CHỦ ĐỀ 04: TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

LÝ THUYẾT

❖ **Đường tiệm cận ngang**

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty),(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$). Đường thẳng $y=y_0$ là đường **tiệm cận ngang** *(hay tiệm cận ngang)* của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0$.

❖ **Đường tiệm cận đứng**

- Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$$

Lưu ý:

- Với đồ thị hàm phân thức dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0;\ ad-bc\neq 0)$ luôn có tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$.

❖ **Dấu hiệu nhận biết các đường tiệm cận của đồ thị hàm số**

- Hàm phân thức mà nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử có tiệm cận đứng.
- Hàm phân thức mà bậc của tử $\leq$ bậc của mẫu có TCN.
- Hàm căn thức dạng: $y=\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}, y=\sqrt{f(x)}-g(x), y=g(x)-\sqrt{f(x)}$ có tiệm cận ngang. (dùng liên hợp)
- Hàm $y=a^x,(0<a\neq 1)$ có tiệm cận ngang $y=0$.
- Hàm số $y=\log_a x,(0<a\neq 1)$ có tiệm cận đứng $x=0$.

❖ **Cách tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số**

- Tiệm cận đứng: ta đi tìm nghiệm của mẫu không là nghiệm của tử.
- Tiệm cận ngang: tính 2 giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} y$

❖ **Một số chú ý trong quá trình tìm tiệm cận.**

- Nếu $x\to+\infty\Rightarrow x>0\Rightarrow\sqrt{x^2}=|x|=x$.
- Nếu $x\to-\infty\Rightarrow x<0\Rightarrow\sqrt{x^2}=|x|=-x$.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có $\lim\limits_{x\to1^+}f\left(x\right)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-}f\left(x\right)=2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.
C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận.
D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=2$.

Lời giải

Chọn B

Vì $\lim\limits_{x\to1^+}f\left(x\right)=+\infty$ nên đồ thi hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-x}{x^2+5x+4}$. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là:

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $x^2+5x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-4\end{array}\right.$, hai nghiệm này đều không là nghiệm của tử số nên đây là hai đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2-x}{x^2+5x+4}=2$, nên đường $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2}$. Đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận.

A. 3 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-3x+2}=\dfrac{x-1}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\dfrac{1}{\left(x-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)},\ \forall x\neq1$.

Khi đó ta thấy $x=2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\left(x-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=0$, nên đồ thị hàm số nhận $y=0$ làm tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

VÍ DỤ 4. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-5x}-\sqrt{2x^2-3x}}$

A. $y=2;y=-2$. **B.** $y=\sqrt2;y=-\sqrt2$. **C.** $y=\sqrt2$. **D.** $y=2$.

Lời giải

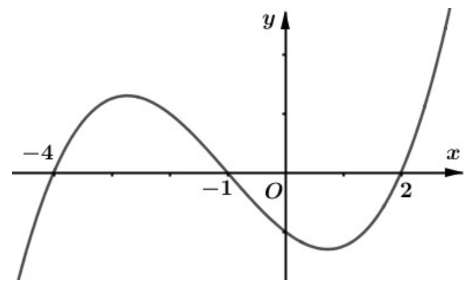
Chọn B

Tập xác định $D=(-\infty;0)\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$. Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2-5x}+\sqrt{2x^2-3x}}{-2x}=-\sqrt{2}$

Và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2-5x}+\sqrt{2x^2-3x}}{-2x}=\sqrt{2}$.

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\pm\sqrt{2}$

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên dưới.



Hỏi đồ thị hàm số $y=g(x)=\frac{2x}{f(x)}$ có bao nhiêu đường **tiệm cận đứng**?

A. 3 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 2

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $f(x)\neq 0$.

Từ đồ thị ta thấy $f(x)=0$ khi $x=-4$, $x=-1$ và $x=2$.

Khi đó $f(x)=a(x+4)(x+1)(x-2)$ có 3 nghiệm.

Do đó đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.

VÍ DỤ 6. Biết đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{3x-5}+ax+b}{(x-2)^2}$ không có tiệm cận đứng. Khi đó $4a-b$ bằng:

A. -8. **B.** 10. **C.** -4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{3x-5}+ax+b}{(x-2)^2}$ không có tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{3x-5}+ax+b=0$ có nghiệm kép $x=2$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2)=0 \\ f'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2a+b=0 \\ \frac{3}{2\sqrt{2.3-5}}+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{3}{2} \\ b=2 \end{cases}$.

Vậy $4a-b=4.\left(-\frac{3}{2}\right)-2=-8$.

VÍ DỤ 7. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{(x-1)(x^2+3x+3)}}{mx^2+2x-3}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

A. $m\in\left(-\dfrac{1}{3};0\right)$. **B.** $m\in\left(-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$ **C.** $m\in\left[-\dfrac{1}{3};0\right)$. **D.** $m\in\left(-\dfrac{1}{3};0\right]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(x-1)(x^2+3x+3)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$

Trường hợp 1:

Nếu $m=0$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. Do đó đồ thị hàm số không thể có ba đường tiệm cận.

Trường hợp 2:

Nếu $m\ne 0$ thì đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y=0$.

Do đó đồ thị hàm số có đúng ba đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ $mx^2+2x-3=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thuộc nửa khoảng $[1;+\infty)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\(x_1-1)(x_2-1)\ge 0\\(x_1-1)+(x_2-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+3m>0\\\dfrac{-1}{m}\ge 0\\\dfrac{1+m}{m}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{1}{3}\\m<0\\m>-1\end{cases}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{3}<m<0.\text{ Vậy }m\in\left(-\dfrac{1}{3};0\right)$$

VÍ DỤ 8. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C), gọi d là tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng $m-2$. Biết đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của (C) tại điểm $A(x_1;y_1)$ và cắt tiệm cận ngang của (C) tại điểm $B(x_2;y_2)$. Gọi S là tập hợp các số m sao cho $x_2+y_1=-5$. Tính tổng bình phương các phần tử của S.

A. 0. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+2)^2}$.

Với $x=m-2\Rightarrow y=1-\dfrac{3}{m}$: $A\left(m-2;1-\dfrac{3}{m}\right)(m\ne 0)$.

Phương trình tiếp tuyến d của (C): $y=\dfrac{3}{m^2}(x-m+2)+1-\dfrac{3}{m}$.

Đồ thị (C) có tiệm cận ngang $y=1$ và tiệm cận đứng $x=-2$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = \dfrac{3}{m^2}(x-m+2)+1-\dfrac{3}{m} \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1-\dfrac{6}{m} \\ x=-2 \end{cases}$ nên $y_1 = 1-\dfrac{6}{m}$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = \dfrac{3}{m^2}(x-m+2)+1-\dfrac{3}{m} \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x=2m-2 \end{cases}$ nên $x_2 = 2m-2$.

Suy ra $x_2 + y_1 = 2m - \dfrac{6}{m} - 1 = -5 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right.$.

Vậy tổng bình phương các phần tử của S là $1^2 + (-3)^2 = 10$.