

Câu 1 (5,0 điểm).

a) Tính giá trị biểu thức $(a^3 + 15a - 25)^{2020}$ với $a = \sqrt[3]{13 - 7\sqrt{6}} + \sqrt[3]{13 + 7\sqrt{6}}$.

b) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 - 2x(2y + 1) + 5y^2 + 2y = 0$.

Câu 2 (5,0 điểm).

a) Chứng minh rằng $\sqrt[3]{2}$ không thể biểu diễn dưới dạng $p + q\sqrt{r}$ với p, q, r là các số hữu tỷ và r dương.

b) Xét các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{8ab+1} + \sqrt{8bc+1} + \sqrt{8ca+1} \leq 3(a+b+c).$$

Câu 3 (3,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC đường cao CK ; H là trực tâm của tam giác. Gọi M là một điểm trên CK sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$; S, S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích các tam giác AMB, ABC và ABH . Chứng minh rằng $S = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$.

Câu 4 (4,0 điểm).

Cho tam giác ABC vuông cân tại A , trên cạnh BC lấy một điểm M bất kỳ (M không trùng với B và C). Từ M kẻ ME vuông góc AB tại E , MF vuông góc AC tại F .

a) Chứng minh rằng khi M di chuyển trên cạnh BC thì đường thẳng qua M và vuông góc với EF luôn đi qua một điểm cố định D .

b) Xác định vị trí của điểm M trên cạnh BC để diện tích tam giác EDF có giá trị nhỏ nhất.

Câu 5 (3,0 điểm).

Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác.

-----Hết-----

Lưu ý: - Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

- Giám thị không giải thích thêm.

Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:; Phòng thi số: