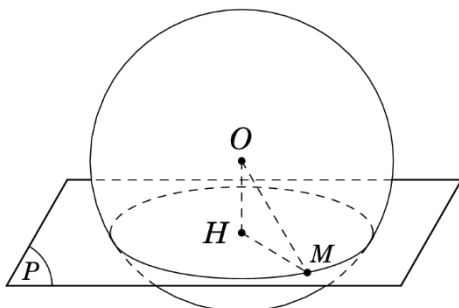
Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R = 3$ là: $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$.

Câu 18: Cho mặt cầu $S(O;r)$, mặt phẳng (P) cách tâm O một khoảng bằng $\frac{r}{2}$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn. Hãy tính theo r chu vi của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S)

- A. $\pi r\sqrt{3}$. B. πr . C. $\frac{\pi r\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{\pi r\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) và M là một điểm trên đường tròn giao tuyến như hình vẽ.

Từ giả thiết, ta có $OM = r, OH = \frac{r}{2} \Rightarrow HM = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$.

Chu vi đường tròn $C = 2\pi \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} = \pi r\sqrt{3}$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2$ và điểm $A(1;1;0)$ thuộc mặt cầu (S) . Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A có phương trình là $ax + y + cz + d = 0$. Tính $a + c - d$.

A. 1.

B. -1.

C. 2.

D. -2.

Lời giải**Chọn B**

Ta có, mặt cầu $(S): (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2$ có tâm $I(2;0;0)$ và có bán kính $R = \sqrt{2}$.

Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm $A(1;1;0)$ nên đi qua A và nhận $\overrightarrow{AI} = (1; -1; 0)$ làm vector pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng này là: $(x-1) - (y-1) = 0 \Leftrightarrow -x + y = 0$.

Vậy $a = -1; c = 0; d = 0 \Rightarrow a + c - d = -1$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Mặt phẳng (Oxy) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn. Đường tròn giao tuyến này có bán kính r bằng

A. $r = \sqrt{5}$.B. $r = 2$.C. $r = \sqrt{6}$.D. $r = 4$.**Lời giải****Chọn A**

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

Khoảng cách từ $I(1;2;3)$ đến mặt phẳng (Oxy) là $h = |z_I| = 3$.

Do đó bán kính $r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{14 - 9} = \sqrt{5}$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;1;3), B(-1;3;2), C(-1;2;3)$. Phương trình mặt cầu có tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) là

A. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. B. $x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{3}$. C. $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{3}$. D. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

Lời giải**Chọn D**

Ta có: $\overrightarrow{AB}(-2;2;-1), \overrightarrow{AC}(-2;1;0) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (1;2;2)$

Phương trình mặt phẳng (ABC) qua điểm $A(1;1;3)$ có VTPT $(1;2;2)$

$$1(x-1) + 2(y-1) + 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 9 = 0$$

$$\text{Vì mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu nên: } R = d(O; (ABC)) = \frac{9}{\sqrt{1+4+4}} = 3$$

Vậy phương trình mặt cầu là $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 10z + 14 = 0$. Mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$ cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có chu vi là

A. $4\pi\sqrt{3}$.B. 2π .C. 4π .D. 8π .**Lời giải**

Chọn C

Ta có $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 10z + 14 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 16$.

$\Rightarrow (S)$ có tâm $I = (2; 1; -5)$, bán kính $R = 4$.

Ta có $d = d(I, (P)) = \frac{|2+1-5-4|}{\sqrt{1+1+1}} = 2\sqrt{3}$.

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{16 - (2\sqrt{3})^2} = 2$.

Chu vi đường tròn giao tuyến là $2\pi r = 4\pi$.

Câu 23: Mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 49$ tiếp xúc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(\beta): 2x - y - 2z + 16 = 0$.

B. $(\gamma): 2x + y - 2z - 16 = 0$.

C. $(\alpha): 3x - 2y - 6z + 16 = 0$.

D. $(\delta): 2x - y - 2z - 16 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 49$ có tâm $I(2; -1; 0)$ và bán kính $R = 7$.

Ta có $d[I; (\beta)] = \frac{|2 \cdot 2 - (-1) - 2 \cdot 0 + 16|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = 7 = R$.

Vậy (S) tiếp xúc với mặt phẳng (β) .

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 2m - 3 = 0$ không có điểm chung với mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0$.

A. $\begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m > \frac{15}{2} \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$.

C. $\frac{3}{2} < m < \frac{15}{2}$.

D. $-1 < m < 3$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 0; 2)$ và bk $R = 2$

(P) không có điểm chung với $(S) \Leftrightarrow d(I; (P)) > R$.

$$\Leftrightarrow \frac{|2 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 + 2m - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} > 2$$

$$\Leftrightarrow |2m - 9| > 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 9 < -6 \\ 2m - 9 > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m > \frac{15}{2} \end{cases}$$

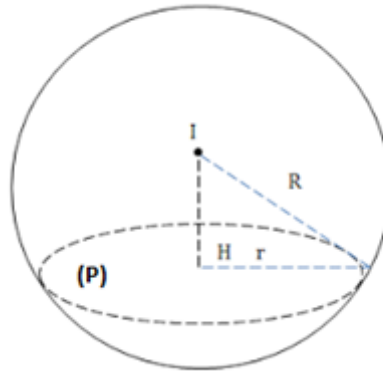
Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) với tâm $I(1; 1; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$. Biết (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Khi đó mặt cầu (S) có phương trình là:

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2$.

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$.

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1.$

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3.$

Lời giải**Chọn B**Theo giả thiết có $r = 1.$ Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P) . Khi đó $IH = d(I, (P)) = \sqrt{3}.$ Do đó bán kính mặt cầu là: $R = \sqrt{IH^2 + r^2} = 2.$ Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4.$

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $M(1; -1; 0)$, $N(1; 2; 1)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 14$. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $2x + y - 3z - 1 = 0$ và $38x - 5y + 15z - 43 = 0.$

B. $2x + y - 3z - 1 = 0$ và $38x + 5y - 15z - 33 = 0.$

C. $2x - y + 3z - 3 = 0$ và $38x - 5y + 15z - 43 = 0.$

D. $2x - y + 3z - 3 = 0$ và $38x + 5y - 15z - 33 = 0.$

Lời giải**Chọn B**Mặt cầu S có tâm $I(-2; -3; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{14}.$ Phương trình mặt phẳng P có dạng: $ax + by + cz + d = 0$ $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$

Theo giả thiết ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} M, N \in P \\ d(I, P) = R \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{|-2a - 3b + 2c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \sqrt{14} \\ a - b + d = 0 \\ a + 2b + c + d = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{|-2a - 3b + 2c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \sqrt{14} \\ a + d = b \\ 3b + c = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + d = b \\ c = -3b \\ \frac{|-3a + a + d - 3b + 2 - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + 9b^2}} = \sqrt{14} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + d = b \\ c = -3b \\ \frac{|-3a - 8b|}{\sqrt{a^2 + 10b^2}} = \sqrt{14} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+d=b \\ c=-3b \\ 3a+8b^2=14a^2+10b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+d=b \\ c=-3b \\ 5a^2-48ab+76b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+d=b \\ c=-3b \\ \begin{cases} a=2b \\ a=\frac{38}{5}b \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ c=-3b \\ d=-b \\ a=\frac{38}{5}b \\ c=-3b \\ d=-\frac{33}{5}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P: 2x+y-3z-1=0 \\ P: \frac{38}{5}x+y-3z-\frac{33}{5}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P: 2x+y-3z-1=0 \\ P: 38x+5y-15z-33=0 \end{cases}$$

Câu 27: Trong không gian Oxyz, mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z + 2 = 0$ cắt mặt phẳng (Oyz) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng

- A. 3. B. 1. C. $2\sqrt{2}$. D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z + 2 = 0$ có tâm $I(1; -1; 3)$ và có bán kính $R = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2 - 2} = 3$.

Mặt phẳng (Oyz) có phương trình $x = 0$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (Oyz) là $h = d(I, (Oyz)) = \frac{|1|}{\sqrt{1^2}} = 1$.

Bán kính đường tròn giao tuyến cần tìm là $r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$.

Câu 28: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (α): $2x + my + 3z - 2 = 0$ (m là tham số thực) và mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$. Tìm giá trị của tham số m để mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn.

- A. $m = -1$. B. $m = 1$. C. $m = 0$. D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn lớn khi mặt phẳng đi qua tâm mặt cầu. Ta có tâm $I(1; 2; 0)$, thay tọa độ tâm I vào phương trình mặt phẳng (α) ta được $m = 0$.

Câu 29: Trong hệ trục tọa độ không gian Oxyz, cho điểm $A(-2; 1; 2)$ và mặt phẳng (P): $x - z + 6 = 0$. Tập hợp các điểm $M \in (P)$ sao cho $MO + MA = 8$ là một đường cong (L), diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong này bằng

A. $16\sqrt{2}\pi$.

B. 7π .

C. $4\sqrt{2}\pi$.

D. $4\sqrt{7}\pi$

Lời giải**Chọn B**

Gọi $M(x; y; z) \in (P) \Rightarrow x - z + 6 = 0$

Và theo giả thiết có: $MO + OA = 8 \Leftrightarrow MA = 8 - MO \Rightarrow MA^2 = 64 - 16MO + MO^2$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 64 - 16MO + x^2 + y^2 + z^2$$

$$\Leftrightarrow 16MO = 56 - 4(x-z) = 56 - 4(-6) = 80 \Leftrightarrow MO = 5$$

Suy ra M thuộc mặt cầu (S) tâm O bán kính $R = 5$.Do đó điểm $M \in (Q) = (P) \cap (S)$ là đường tròn giao tuyến của (P) và (S) có bán kính

$$R_{(Q)} = \sqrt{R^2 - d^2(O, (P))} = \sqrt{5^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{7} \Rightarrow S_{(Q)} = 7\pi.$$

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 17 = 0$. Biết mặt phẳng (Q) cắt mặt cầu $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$ theo một đường tròn có chu vi bằng 6π . Khi đó mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $x - y + 2z - 7 = 0$.

B. $2x - 2y + z + 17 = 0$.

C. $2x - 2y + z + 7 = 0$.

D. $2x - 2y + z - 17 = 0$ và $2x - 2y + z + 7 = 0$.

Lời giải**Chọn C**

$$(Q) // (P) \Rightarrow (Q) \text{ có dạng } 2x - 2y + z + d = 0 \ (d \neq -17)$$

Giả sử bán kính đường tròn là r . Ta có $2\pi r = 6\pi \Rightarrow r = 3$.

Mặt cầu $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$ có tâm $I(0; -2; 1), R = 5$.

Ta có $d(I; (Q)) = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

$$\text{Ta có } d(I; (Q)) = 4 \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) + 1 + d|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 4 \Leftrightarrow |d + 5| = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} d + 5 = 12 \\ d + 5 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 7 \\ d = -17 \end{cases} (L)$$

Phương trình mặt phẳng (Q) là $2x - 2y + z + 7 = 0$.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, biết mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ cắt mặt phẳng $(P): x + y + z = 3\sqrt{3}$ theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính r . Khi đó giá trị của r là:

A. 4.

B. $\frac{5}{3}$.

C. 5.

D. 3.

Lời giải**Chọn A**

Mặt cầu (S) có tâm $O(0; 0; 0)$, bán kính $R = 5$

$$\text{Ta có: } d(O; (P)) = \frac{|-3\sqrt{3}|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = 3 \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - [d(O; (P))]^2} = 4.$$

Câu 32: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 5x + by + cz + d = 0$ đi qua điểm $A(-1; 5; 7)$, $B(4; 2; 3)$ và cắt mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ theo giao tuyến là đường tròn có chu vi nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $T = 3b - 2c$.

A. 1. B. 9. C. 6. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 3)$ và bán kính $R = 5$.

Do mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(-1; 5; 7)$, $B(4; 2; 3)$ nên ta có:

$$\begin{cases} A \in (P) \Rightarrow 5b + 7c + d = 5 \\ B \in (P) \Rightarrow 2b + 3c + d = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4d + 155 \\ c = -3d - 110 \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác, } d(I; (P)) = \frac{|-5 + 2b + 3c + d|}{\sqrt{25 + b^2 + c^2}} = \frac{25}{\sqrt{25d^2 + 1900d + 36150}}.$$

Mà (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi nhỏ nhất có bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2(I; (P))}$.

Suy ra, để đường tròn có chu vi nhỏ nhất thì r nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I; (P))_{\max}$.

$$\text{Mà } \sqrt{25d^2 + 1900d + 36150} = \sqrt{25(d + 38)^2 + 50} \geq 5\sqrt{2} \text{ nên } d(I; (P))_{\max} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ khi } d = -38.$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} b = 4d + 155 = 4 \cdot (-38) + 155 = 3 \\ c = -3d - 110 = -3 \cdot (-38) - 110 = 4 \end{cases} \Rightarrow T = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$$

Vậy giá trị của biểu thức $T = 1$.

Câu 33: Trong không gian Oxyz, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 4y - 2z + 4m - 11 = 0$, m là tham số thực. Biết mặt cầu (S) luôn chứa một đường tròn cố định (C) . Bán kính của (C) bằng

A. 3. B. $3\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm cố định thuộc mặt cầu (S) .

$$\text{Khi đó: } x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2mx_0 + 4y_0 - 2z_0 + 4m - 11 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 4y_0 - 2z_0 - 11 - 2m(x_0 - 2) = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 4y_0 - 2z_0 - 11 = 0 \\ x_0 - 2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm M là đường tròn (C) là giao tuyến của mặt cầu $(S'): x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 2z - 11 = 0$ và mặt phẳng $(P): x - 2 = 0$.

Mặt cầu (S') có tâm $I(0; -2; 1)$, bán kính $R = \sqrt{4 + 1 + 11} = 4$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là $d = |x_I - 2| = 2$.

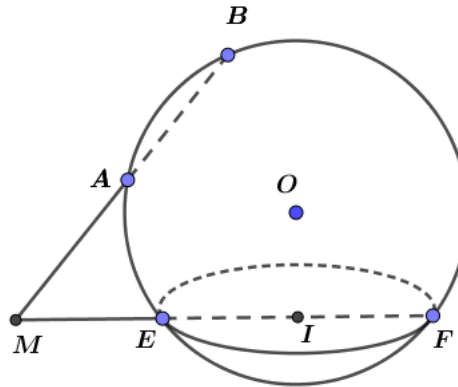
$$\Rightarrow \text{Bán kính của đường tròn } (C) \text{ là } r = \sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{3}.$$

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và các điểm $A(3; 2; 4)$, $B(5; 3; 7)$. Mặt cầu (S) thay đổi đi qua A, B và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính $r = 2\sqrt{2}$. Biết tâm của (C) luôn nằm trên đường tròn cố định (C_1) . Bán kính của (C_1) là

- A. 12. B. $2\sqrt{14}$. C. 6. D. $\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn C



Đường thẳng $AB: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$. Gọi $M = AB \cap (P)$, ta có:

$$3 + 2t + 2 + t + 4 + 3t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow M(1; 1; 1), MA = \sqrt{14}, MB = \sqrt{56}.$$

Gọi I là tâm của đường tròn (C) và $\{E, F\} = MI \cap (S)$, ta có:

$$MA \cdot MB = ME \cdot MF = (MI - r)(MI + r) = MI^2 - r^2$$

$$\Rightarrow MI^2 = \sqrt{14} \cdot \sqrt{56} + 8 = 36 \Rightarrow MI = 6.$$

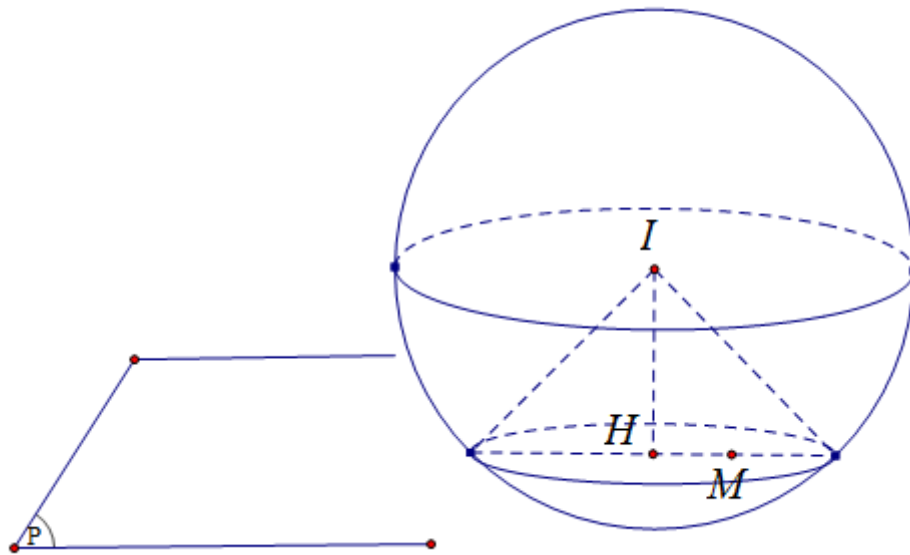
Vậy I nằm trên đường tròn cố định tâm M bán kính bằng 6.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ và điểm $M(2; -1; 2)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C) thỏa mãn khối nón có đỉnh là tâm của mặt cầu (S) và đường tròn đáy là (C) có thể tích lớn nhất bằng

- A. $\frac{250\pi\sqrt{6}}{27}$. B. $\frac{19\pi\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{19\pi\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{250\pi\sqrt{3}}{27}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 0)$, bán kính $R = 5$. Độ dài $IM = \sqrt{6} < R \Rightarrow M$ nằm bên trong mặt cầu (S) .

Gọi H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) , r là bán kính đường tròn (C) .

Đặt $IH = h \Rightarrow 0 \leq h \leq \sqrt{6}$ (do $0 \leq IH \leq IM$)

Theo định lý pytago ta có: $R^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - h^2}$.

Thể tích khối nón có đỉnh I , đáy là đường tròn (C) là:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi (R^2 - h^2) \cdot h = \frac{1}{3} \pi (-h^3 + R^2 \cdot h)$$

$$\text{Xét } y = f(h) = -h^3 + R^2 \cdot h \Rightarrow y' = f'(h) = -3h^2 + R^2$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow -3h^2 + R^2 = 0 \Leftrightarrow h = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} > \sqrt{6} \quad (h \geq 0)$$

Ta có bảng biến thiên:

h	0	$\sqrt{6}$
y	0	$19\sqrt{6}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy y đạt giá trị lớn nhất khi $h = \sqrt{6} \Leftrightarrow V_{\max} = \frac{19\pi\sqrt{6}}{3}$.

Chọn B

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 2 = 0$. Mặt cầu (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng

A. 1.

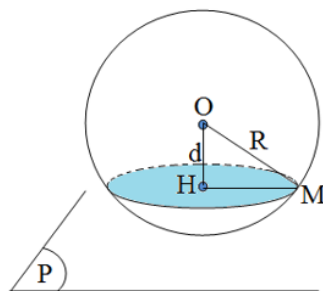
B. 3.

C. $\sqrt{7}$.

D. $\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn A



Xét mặt cầu (S) có: $\begin{cases} O = (2; 1; 1) \\ R = \sqrt{10} \end{cases}$, nên $d(O, (P)) = OH = \frac{|2 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 3 < R = \sqrt{10}$.

Khi đó:

Mặt cầu (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính: $r = HM = \sqrt{R^2 - d^2} = 1$.

Câu 37: Trong $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): 4x + 3y - 2m = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung.

A. $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = \frac{21}{2}$. **B.** $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = -\frac{21}{2}$.

C. $m = -\frac{9}{2}$ hoặc $m = \frac{31}{2}$. **D.** $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; -2)$, bán kính $R = 2$

Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung

$\Leftrightarrow$ Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) tiếp xúc nhau

$$\Leftrightarrow d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 2m|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2 \Leftrightarrow |11 - 2m| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} 11 - 2m = 10 \\ 11 - 2m = -10 \end{cases}$$

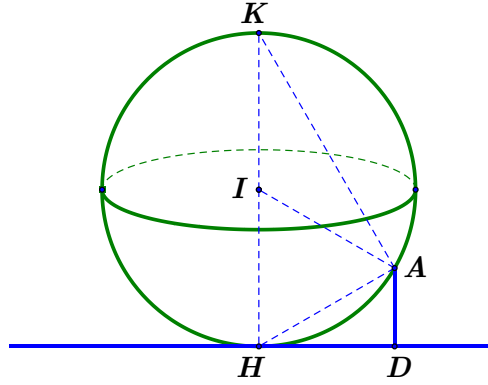
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = \frac{21}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } m = \frac{1}{2} \text{ hoặc } m = \frac{21}{2}.$$

Câu 38: Trên mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 4)$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 1 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm là điểm I , bán kính $R = 6$, đi qua điểm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm H . Biết rằng tập hợp điểm H là một đường tròn có bán kính r . Tính tỉ số $\frac{R}{r}$.

A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi D là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P) .

$$AD = d(A; (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2(-2) + 4 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 3$$

K là điểm đối xứng với điểm H qua tâm I . $HK = 2R = 12$.

Hai tam giác AHK và DAH đồng dạng nên ta có $\frac{AH}{DA} = \frac{HK}{AH} \Rightarrow AH^2 = DA \cdot HK = 3 \cdot 12 = 36$

Tam giác ADH vuông tại D nên ta có $DH = \sqrt{AH^2 - AD^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

Vậy điểm H nằm trên đường tròn có tâm là điểm D , bán kính $r = 3\sqrt{3}$.

$$\text{Vậy tỉ số } \frac{R}{r} = \frac{6}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

∞ HẾT ∞

Câu 39: Trong không gian Oxyz cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 5$.

Mặt phẳng (P) chứa trục tung và tiếp xúc với mặt cầu (S) có phương trình là

A. $x + 2z = 0$. B. $y - 2z = 0$. C. $x - 2z = 0$. D. $y + 2z = 0$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Mặt phẳng (P) chứa trục tung nên có phương trình dạng $(P): Ax + Cz = 0$, với $A^2 + C^2 \neq 0$.

$$\text{Lại có } (P) \text{ tiếp xúc mặt cầu } (S) \text{ nên } d(I, (P)) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|A - 2C|}{\sqrt{A^2 + C^2}} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow (A - 2C)^2 = 5(A^2 + C^2) \Leftrightarrow 4A^2 + 4AC + C^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2A + C)^2 = 0 \Leftrightarrow 2A + C = 0.$$

Chọn $A = 1 \Rightarrow C = -2$.

Vậy $(P): x - 2z = 0$.

Câu 40: Trong không gian oxyz, cho hai điểm $A(1; -2; 2)$ và $B(2; 2; 1)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn $MOA = MOB$ là mặt phẳng (P) . Hỏi (P) tiếp xúc với mặt cầu nào sau đây?

A. $(S_2): (x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-6)^2 = 25$. B. $(S_4): (x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-6)^2 = 20$.

C. $(S_3): (x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-6)^2 = 18.$

D. $(S_1): (x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-6)^2 = 16.$

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; y; z).$

$$\text{Vì } MOA = MOB \Rightarrow \cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = \cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{OA}|} = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{OB}|}.$$

$$+ \overrightarrow{OM}(x; y; z), \overrightarrow{OA}(1; -2; 2), \overrightarrow{OB}(2; 2; 1).$$

$$\Rightarrow \frac{x - 2y + 2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{2x + 2y + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{4 + 4 + 1}} \Leftrightarrow x + 4y - z = 0(P).$$

Vậy tập hợp điểm M thỏa mãn $MOA = MOB$ là mặt phẳng $(P): x + 4y - z = 0.$

Do đó (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S_3): (x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-6)^2 = 18$ vì:

$$(S_3) \text{ có tâm } I_3(4; 5; 6), \text{ bán kính } R_3 = \sqrt{18} \Rightarrow d(I_3, (P)) = \frac{|4 + 4 \cdot 5 - 6|}{\sqrt{1 + 16 + 1}} = \sqrt{18} = R_3.$$

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 5x + by + cz + d = 0$ đi qua điểm $A(-1; 5; 7)$, $B(4; 2; 3)$ và cắt mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ theo giao tuyến là đường tròn có chu vi nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $T = 3b - 2c$.

A. 1.

B. 9.

C. 6.

D. $\frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 3)$ và bán kính $R = 5$.

Do mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(-1; 5; 7)$, $B(4; 2; 3)$ nên ta có:

$$\begin{cases} A \in (P) \Rightarrow 5b + 7c + d = 5 \\ B \in (P) \Rightarrow 2b + 3c + d = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4d + 155 \\ c = -3d - 110 \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác, } d(I; (P)) = \frac{|-5 + 2b + 3c + d|}{\sqrt{25 + b^2 + c^2}} = \frac{25}{\sqrt{25d^2 + 1900d + 36150}}.$$

Mà (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi nhỏ nhất có bán kính

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(I; (P))}.$$

Suy ra, để đường tròn có chu vi nhỏ nhất thì r nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I; (P))_{\max}.$

$$\text{Mà } \sqrt{25d^2 + 1900d + 36150} = \sqrt{25(d + 38)^2 + 50} \geq 5\sqrt{2} \text{ nên } d(I; (P))_{\max} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ khi } d = -38.$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} b = 4d + 155 = 4 \cdot (-38) + 155 = 3 \\ c = -3d - 110 = -3 \cdot (-38) - 110 = 4 \end{cases} \Rightarrow T = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$$

Vậy giá trị của biểu thức $T = 1.$

- Câu 42:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z - 13 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 - 2y + m = 0$. Để (P) tiếp xúc với (S) thì giá trị tham số m nằm trong khoảng nào dưới đây?
- A. $(9;13)$. B. $(-6;-4)$. C. $(-12;-9)$. D. $(-4;0)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Mặt cầu } (S): x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 - 2y + m = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 5 + m = 0.$$

$$\text{Suy ra mặt cầu } (S) \text{ có tâm } I(0;0;2), \text{ bán kính } R = \sqrt{-m-1} \quad (m < -1).$$

Để (P) tiếp xúc với (S) thì

$$d(I, (P)) = R \Rightarrow \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 13|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \sqrt{-m-1} \Rightarrow \sqrt{-m-1} = 3 \Rightarrow m = -10 \in (-12; -9).$$

Vậy giá trị của tham số m nằm trong khoảng $(-12; -9)$.

- Câu 43:** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 4y - 2z + 4m - 11 = 0$, m là tham số thực. Biết mặt cầu (S) luôn chứa một đường tròn cố định (C) . Bán kính của (C) bằng
- A. 3. B. $3\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x_0; y_0; z_0)$ là điểm cố định thuộc mặt cầu (S) .

$$\text{Khi đó: } x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2mx_0 + 4y_0 - 2z_0 + 4m - 11 = 0, \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 4y_0 - 2z_0 - 11 - 2m(x_0 - 2) = 0, \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 4y_0 - 2z_0 - 11 = 0 \\ x_0 - 2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm M là đường tròn (C) là giao tuyến của mặt cầu $(S'): x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 2z - 11 = 0$ và mặt phẳng $(P): x - 2 = 0$.

$$\text{Mặt cầu } (S') \text{ có tâm } I(0; -2; 1), \text{ bán kính } R = \sqrt{4 + 1 + 11} = 4.$$

$$\text{Khoảng cách từ tâm } I \text{ đến mặt phẳng } (P) \text{ là } d = |x_I - 2| = 2.$$

$$\Rightarrow \text{Bán kính của đường tròn } (C) \text{ là } r = \sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{3}.$$

- Câu 44:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và các điểm $A(3; 2; 4)$, $B(5; 3; 7)$. Mặt cầu (S) thay đổi đi qua A, B và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn (C) có bán kính $r = 2\sqrt{2}$. Biết tâm của (C) luôn nằm trên đường tròn cố định (C_1) . Bán kính của (C_1) là

- A. 12. B. $2\sqrt{14}$. C. 6. D. $\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) , r là bán kính đường tròn (C) .

Đặt $IH = h \Rightarrow 0 \leq h \leq \sqrt{6}$ (do $0 \leq IH \leq IM$)

Theo định lý pytago ta có: $R^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow r = \sqrt{R^2 - h^2}$.

Thể tích khối nón có đỉnh I , đáy là đường tròn (C) là:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi (R^2 - h^2) \cdot h = \frac{1}{3} \pi (-h^3 + R^2 \cdot h)$$

Xét $y = f(h) = -h^3 + R^2 \cdot h \Rightarrow y' = f'(h) = -3h^2 + R^2$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow -3h^2 + R^2 = 0 \Leftrightarrow h = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} > \sqrt{6} \quad (h \geq 0)$$

Ta có bảng biến thiên:

h	0	$\sqrt{6}$
y	0	$19\sqrt{6}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy y đạt giá trị lớn nhất khi $h = \sqrt{6} \Leftrightarrow V_{\max} = \frac{19\pi\sqrt{6}}{3}$.

Chọn B

Câu 46: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 2 = 0$. Mặt cầu (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng

A. 1.

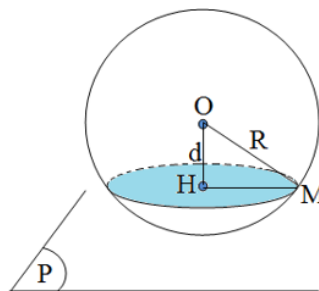
B. 3.

C. $\sqrt{7}$.

D. $\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn A



Xét mặt cầu (S) có: $\begin{cases} O = (2; 1; 1) \\ R = \sqrt{10} \end{cases}$, nên $d(O, (P)) = OH = \frac{|2 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 3 < R = \sqrt{10}$.

Khi đó:

Mặt cầu (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính: $r = HM = \sqrt{R^2 - d^2} = 1$.

Câu 47: Trong Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$ và mặt phẳng (P): $4x + 3y - 2m = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung.

- A. $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = \frac{21}{2}$. B. $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = -\frac{21}{2}$.
C. $m = -\frac{9}{2}$ hoặc $m = \frac{31}{2}$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-2)$, bán kính $R = 2$

Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung

$\Leftrightarrow$ Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) tiếp xúc nhau

$$\Leftrightarrow d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 2m|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2 \Leftrightarrow |11 - 2m| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} 11 - 2m = 10 \\ 11 - 2m = -10 \end{cases}$$

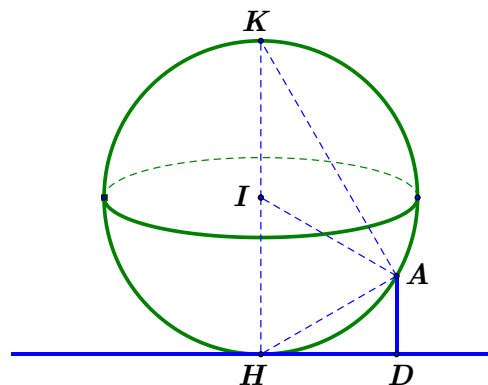
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = \frac{21}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } m = \frac{1}{2} \text{ hoặc } m = \frac{21}{2}.$$

Câu 48: Trên mặt phẳng tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1; -2; 4)$ và mặt phẳng (P): $2x - 2y + z - 1 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm là điểm I, bán kính $R = 6$, đi qua điểm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm H. Biết rằng tập hợp điểm H là một đường tròn có bán kính r . Tính tỉ số $\frac{R}{r}$.

- A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi D là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P).

$$AD = d(A; (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2(-2) + 4 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 3$$

K là điểm đối xứng với điểm H qua tâm I. $HK = 2R = 12$.

Hai tam giác AHK và DAH đồng dạng nên ta có $\frac{AH}{DA} = \frac{HK}{AH} \Rightarrow AH^2 = DA.HK = 3.12 = 36$

Tam giác ADH vuông tại D nên ta có $DH = \sqrt{AH^2 - AD^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

Vậy điểm H nằm trên đường tròn có tâm là điểm D , bán kính $r = 3\sqrt{3}$.

Vậy tỉ số $\frac{R}{r} = \frac{6}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

♣ HẾT ♣

Câu 49: Trong không gian Oxyz cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 5$.

Mặt phẳng (P) chứa trục tung và tiếp xúc với mặt cầu (S) có phương trình là

A. $x + 2z = 0$. B. $y - 2z = 0$. C. $x - 2z = 0$. D. $y + 2z = 0$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Mặt phẳng (P) chứa trục tung nên có phương trình dạng $(P): Ax + Cz = 0$, với $A^2 + C^2 \neq 0$.

Lại có (P) tiếp xúc mặt cầu (S) nên $d(I, (P)) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|A - 2C|}{\sqrt{A^2 + C^2}} = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow (A - 2C)^2 = 5(A^2 + C^2) \Leftrightarrow 4A^2 + 4AC + C^2 = 0$

$\Leftrightarrow (2A + C)^2 = 0 \Leftrightarrow 2A + C = 0$.

Chọn $A = 1 \Rightarrow C = -2$.

Vậy $(P): x - 2z = 0$.

Câu 50: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): (1-m)x + (m-m^2)y + mz + 1 = 0$. Khi m thay đổi luôn tồn tại mặt cầu (S) cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và đi qua $D(2; -3; 4)$. Biết bán kính của mặt cầu (S) nhỏ hơn 5. Bán kính của mặt cầu (S) nằm trong khoảng

A. $(1; 2)$. B. $(2; 3)$. C. $(3; 4)$. D. $(4; 5)$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(a; b; c)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): (1-m)x + (m-m^2)y + mz + 1 = 0$ suy ra

$$R = d(I, (P)) \Leftrightarrow R = \frac{|(1-m)a + (m-m^2)b + mc + 1|}{\sqrt{(1-m)^2 + m^2(1-m)^2 + m^2}} \Leftrightarrow R = \frac{|(1-m)a + (m-m^2)b + mc + 1|}{m^2 - m + 1} \quad (1)$$

$$\text{TH1: } R = \frac{(1-m)a + (m-m^2)b + mc + 1}{m^2 - m + 1} \Leftrightarrow (R+b)m^2 + (-R+a-b-c)m + R-a-1 = 0, \forall m.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R+b=0 \\ -R+a-b-c=0 \\ R-a-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=R-1 \\ b=-R \\ c=R-1 \end{cases} \Rightarrow I(R-1; -R; R-1).$$

$$D(2; -3; 4) \in (S) \Rightarrow ID = R \Rightarrow \sqrt{(R-3)^2 + (R-3)^2 + (R-5)^2} = R.$$

$$\Leftrightarrow 2R^2 - 22R + 43 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R = \frac{11+\sqrt{35}}{2} (L) \\ R = \frac{11-\sqrt{35}}{2} \approx 2,54 (tm) \end{cases}.$$

TH2:

$$R = -\frac{(1-m)a + (m-m^2)b + mc + 1}{m^2 - m + 1}$$

$$\Leftrightarrow (-R+b)m^2 + (R+a-b-c)m - R - a - 1 = 0, \forall m.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -R+b=0 \\ R+a-b-c=0 \\ -R-a-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-R-1 \\ b=R \\ c=-R-1 \end{cases} \Rightarrow I(-R-1; R; -R-1).$$

$$D(2; -3; 4) \in (S) \Rightarrow ID = R \Rightarrow \sqrt{(R+3)^2 + (R+3)^2 + (R+5)^2} = R$$

$$\Leftrightarrow 2R^2 - 22R + 43 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R = \frac{-11+\sqrt{35}}{2} < 0 (L) \\ R = \frac{-11-\sqrt{35}}{2} < 0 (L) \end{cases}.$$

Vậy bán kính mặt cầu thuộc khoảng $(2; 3)$.

Câu 51: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 5 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 20 = 0$. Đường tròn (C) là giao tuyến của (S) và (P) . Gọi A là điểm nằm trên (C) . Giá trị lớn nhất của hoành độ điểm A là

A. $\frac{-3+4\sqrt{5}}{3}.$

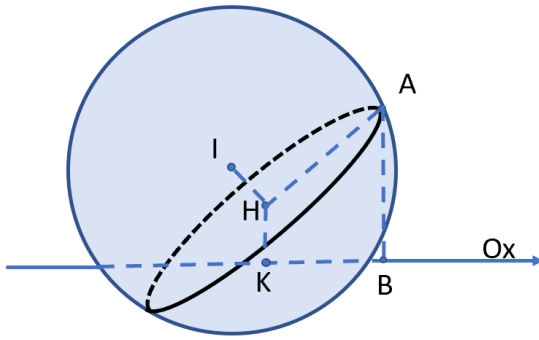
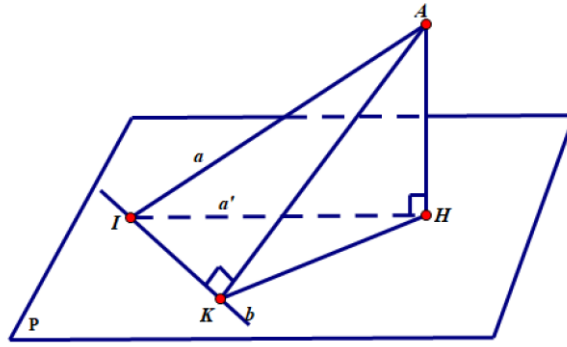
B. $\frac{3+4\sqrt{5}}{3}.$

C. $\frac{6-2\sqrt{5}}{3}.$

D. 6.

Lời giải

Chọn A



Trước tiên ta chứng minh bổ đề (*): “ Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) cắt nhau tại I , b là đường thẳng bất kì thuộc mặt phẳng (P) . Khi đó $(a;b) \geq (a,(P))$.”

Thật vậy: Không mất tổng quát ta có thể giả sử b cũng đi qua I . Gọi a' là hình chiếu của đường thẳng a trên mặt phẳng (P) . Trên đường thẳng a lấy điểm A (khác I) Gọi H là hình chiếu của A trên mặt phẳng (P) , K là hình chiếu của A trên đường thẳng b . Khi đó đường thẳng a' đi qua I và H .

$$\text{Ta có } \sin(a;b) = \sin AIK = \frac{AK}{AI} \geq \frac{AH}{AI} = \sin AIH = \sin(a,(P)) \Rightarrow (a;b) \geq (a,(P)) \text{ (đpcm).}$$

Trở lại bài toán:

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;0)$, bán kính $R=5$.

$d(I,(P))=3$, suy ra mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) có tâm $H(-1;-1;-2)$ là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) và bán kính $r=4$. Gọi K, B lần lượt là hình chiếu của H và A trên trục Ox . Ta có tọa độ điểm K là $K=(-1;0;0)$.

$$\sin(Ox,(P)) = \left| \cos(\vec{i}; \vec{n}_P) \right| = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos(Ox,(P)) = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Theo bổ đề (*) ta có:

$$\begin{aligned} x_A = x_B = x_K \pm KB &\leq x_K + KB = -1 + HA \cos(IA, Ox) \leq -1 + HA \cos((P), Ox) \\ &= -1 + 4 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{-3 + 4\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi đường thẳng HA song song hoặc trùng với hình chiếu của trục Ox trên mặt phẳng (P) .

Câu 52: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4z = 3 \\ mx - 2y - z + 3m = 0 \end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất. Tổng các phần tử của } S \text{ là}$$

- A. $-\frac{23}{13}$. B. $-\frac{6}{5}$. C. $-\frac{19}{5}$. D. $-\frac{12}{13}$.

Lời giải

Chọn B

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Xét mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4z = 3$ có tâm $I(3; 0; -2)$, bán kính $R = \sqrt{9 + 4 + 3} = 4$ và mặt phẳng $(P): mx - 2y - z + 3m = 0$.

Để hệ đã cho có nghiệm duy nhất thì mặt cầu (S_1) và mặt phẳng (P) phải tiếp xúc với nhau

$$\Leftrightarrow d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|3m + 2 + 3m|}{\sqrt{m^2 + 4 + 1}} = 4 \Leftrightarrow |3m + 1| = 2\sqrt{m^2 + 5}$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 6m - 19 = 0 \quad (*)$$

Phương trình bậc hai $(*)$ có $ac < 0$ nên luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu m_1, m_2 và

$$m_1 + m_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{5}.$$

Câu 53: Trong không gian cho ba điểm $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$ với a, b, c là các số thực khác 0, mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M(2; 4; 5)$. Biết rằng mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ cắt mặt phẳng (ABC) theo giao tuyến là 1 đường tròn có chu vi 8π . Giá trị của biểu thức bằng $P = a + b - c$:

- A. 30. B. 40. C. 4. D. 20.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3), R = 5$, theo giả thiết có:

Chu vi mặt cắt 8π : $P = 8\pi \Rightarrow r = 4$

$$d(I, (ABC)) = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

Mặt khác $d(I, (ABC)) \leq IM = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$

Có $(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $M(2; 4; 5) \in (ABC)$

M là hình chiếu của I nên có vtpt $\overrightarrow{IM} = (1; 2; 2)$

Phương trình $(ABC): x + 2y + 2z - 20 = 0$.

Câu 54: Do đó $A(20; 0; 0), B(0; 10; 0); C(0; 0; 10)$ và $P = 20 + 10 - 10 = 20$. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(10; 5; 0), B(1; 5; 9)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 64$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 15 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + 2b + 3c$.

- A. $T = 6$. B. $T = 14$. C. $T = -6$. D. $T = 15$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=8$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} A \in (P) \\ B \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a+5b-15=0 \\ a+5b+9c-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3-2a \\ c=a \end{cases}$$

$$\text{Bán kính của đường tròn giao tuyến là } r = \sqrt{R^2 - [d(I, (P))]^2} = \sqrt{64 - [d(I, (P))]^2}$$

Bán kính của đường tròn giao tuyến nhỏ nhất khi và chỉ khi $d(I, (P))$ lớn nhất.

$$\text{Mà } d(I, (P)) = \frac{|a+2b+3c-15|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|a+2(3-2a)+3a-15|}{\sqrt{a^2+(3-2a)^2+a^2}} = \frac{9}{\sqrt{6a^2-12a+9}}$$

$$\text{Xét } f(a) = \frac{9}{\sqrt{6a^2-12a+9}} \Rightarrow f'(a) = -\frac{12a-12}{(\sqrt{6a^2-12a+9})^3}$$

$$f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Bảng biến thiên:

a	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(a)$	$+$	0	$-$
$f(a)$		$3\sqrt{3}$	
	0		0

Vậy $d(I, (P))$ lớn nhất bằng $3\sqrt{3}$ khi và chỉ khi $a=1 \Rightarrow b=1; c=1$

$$\text{Vậy } T = a+2b+3c = 6.$$

Cách 2: Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=8$.

Gọi H là hình chiếu của I lên AB .

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến, ta có:

$$r = \sqrt{R^2 - [d(I, (P))]^2} \geq \sqrt{R^2 - [d(I, AB)]^2} = \sqrt{R^2 - IH^2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $IH \perp (P)$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (-9; 0; 9) \Rightarrow \vec{u}_{AB} = (-1; 0; 1)$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } AB: \begin{cases} x=10-t \\ y=5 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow H(10-t; 5; t) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = (9-t; 3; t-3)$$

$$\text{Lại có } IH \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{IH} \cdot \vec{u}_{AB} = 0 \Leftrightarrow t-9+t-3=0 \Leftrightarrow t=6 \Rightarrow \overrightarrow{IH} = (3; 3; 3) \Rightarrow \vec{n}_p = (1; 1; 1)$$

$$\text{Vậy } a=1; b=1; c=1 \Rightarrow T = a+2b+3c = 6.$$

Câu 55: Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+z^2+21}(2x+4y-8z+m) \geq 1$ và $x+3y-2z-1=0$ (với m là số thực dương). Khi $m=m_0$ có duy nhất bộ $(x; y; z)$ thỏa mãn các điều kiện trên thì m_0 thuộc khoảng nào?

A. (1;6).

B. (11;14).

C. (13;17).

D. (5;13).

Lời giải**Chọn C**

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \log_{x^2+y^2+z^2+21}(2x+4y-8z+m) \geq 1 \\ x+3y-2z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2+21 \leq 2x+4y-8z+m \\ x+3y-2z-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2 \leq m & (1) \\ x+3y-2z-1=0 & (2) \end{cases}$$

Bộ $(x; y; z)$ thỏa mãn bất phương trình (1) là tọa độ các điểm thuộc khối cầu (S) tâm $I(1; 2; -4)$ bán kính $R = \sqrt{m}$. Mặt khác tập hợp điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn phương trình (2) là mặt phẳng $(\alpha): x+3y-2z-1=0$.

Hệ có duy nhất bộ số $(x; y; z) \Leftrightarrow$ mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -4)$ và bán kính $R = \sqrt{m} \Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = R \Leftrightarrow \frac{|1+3 \cdot 2 - 2 \cdot (-4) - 1|}{\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}} = \sqrt{m} \Leftrightarrow m = 14$.

Câu 56: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \frac{64}{9}$. Trên tia

Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C thỏa mãn $\frac{1}{OA} + \frac{2}{OB} + \frac{2}{OC} = 9$. Biết mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với mặt cầu (S) . Thể tích khối chóp $OABC$ là

A. $\frac{1}{12}$. B. $\frac{1}{24}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải**Chọn B**

Gọi $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ suy ra phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên

$$d(I, (ABC)) = R \Leftrightarrow \frac{\left| \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} - 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{8}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 9 \quad (1).$$

$$\text{Mà } \frac{1}{OA} + \frac{2}{OB} + \frac{2}{OC} = 9 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = 9 \quad (2)$$

$$\text{Đặt } x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}. \text{ Từ (1) và (2) ta có hệ } \begin{cases} x+2y+2z=9 \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } (x+2y+2z) \leq \sqrt{(1^2+2^2+2^2)} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{9 \cdot 9} = 9.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2} = 1.$$

$$\text{Suy ra } x=1; y=2; z=2 \text{ nên } a=1; b=\frac{1}{2}; c=\frac{1}{2}. \text{ Do đó } A(1; 0; 0), B\left(0; \frac{1}{2}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Vậy thể tích khối chóp } OABC \text{ là } V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}.$$

Câu 57: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -3), B\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right), C(1; 1; 4), D(5; 3; 0)$.

Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A bán kính bằng 3, (S_2) là mặt cầu tâm B bán kính bằng $\frac{3}{2}$. Có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với 2 mặt cầu $(S_1), (S_2)$ đồng thời song song với đường thẳng đi qua C và D .

A. 1.

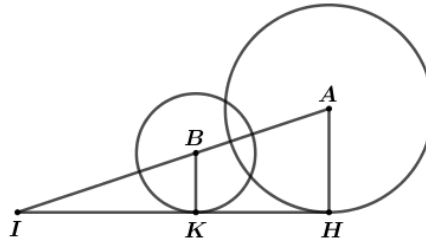
B. 2.

C. 4.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A



Ta tính được $AB = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, lại có $R_1 + R_2 = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ nên giao tuyến hai mặt cầu là một đường tròn.

Gọi $I = AB \cap (\alpha)$ với (α) là mặt phẳng thỏa mãn bài toán. Hạ BK, AH vuông góc với mặt phẳng (α) . Khi đó ta có I nằm ngoài AB và B là trung điểm AI vì $R_2 = \frac{3}{2} = \frac{1}{2}R_1 \longrightarrow BK = \frac{1}{2}AH$.

Suy ra $I(2; 1; 2)$. Gọi phương trình mặt phẳng $(\alpha): a(x-2) + b(y-1) + c(z-2) = 0, (a^2 + b^2 + c^2 > 0)$.

Vì $(\alpha) \parallel CD$ mà $\overrightarrow{CD} = (4; 2; -4)$ nên ta có $2a + b - 2c = 0 \Leftrightarrow b = 2c - 2a$.

Khi đó

$$d(A, (\alpha)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|-a + b - 5c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 3 \Leftrightarrow (c + a)^2 = a^2 + (2c - 2a)^2 + c^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c \rightarrow b = -2c \\ a = \frac{1}{2}c \rightarrow b = c \end{cases}.$$

Khi đó ta có

Trường

hợp

1.

$$b = -2c; a = 2c \Rightarrow (\alpha): 2c(x-2) - 2c(y-1) + c(z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y + z - 4 = 0.$$

Vì $C \in (\alpha) \longrightarrow$ mặt phẳng $2x - 2y + z - 4 = 0$ không thỏa.

$$\text{Trường hợp 2. } b = c; a = \frac{1}{2}c \Rightarrow (\alpha): \frac{1}{2}c(x-2) + c(y-1) + c(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 8 = 0.$$

Ta thấy $C, D \notin (\alpha) \longrightarrow x + 2y + 2z - 8 = 0$ thỏa.

Vậy $x + 2y + 2z - 8 = 0$.

Câu 58: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ và điểm $A(1; 1; -1)$.

Ba mặt phẳng thay đổi đi qua điểm A và đôi một vuông góc với nhau, cắt (S) theo giao tuyến là ba đường tròn. Tổng diện tích của ba hình tròn đó bằng

A. 12π .B. 3π .C. 22π .D. 11π .**Lời giải****Chọn C**

Mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ có tâm $I(-1;1;-2)$; $R = 3$.

Gọi $(P), (Q), (R)$ là 3 mặt phẳng qua A và đôi một vuông góc với nhau.

Gọi M, N, E lần lượt là hình chiếu của I trên 3 mặt phẳng $(P), (Q), (R)$.

Ta chứng minh $IA^2 = IM^2 + IN^2 + IE^2$

Chọn hệ trục tọa độ với A là gốc tọa độ $A(0;0;0)$, ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt là ba giao tuyến của ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$, khi đó $(P), (Q), (R)$ lần lượt là các mặt phẳng tọa độ. Gọi $I(a;b;c)$ trong hệ tọa độ đó thì ta có:

$$IA^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$(d(I, (P)))^2 + (d(I, (Q)))^2 + (d(I, (R)))^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Hay $IA^2 = IM^2 + IN^2 + IE^2$ đpcm.

Khi ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến lần lượt là các đường tròn $(C_1), (C_2)$ và (C_3) có bán kính lần lượt là $R_1; R_2; R_3$ thì

$$R_1^2 = R^2 - IM^2; R_2^2 = R^2 - IN^2; R_3^2 = R^2 - IE^2$$

Tổng diện tích ba hình tròn $(C_1), (C_2)$ và (C_3) là

$$S = \pi(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2) = \pi(3R^2 - (IM^2 + IN^2 + IE^2)) = \pi(3R^2 - IA^2) = 22\pi.$$